Sammenheng og utvikling

Målet for opplæringen er at eleven skal kunne:

- tolke og bruke funksjoner i matematisk modellering og problemløsing
- planlegge, utføre og presentere selvstendig arbeid knyttet til modellering og funksjoner innenfor samfunnsfaglige tema
- bruke digitale verktøy i utforsking og problemløsing knyttet til egenskaper ved funksjoner, og diskutere løsningene
- modellere situasjoner knyttet til tema fra samfunnsliv og arbeidsliv, presentere og argumentere for resultatene og for når modellene er gyldige

Sammenheng mellom størrelser

I dette kapittelet vil vi bruke en del begreper som det er viktig at du forstår. Disse begrepene er markert med **fet skrift**, og du må be om forklaring dersom du leser et begrep som du ikke husker hva betyr.

Størrelse er et slikt begrep. Med **størrelse** mener vi noe som kan beskrives ved hjelp av tall, og eksempel på en **størrelse** kan være:

- Befolkning
- Penger
- Vekt
- Alder
- Avstand
- Volum

Dersom to **størrelser** henger sammen, kan vi beskrive denne **sammenhengen** ved hjelp av **funksjoner** eller **modeller**.

$$\boldsymbol{Funksjoner}\ og\ \boldsymbol{modeller}\ beskriver\ \boldsymbol{sammenhengen}\ mellom\ to\ \boldsymbol{størrelser}$$

For å beskrive **sammenhengen** mellom to **størrelser**, kan vi bruke:

- **Tekst**
- **Tabell**
- **Funksjonsuttrykk, modell eller formel**
- **Graf**

I teoretisk matematikk er det vanlig å erstatte **størrelsene** med bokstavene x og y.

For at en **sammenheng** skal kunne beskrives ved hjelp av **funksjoner**, er det et krav om at **endring** i **verdien** til **størrelse** x fører til en **endring** i **verdien** til **størrelse** y.

Dersom dette er tilfelle, sier vi at y er en funksjon av x.

$$y\ er\ en\ \boldsymbol{funksjon}\ av\ x\ dersom\ \boldsymbol{endring}\ i\ x\ fører\ til\ \boldsymbol{endring}\ i\ y$$

Det er denne **endringen** vi kaller **utvikling**; hva skjer med y når x øker?

Punkt

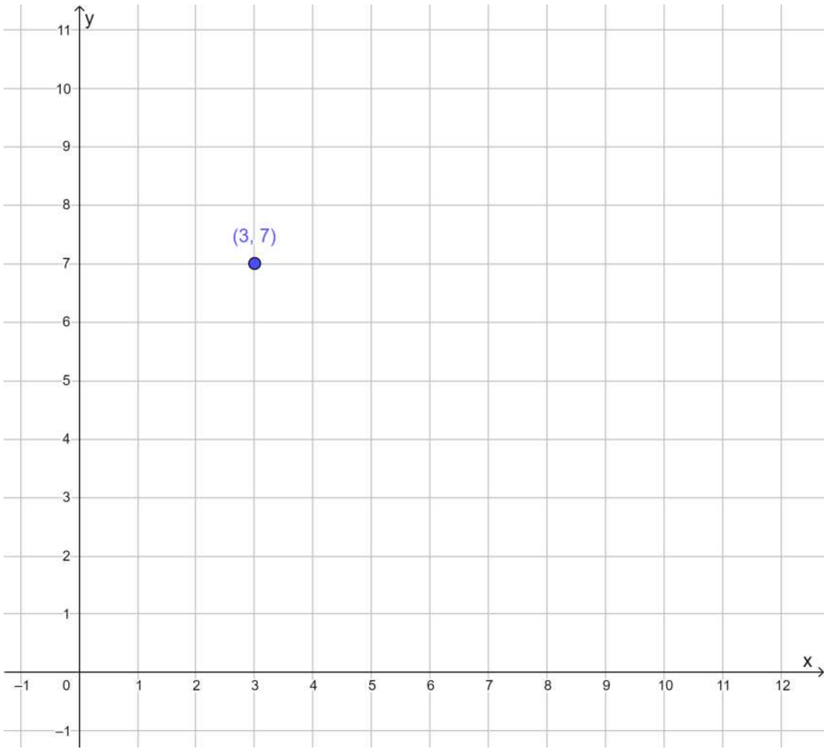
Et **punkt** består av en x- **verdi** og en y- **verdi**. Et **punkt** brukes til å beskrive **tilhørende** x- og y- **verdier**, og skrives på følgende måte:

$$(x, y)$$

Vi skiller x- **verdien** og y- **verdien** ved hjelp av et komma, og vi skriver punktet i en parentes slik at det ikke skal feiltolkes som et desimaltall.

Som et eksempel vil skrivemåten $(3,7)$ fortelle at:

- det er et punkt, fordi det står skrevet i en parentes
- når x-**verdien** er 3, er y-**verdien** 7



Du vil møte tre ulike innfallsvinkler angående **punkter**:

- når du får oppgitt både x- og y- **verdien**
- når du får oppgitt den ene **verdien**, og skal finne den andre **verdien**
- når du ikke får oppgitt noen av **verdiene**, og skal finne begge.

Når du får oppgitt begge verdiene

I 1P blir **punkter** ofte presentert i en **tabell**. I **tabellen** vil x- **verdiene** stå i øverste rad, mens y- **verdiene** står i raden under. En kombinasjon av en x- **verdi** med en **tilhørende** y- **verdi** utgjør et **punkt**.

Tabellen

x	4	7	10
y	9	15	24

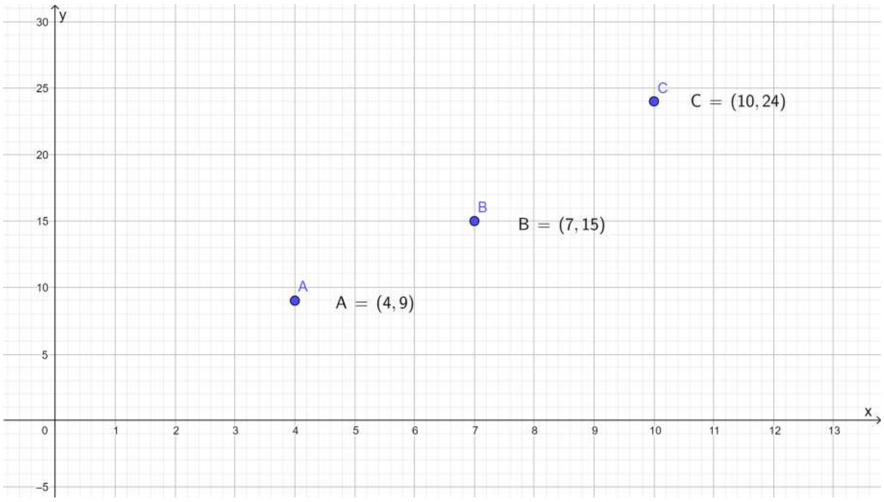
gir **punktene** (4,9), (7,15) og (10,24).

På neste side ser du hvordan du kan finne **punktene** i GeoGebra.

Fremgangsmåte:

1. Skriv **punktene** inn i inntastingsfeltet. Bruk parentes.
2. Trekk i **aksene** slik at alle punktene synes.
3. Sett navn på **aksene**

Du skal ende med et grafikkfelt som likner på dette:



Legg merke til at vi:

- Sprer punktene utover grafikkfeltet

- Kun viser positive x- **verdier**

- Viser **verdien** til hvert punkt

Oppgave 1

I tabellen nedenfor finner du **tilhørende** x- og y- **verdier**.

x	3	6	16
y	128	231	659

Skriv **punktene** inn i GeoGebra. Lag et oversiktlig grafikkfelt. Husk å sette navn på **aksene**.

Når du får oppgitt den ene verdien

Når du skal finne **tilhørende** x- og y- **verdier**, har du som regel først laget en **graf**. Derfor kommer vi tilbake til dette senere i kapittelet. Her nøyer vi oss med å beskrive metodene for hvordan dette gjøres.

<u>Metode som fungerer uansett</u>

1. Skriv inn den oppgitte x- eller y- **verdien**. Skriv det på formen $x =$ eller $y =$.
   GeoGebra vil da lage en linje fra den **verdien** du skrev inn.
2. Velg «Skjæring mellom to objekt». Trykk der linja krysser **grafen**.
3. Få frem **punktets verdi.**

<u>Metode som fungerer når x- **verdien** er oppgitt</u>

Vi kan få GeoGebra til å finne **funksjonsverdien** til en x- **verdi,** ved å skrive

$$(x - \boldsymbol{verdi}, navnet \text{ på } \boldsymbol{funksjonen}(x - \boldsymbol{verdi}))$$

Den første **funksjonen** som skrives inn i GeoGebra, gis automatisk navnet $\boldsymbol{f}$**.** Dersom vi ønsker å finne **funksjonsverdien** når $x = 3$, kan vi skrive følgende **punkt**:

$$(3, f(3))$$

GeoGebra vil da lage et **punkt** på grafen der x er 3 og y er **funksjonsverdien** når x er 3.

Når ingen av verdiene er oppgitt

Når du har laget en **graf** kan du bli bedt om å finne

- Høyest og lavest **funksjonsverdi**
- x- **verdien** der **grafen** skjærer x- **aksen**
- y- **verdien** der **grafen** skjærer y- **aksen**

Høyest og lavest **funksjonsverdi** kan du finne ved hjelp av «Ekstremalpunkt». Dersom høyest eller lavest **funksjonsverdi** finnes i et av **grafens** endepunkter, kan du finne **verdien** ved hjelp av «Punkt på objekt».

Du kan finne x- og y- **verdien** der **grafen skjærer aksene** ved å bruke «Skjæring mellom to objekt», og trykke i **skjæringspunktet** mellom **grafen** og **aksen**.

Vi kommer tilbake til dette senere i kapittelet.

Utvikling beskrevet med ulike typer modeller

Når vi skal beskrive **utviklingen** i y- **verdier** når x øker, kan vi beskrive dette ved hjelp av forskjellige typer **modeller**.

Nedenfor finner du en beskrivelse over de fire **modellene** som er pensum for dette kurset.

Modell	Funksjonsuttrykk	Beskriver
Lineær	$y = ax + b$	Endring med et fast tall
Eksponentiell	$y = a \cdot b^x$	Endring med en fast prosent
Potens	$y = a \cdot x^b$	
Polynom	Den høyeste eksponenten avgjør graden.	Den eneste **modellen** hvor endring i y- **verdi** kan være både positiv og negativ.
2. grad	$y = ax^2 + bx + c$	
3. grad	$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$	
4. grad	$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$	

Det skal komme klart frem i oppgaven hvilken **modell** du skal velge. Dette kan enten opplyses ved navn, **funksjonsuttrykk** eller en beskrivelse av **utviklingen.**

Felles for alle **modellene** er at de beskriver en **utvikling** med tre ulike innfallsvinkler:

- En nøyaktig representasjon utfra **punkter**
- En tilnærmet representasjon utfra **punkter**
- Utfra et **funksjonsuttrykk**

Dersom **utviklingen** er beskrevet gjennom et **funksjonsuttrykk**, er **funksjonen** som regel avgrenset til å være **gyldig** for en viss mengde x- **verdier.** Dette kalles **definisjonsmengden** for **funksjonen**, og skrives slik inn i GeoGebra:

$$funksjonsuttrykk, start \leq x \leq slutt$$

Dersom **utviklingen** er beskrevet gjennom **punkter**, må du skrive **punktene** inn i regnearket til GeoGebra. Deretter må du gjennomføre en regresjonsanalyse for å få frem den **modellen** du ønsker. I slike tilfeller blir du ofte bedt om å vurdere **modellens gyldighetsområde**.

Lineær utvikling: $y = ax + b$

Dersom y **endres** *fra* et startpunkt *med* et fast tall for hver gang x øker med 1, sier vi at **utviklingen** er **lineær**. Både startpunktet og det faste tallet har en praktisk betydning, og du vil bli bedt om å kommentere begge.

Lineær utvikling utfra punkter

Tenk deg at en lærer gjorde følgende demonstrasjon foran elevene sine:

Læreren hadde med seg en pappkopp, en bunke med 30 identiske terninger og en vekt. Læreren nullstilte vekta og plasserte deretter pappkoppen på vekta.

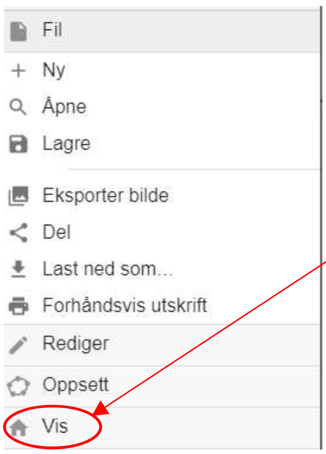
Læreren la et ulikt antall terninger i koppen, og noterte den samlede vekten av terninger + koppen i **tabellen** nedenfor.

Utstyr:	Antall terninger (x)	Samlet vekt i gram (y)
	1	17
	4	32
	7	47
	10	62

Klarer du utfra **tabellen** å finne ut vekten til pappkoppen, og vekten av hver enkelt terning?

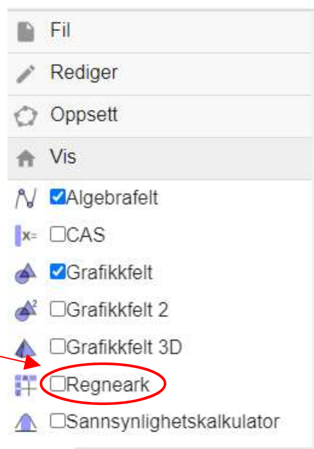
Det kan godt hende du allerede har funnet svaret på spørsmålet ovenfor. Likevel skal vi vise hvordan du kan bruke GeoGebra til å finne denne informasjonen.

Steg 1 – åpne regnearket i GeoGebra



Trykk på «Vis».

Trykk på «Regneark»



Steg 2 – skriv inn punktene fra tabellen

	A	B
1	1	17
2	4	32
3	7	47
4	10	62

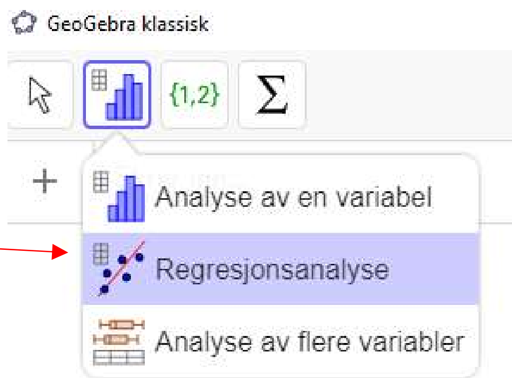
Vi skriver x- **verdiene** i A-kolonnen, og y-**verdiene** i B-kolonnen

Steg 3 – marker punktene og lag en regresjonsanalyse

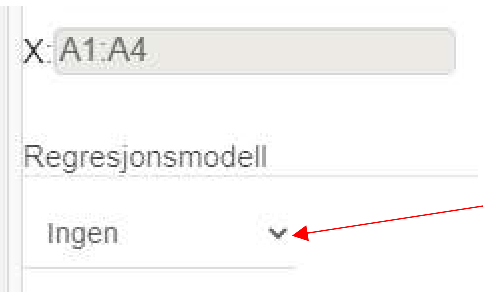
	A	B
1	1	17
2	4	32
3	7	47
4	10	62
5		

Marker tallene

Trykk på «Regresjonsanalyse



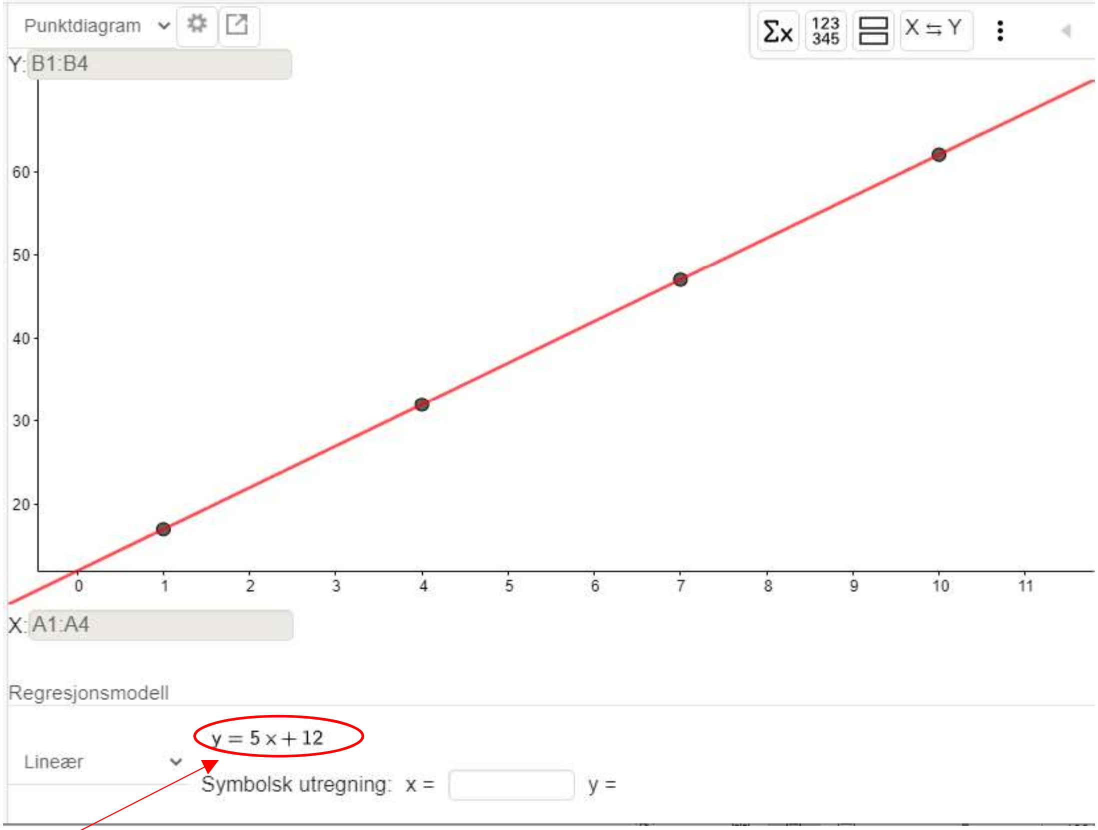
Steg 4 – velg riktig modell



Trykk på denne pila

Velg «Lineær»

Dermed får du opp dette bildet:



Her er **modellen**, eller **funksjonsuttrykket**, som skal hjelpe oss til å finne informasjonen som ble etterspurt. Hva betyr så dette **funksjonsuttrykket**?

Vi har følgende **sammenheng** mellom antall terninger + koppen, og den samlede vekten:

$$samlet\ vekt = vekt\ per\ terning\ \cdot antall\ terninger + koppens\ vekt$$

I tabellen på side 103 har vi definert y som samlet vekt, og x som antall terninger. Vi kan derfor beskrive **sammenhengen** mellom antall terninger +koppen, og den samlede vekten slik:

$$y = vekt\ per\ terning\ \cdot x + koppens\ vekt$$

Regresjonsanalysen i GeoGebra ga oss følgende **modell** på formen $y = ax + b$:

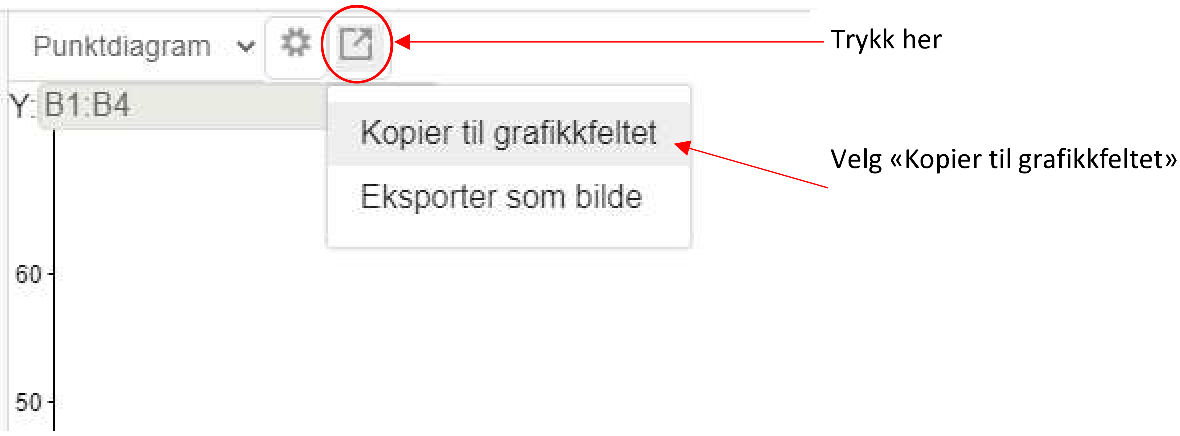
$$y = 5x + 12$$

Dette betyr at hver terning veier 5 gram, mens koppen veier 12 gram.

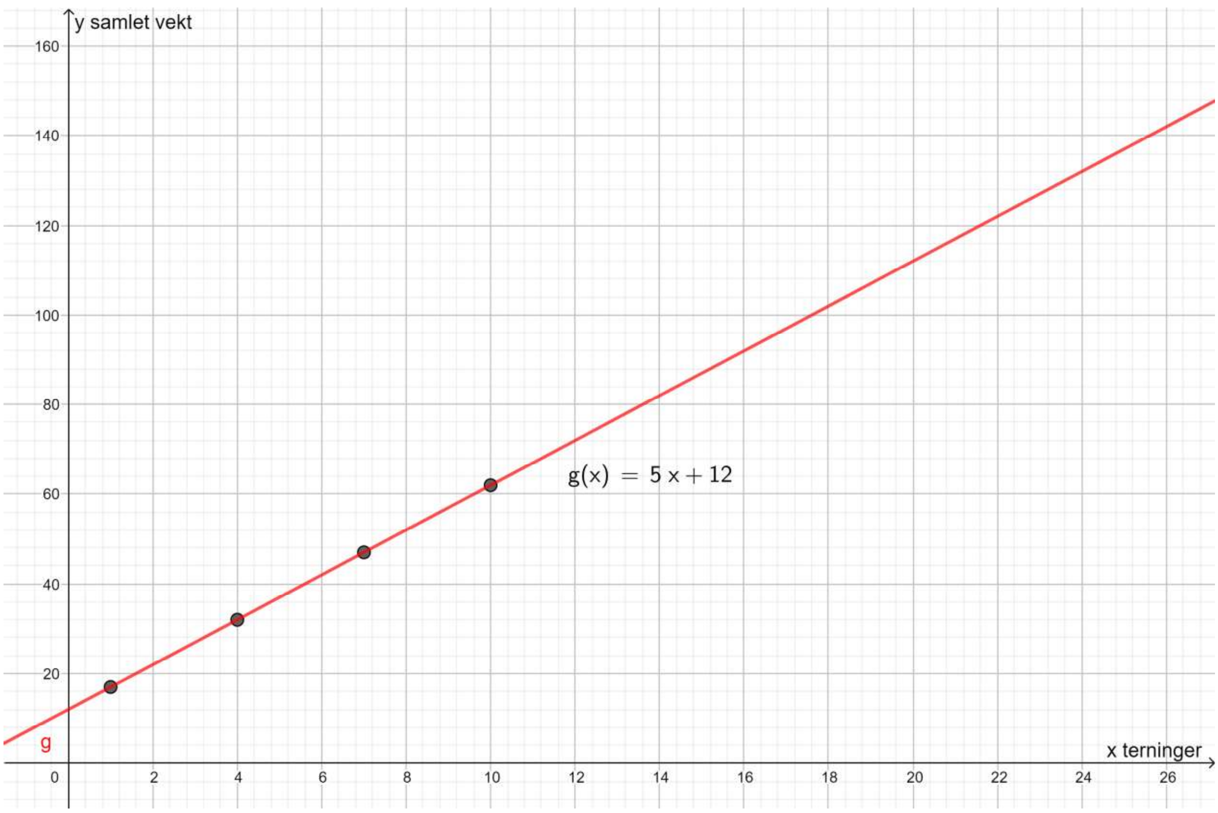
Dermed kan vi si at den samlede vekten starter på 12 gram, og øker med 5 gram for hver terning.

12 er **funksjonens** startpunkt. Dette kalles **funksjonens konstantledd**, og forkortes b
5 er **funksjonens endringsverdi**. Dette kalles **funksjonens stigningstall**, og forkortes a

Hvordan finne konstantledd og stigningstall i GeoGebra



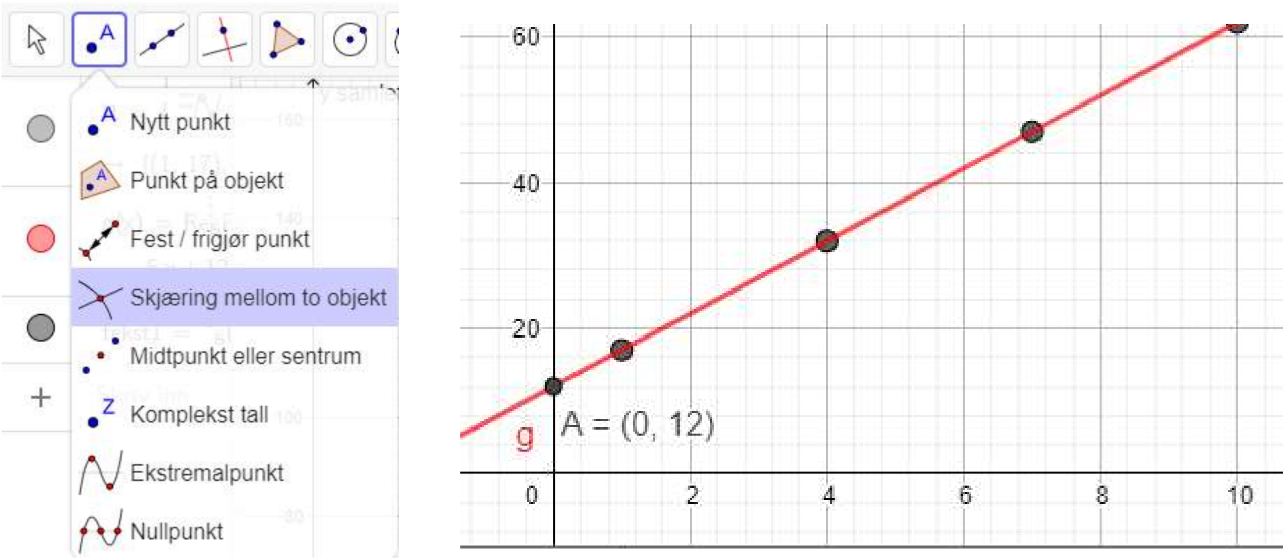
Du kan lukke regresjonsanalysen, og fjerne regnearket. Med justeringer av x- og y- **aksene**, kan grafikkfeltet se slik ut:



Den røde linja kalles en **graf**. **Grafen** viser **utviklingen** i y- **verdier** når **x** øker, og brukes til å finne **tilhørende** x- og y- **verdier**.

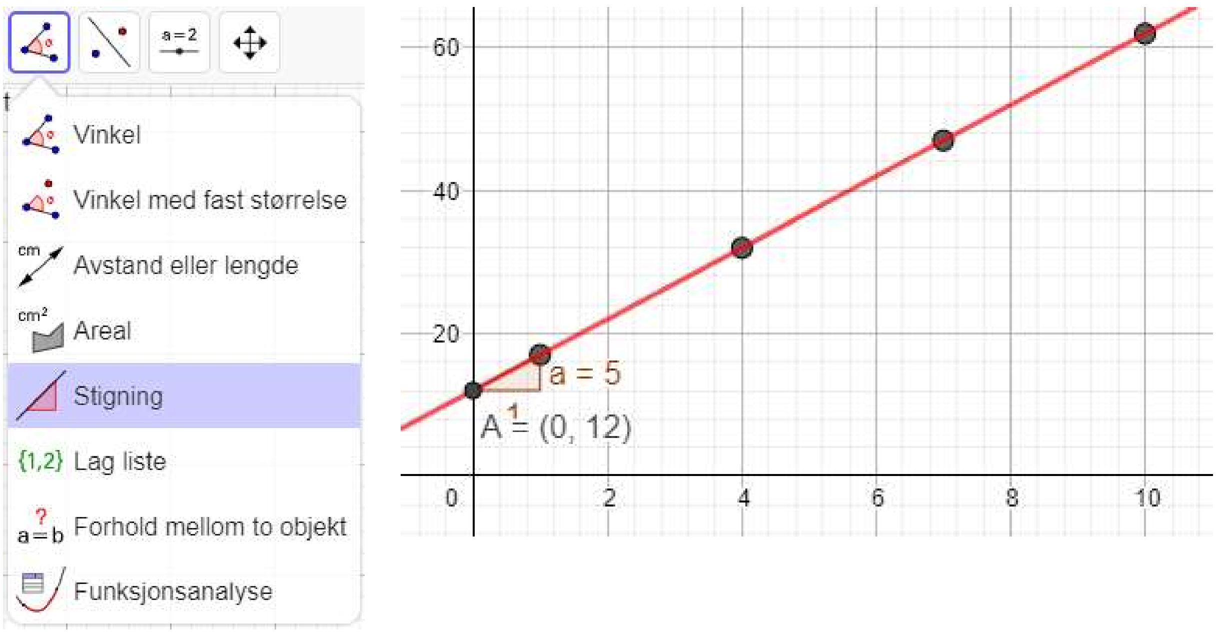
Legg merke til at vi har skrevet navn på **aksene**, og trukket **funksjonsuttrykket** inn i grafikkfeltet.

Vi finner **funksjonens konstantledd** der **grafen** krysser y- **aksen**. Velg «Skjæring mellom to objekt, og trykk der **grafen** krysser y- **aksen:**



Punktet A forteller oss at når antall terninger er 0, vil den samlede vekta være 12.

Vi finner **stigningstallet** til en rett linje ved å be GeoGebra analysere stigningen til **grafen**. Velg «Stigning», og trykk på **grafen**.

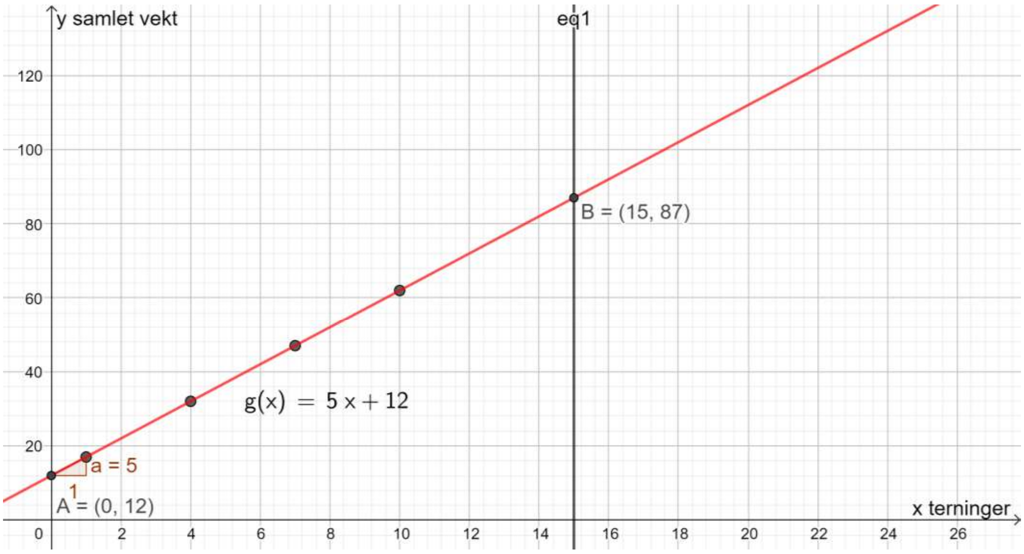


Stigningstallet a forteller oss at y øker med 5 hver gang x øker med 1.

Hvordan finne tilhørende x- og y- verdier?

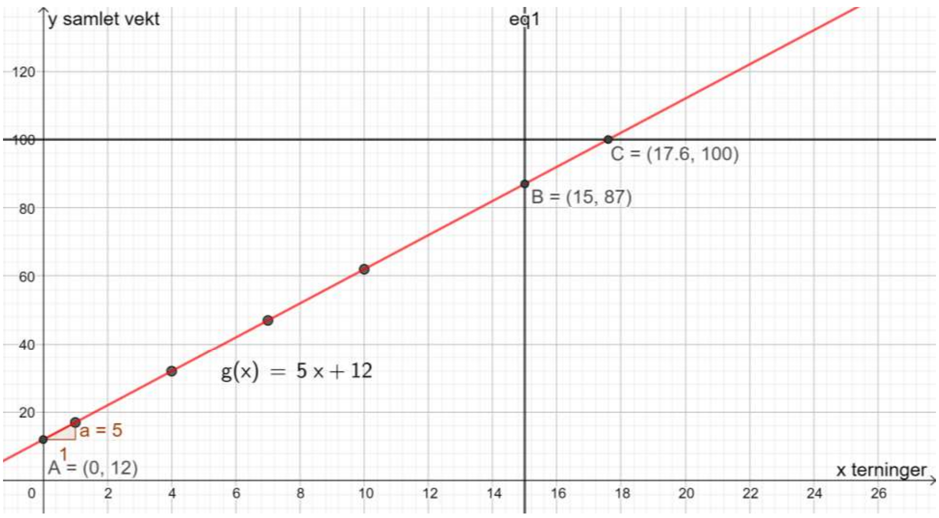
Vi kan nå bruke **grafen** til å finne **tilhørende** x- og y- **verdier**.

Tenk deg at vi ønsker å finne den samlede vekten dersom vi legger 15 terninger i koppen. Dette betyr at vi skal finne den **tilhørende** y- **verdien** når x = 15. I inntastingsfeltet må vi skrive at $x = 15$, og bruke «Skjæring mellom to objekt».



Punkt B forteller at samlet vekt med 15 terninger vil veie 87 gram.
Fremgangsmåte: skrev x = 15, brukte «Skjæring mellom to objekt»

Dersom vi ønsker å finne ut hvor mange terninger vi må legges i koppen for at den samlede vekten skal overstige 100 gram, må vi finne den **tilhørende** x- **verdien** når $y = 100$. I inntastingsfeltet må vi skrive $y = 100$, og bruke «Skjæring mellom to objekt».



En tolkning av **punkt** C forteller oss at vi må legge 18 terninger i koppen for at den samlede vekten skal overstige 100 gram.
Fremgangsmåte: skrev $y = 100$, brukte «Skjæring mellom to objekt».

Modellens gyldighetsområde

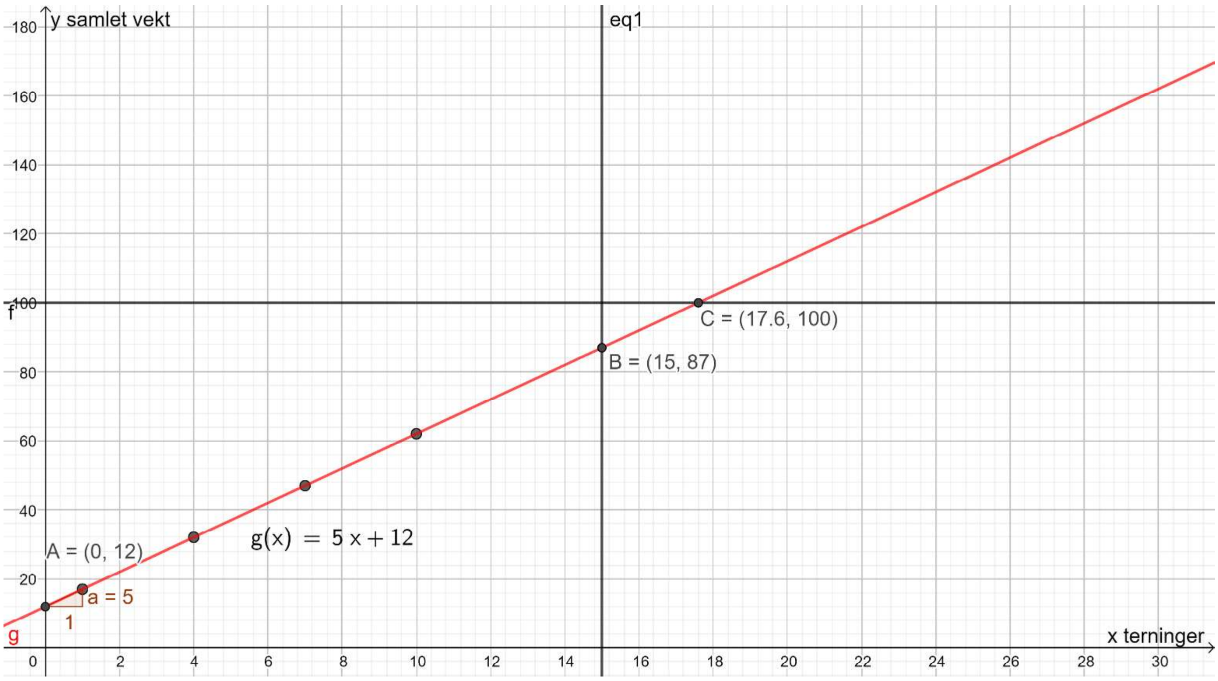
Ytterst få **modeller** brukt i praktiske situasjoner er **gyldige** for alle x- **verdier.** Kanskje er det noen begrensninger som gjør at **modellen** har en nedre eller øvre grense. Kanskje er det slik at **modellen** bli mer usikker etter hvert som x- **verdiene øker**.

I noen oppgaver er begrensningene oppgitt. I noen oppgaver skal du vurdere **modellen** opp mot et reelt **punkt**. I noen oppgaver må du gjøre selvstendige vurderinger.

I eksempelet med læreren som måler den samlede vekten av terninger pluss en kopp, står det innledningsvis at læreren har med en bunke på 30 identiske terninger. Det betyr at **modellen** vi har funnet har en øvre grense på 30. Det er i tillegg ikke mulig å legge på et negativt antall terninger. Dermed blir den nedre grensen 0.

Dette betyr at **modellen** er **gyldig** for x- **verdier** fra og med 0, og til og med 30.

I det endelige grafikkfeltet bør du vise **grafen** for hele **gyldighetsområdet.**



Oppgave 2

En lærer har med seg en eske med 20 identiske penner, en kopp og en vekt. Læreren plasserer koppen på vekta, og måler den samlede vekten av noen penner og koppen. Resultatet fra målingen finner du i tabellen nedenfor:

Antall penner	4	9	12
Gram samlet vekt	230	330	390

Bruk tallene i tabellen til å lage en lineær modell som beskriver sammenhengen mellom antall penner og den samlede vekten.

Hva i oppgaveteksten er det som avgjør at dette er en lineær modell? Hva vil du si er gyldighetsområdet til denne modellen?

Bruk modellen du laget til å finne:

- Hvor mye hver penn veier
- Hvor mye koppen veier
- Den samlede vekten til 7 penner
- Om det er mulig at den samlede vekten overstiger 600 gram

Oppgave 3

En nyåpnet videregående skole presenterte følgende elevtall for to utvalgte år etter oppstart:

År etter oppstart	1	3
Elevtall	620	650

Skolens ledelse antar at utviklingen i skolens elevtall kan beskrives med en lineær modell, som er gyldig i noen år fremover.

Bruk tallene i tabellen til å lage en modell som kan brukes til å beskrive utviklingen i skolens elevtall. Hva forteller modellen om antall elever ved skolens oppstart, og den årlige økningen i skolens elevtall?

Etter 10 år var skolens elevtall 750. Vurder modellens gyldighetsområde, utfra denne opplysningen.

Oppgave 4

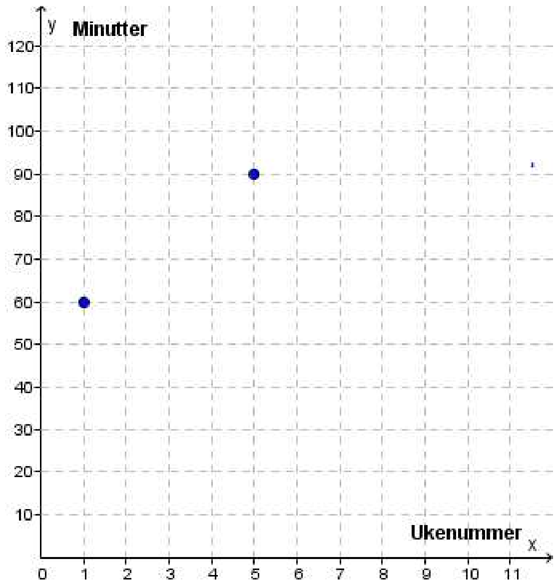
I dag er det 280 kaniner innenfor et avgrenset område. Anta at en sykdom brer seg blant kaninene, og at det om 20 måneder bare vil være 40 kaniner igjen i området.

Bruk informasjonen i teksten ovenfor til å lage en modell som viser hvor mange kaniner det vil være om x måneder dersom antallet avtar lineært.

Hva forteller modellen om den månedlige nedgangen i antall kaniner?

Vurder modellens gyldighetsområde.

Oppgave 5



I koordinatsystemet ovenfor har Liv markert hvor mange minutter hun trente i uke 1 og i uke 5. Liv har som mål at antall minutter hun trener, skal øke lineært for hver uke.

a) Bestem en modell som Liv kan bruke for å regne ut hvor mange minutter hun må øke treningen med hver uke framover for å nå dette målet.

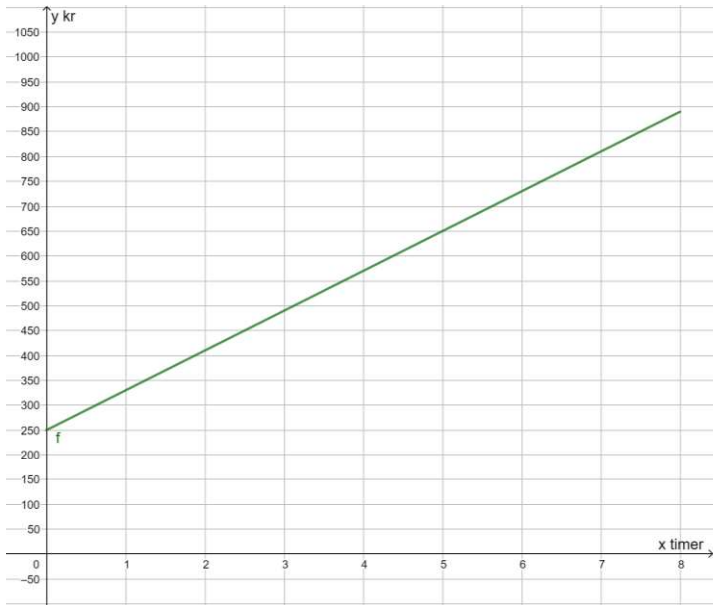
b) Hvor mange minutter må hun trene i uke 40 ifølge denne modellen?

c) Vurder modellens gyldighetsområde.

Oppgave 6

En ungdom har sittet barnevakt som deltidsjobb. Lønna beregnes ut fra et fast beløp for oppmøte, og et fast beløp for hver time ungdommen sitter barnevakt.

Grafen nedenfor viser sammenhengen mellom antall timer ungdommen sitter barnevakt, og hvor mye ungdommen får i lønn.



Velg to punkter fra grafen, og lag en modell som viser sammenhengen mellom antall timer og lønn.

Hvilken informasjon gir modellen?

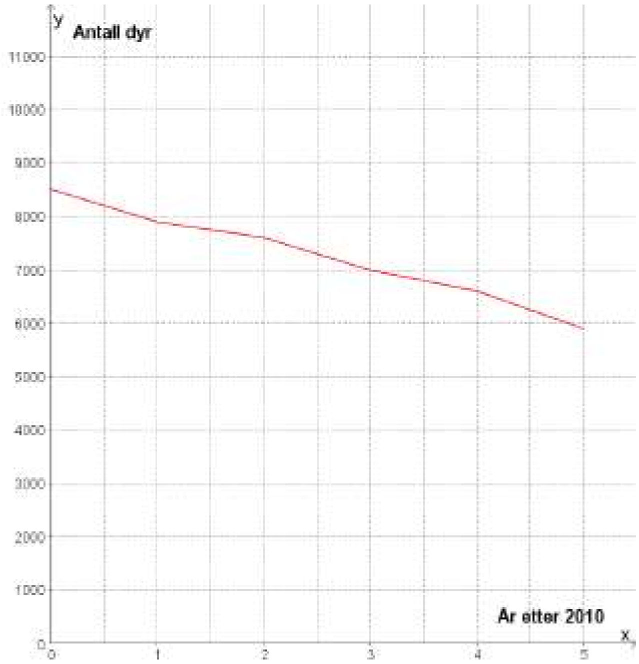
Er antall timer og lønn proporsjonale størrelser?

Oppgave 7

I 2021 er verdien av en leilighet 1 200 000 kroner.
Familien som eier antar at verdien vil stige med 80 000 kroner hvert år.

Lag en modell som viser verdien $f(x)$ kr til leiligheten *x* år etter 2021 dersom det går slik familien antar.

Oppgave 8



Linjediagrammet til venstre viser hvordan antall dyr av en art har avtatt innenfor et bestemt område i perioden 2010–2015.

Lag en lineær funksjon som tilnærmet beskriver utviklingen.

Bruk modellen og grafen du laget til å finne interessant informasjon angående utviklingen i antall dyr innenfor dette området.

Presentasjonsoppgave

Det blir stadig vanskeligere for ungdom å skaffe seg arbeid. Andelen ungdom med deltidsjobb har sunket jevnt siden år 2000, og det er foreløpig ingen tegn til at utviklingen endres.

Tabellen nedenfor viser andelen av 17 år gamle gutter og jenter som har deltidsjobb i noen utvalgte år.

År	2000	2005	2010	2015
Andel jenter	74	63,9	64,6	55,9
Andel gutter	73,9	61	56,2	48,5

Kilde: https://www.ssb.no

Bruk informasjonen i tabellen, og lag en modell for hvert av kjønnene som viser en jevn utvikling i andelen jenter og gutter som har deltidsjobb.

Hva forteller modellene om nedgangen i andelen ungdom som har deltidsjobb? Hvilket gyldighetsområde har modellene?

Lineær utvikling utfra funksjonsuttrykk

Tenk deg at en pakke kjøttdeig tas ut av fryseren, og legges på kjøkkenbenken.

Funksjonsuttrykket

$$T(x) = 2{,}5x - 18$$

kan brukes til å beregne kjøttdeigens temperatur $T(x)$ grader °C etter x timer på kjøkkenbenken.

Hvilken informasjon gir dette **funksjonsuttrykket**, og hva kan vi bruke **funksjonsuttrykket** til?

$$T(x) = 2{,}5x - 18$$

Først må vi skjønne symbolene x og $T(x)$.

x står for antall timer som har gått siden kjøttdeigen ble tatt ut, og x er den eneste **variabelen** vi kan bruke når vi skal løse funksjonsoppgaver i GeoGebra. Hvis ikke kunne vi brukt **variabelen** t for timer.

$T(x)$ uttales «T av x», og måler kjøttdeigens temperatur. Skrivemåten forteller at temperaturen er en **funksjon** av **variabelen** x, som betyr at temperaturen **endres** etter hvert som x øker.

Hva betyr tallene i **funksjonsuttrykket**?

Leddet som står alene er **funksjonens konstantledd**. I dette tilfellet forteller **konstantleddet** at kjøttdeigens temperatur er -18°C når den tas ut av fryseren.

Tallet foran **variabelen** x er **funksjonens stigningstall**. I dette tilfellet forteller **stigningstallet** at temperaturen stiger med 2,5 per time.

Hva kan vi bruke **funksjonsuttrykket** til?

Dersom vi tegner **grafen** til **funksjonsuttrykket** inn i GeoGebra, kan vi bruke **grafen** til å finne **tilhørende** x- og y- **verdier**.

Vi kan for eksempel finne ut hvor lang tid det tar før kjøttet har tint, eller hvilken temperatur kjøttet har etter 12 timer.

Tegne grafen for en definisjonsmengde

Definisjonsmengden er på mange måter det samme som **gyldighetsområde**.

Anta at kjøttdeigen når romtemperatur etter 16 timer. Det betyr at **definisjonsmengden** til **funksjonsuttrykket** er fra 0 til 16.

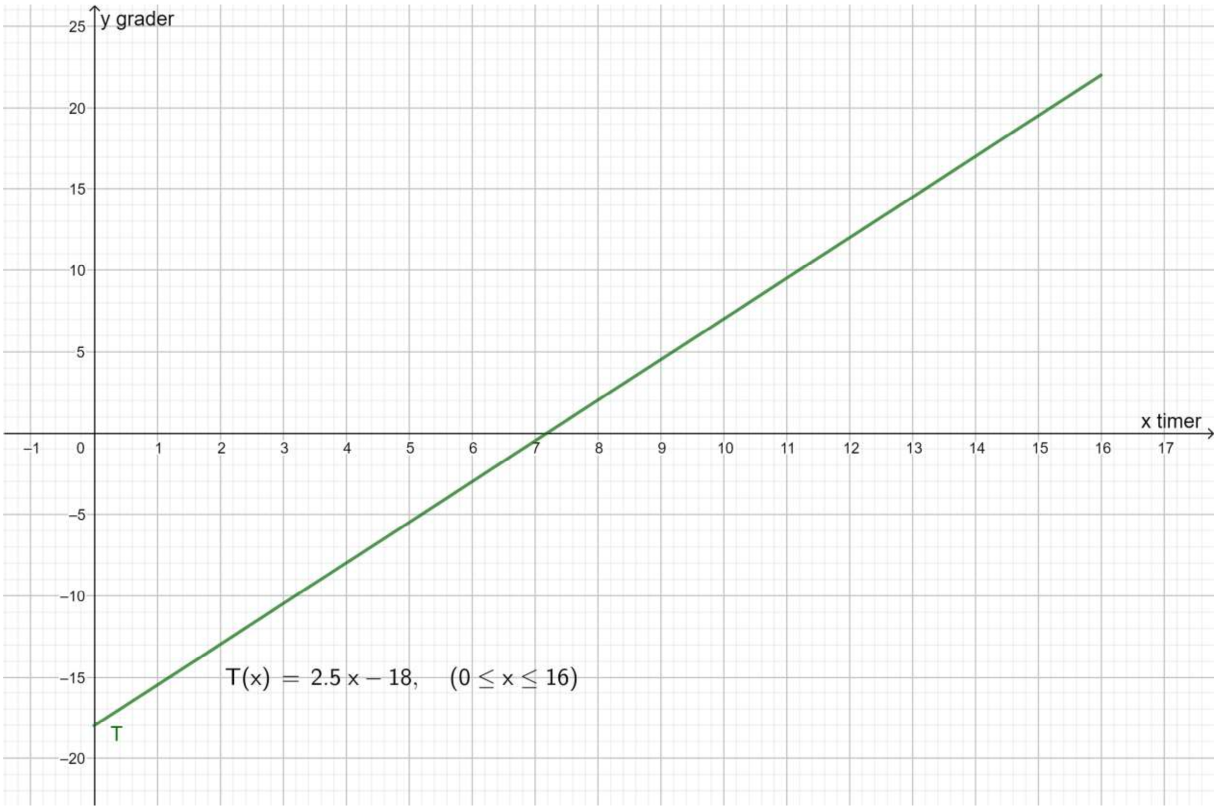
Dette kan også skrives slik:

$$0 \leq x \leq 16$$

Ofte blir **funksjonsuttrykket** og **definisjonsmengden** skrevet sammen slik:

$$T(x) = 2{,}5x - 18 \quad , \quad 0 \leq x \leq 16$$

Det er også slik vi skriver det inn i GeoGebra. Etter justeringer av x- og y- **aksen**, skal du få et grafikkfelt som likner på dette:



Husk å sette navn på **aksene**, og å trekke inn **funksjonsuttrykket**.

Vi kan nå finne **tilhørende** x- og y- **verdier**.

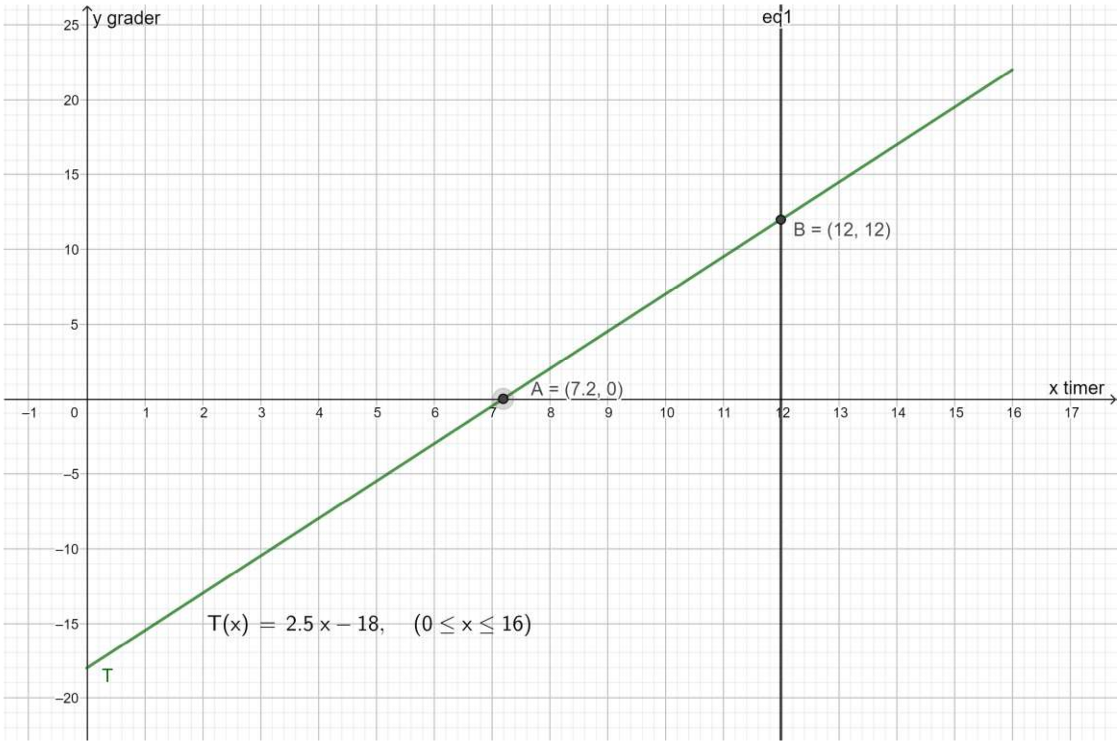
Skjæring mellom to objekt.

Hvor lang tid vil det ta før kjøttdeigen har tint. Hvilken temperatur har kjøttdeigen etter 12 timer?

Kjøttet har tint når det passerer 0℃. Dette finner vi ved å bruke «Skjæring mellom to objekt» og trykke der **grafen** skjærer x- **aksen**.

For å finne kjøttdeigens temperatur etter 12 timer må vi tenke at vii finner 12 timer på x- **aksen**. Derfor må vi skrive $x = 12$, og bruke «Skjæring mellom to objekt» der linja fra $x = 12$ skjærer **grafen**. Alternativt kan vi skrive (12,T(12)).

Dermed får vi disse **punktene** som vi må tolke:



Svar:

Kjøttdeigen tiner etter 7,2 timer. Fremgangsmåte: brukte «Skjæring mellom to objekt».

Etter 12 timer holder kjøttdeigen 12℃. Fremgangsmåte: skrev $x = 12$, brukte «Skjæring mellom to objekt».

Vurdere gyldighetsområde

Dersom **funksjonsuttrykket** ikke er avgrenset, må du selv vurdere **funksjonens gyldighetsområde**. Dette handler som regel om å tenke seg frem til fornuftige avgrensninger.

Oppgave 9

Mathias ønsker å spare til en reise. Han oppretter et fast månedlig trekk inn på en sparekonto, hvor det allerede står et beløp.

Funksjonsuttrykket

$$S(x) = 500x + 4500 \quad , \quad 0 \leq x \leq 12$$

kan brukes til å regne ut hvor mye han har på sparekontoen $S(x)$ kr når han har spart i x måneder.

Bruk informasjonen ovenfor til å vise at du kan:

- Tegne en avgrenset graf i GeoGebra
- Sette navn på x- og y- aksen
- Gi en praktisk tolkning av en funksjons stigningstall og konstantledd
- Finne tilhørende x- og y- verdier

Alle svar skal skrives i Word, og skal forklares med fremgangsmåte.

Oppgave 10

En del kommuner i Distrikts-Norge opplever en jevn nedgang i innbyggertallet.

Funksjonen

$$K(x) = -150x + 3800 \quad , \quad 0 \leq x \leq 10$$

kan brukes til å beregne innbyggertallet $K(x)$ i en kommune x år etter 2021.

Bruk informasjonen ovenfor til å vise at du kan:

- Tegne en avgrenset graf i GeoGebra
- Sette navn på x- og y- aksen
- Gi en praktisk tolkning av en funksjons stigningstall og konstantledd
- Finne tilhørende x- og y- verdier

Alle svar skal skrives i Word, og skal forklares med fremgangsmåte.

Oppgave 11

Tenk deg at du har en fulladet telefon, og at batteriprosenten synker med fast antall prosentpoeng per time ved normal bruk og temperatur. Fuksjonen B gitt ved

$$B(x) = -5x + 100$$

er en modell som viser batteriprosenten $B(x)$ til telefonen, x timer etter at telefonen var fulladet. Bruk informasjonen ovenfor til å vise at du kan:

- Tegne en graf i GeoGebra, og vurdere gyldighetsområdet til en modell
- Sette navn på x- og y- aksen
- Gi en praktisk tolkning av en funksjons stigningstall og konstantledd
- Finne tilhørende x- og y- verdier

Alle svar skal skrives i Word, og skal forklares med fremgangsmåte.

Oppgave 12

21. februar 2020 ble Covid-19 for første gang påvist hos en pasient i Norge. Etter dette steg antall smittede i et relativ raskt tempo.

Dersom vi antar at utviklingen i antall smittede nordmenn økte jevnt i perioden som fulgte, kan antall smittede nordmenn $S(x)$ beregnes ut fra modellen

$$S(x) = 97x$$

hvor x er antall dager etter 20. februar 2020.

22. mars var det registrert 2902 smittede nordmenn. 30. mars hadde dette tallet steget til 4898.

Bruk informasjonen ovenfor til å vise at du kan:

- Tegne en graf i GeoGebra, og vurdere gyldighetsområdet til en modell
- Sette navn på x- og y- aksen
- Gi en praktisk tolkning av en funksjons stigningstall og konstantledd
- Finne tilhørende x- og y- verdier
- Avgjøre om to størrelser er proporsjonale

Alle svar skal skrives i Word, og skal forklares med fremgangsmåte.

En eksamensoppgave

Jacob er selger.

Månedslønnen hans er gitt ved

$$M(x) = 0{,}075x + 32\,000$$

når han selger for x kroner i løpet av en måned.

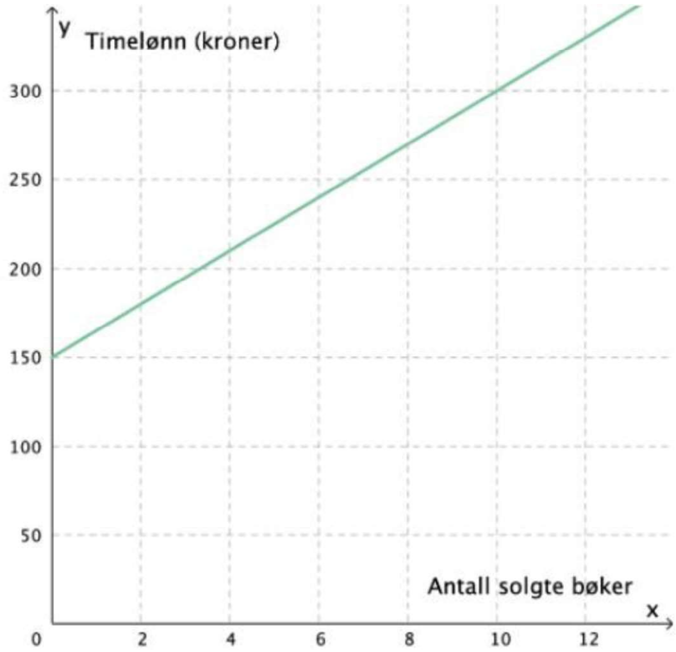
En måned selger Jacob for 150 000 kroner.

Bestem månedslønnen hans denne måneden.

En eksamensoppgave

Sarah har deltidsjobb som bokselger.

Modellen viser timelønnen hennes når hun selger x bøker i løpet av en time.



Hvor mange bøker må Sarah selge i løpet av en time for at timelønnen skal bli 450 kroner?

Eksponentiell utvikling: $\boldsymbol{y = a \cdot b^x}$

Dersom y **endres** *fra* et startpunkt *med* en fast **prosent** for hver gang x øker med 1, sier vi at **utviklingen** er **eksponentiell**. Både startpunktet og den faste prosenten har en praktisk betydning, og du vil bli bedt om å kommentere begge.

For å kunne forstå **eksponentielle modeller**, må du først arbeide med **vekstfaktor**.

Prosentvis endring – vekstfaktor

Det er vanlig at prisen på de fleste varer og tjenester øker for hvert år. Siden varer og tjenester med høy pris vil øke med et høyere kronebeløp enn varer og tjenester med lav pris, er det vanlig å beskrive prisveksten med et **prosenttall**.

Vi anser den **opprinnelige** prisen på hver enkelt vare til å være 100 %. I 2021 er den antatte prisveksten på 2,6 %. Det betyr at i gjennomsnitt blir alle varer og tjenester 2,6 % dyrere enn de var ved inngangen til 2021.

Dette betyr at ved utgangen av 2021 har prisen på varer og tjenester steget til 102,6 % i forhold til prisen ved inngangen til 2021. Dette kaller vi **ny verdi i prosent**.

Endringen i prosent kan også være negativ. Som en følge av koronapandemien sank antall pasienter med døgnopphold på norske sykehus med 7 % i 2020, ifølge SSB.

Vi anser det **opprinnelige** antall pasienter med døgnopphold til å være 100 %. Med en nedgang på 7 %, vil **ny verdi i prosent** være 93 %. Det betyr at antall pasienter med døgnopphold i 2020 var 93 % i forhold til antall pasienter med døgnopphold i 2019.

Finne vekstfaktoren

$$100\ \% \pm \boldsymbol{endring\ i}\ \% = \boldsymbol{ny\ verdi\ i}\ \%$$

I forrige kapittel lærte du å gjøre **prosenttallet** om til et **desimaltall**. Det er dette **desimaltallet** vi kaller **vekstfaktor**

$$\frac{\boldsymbol{ny\ verdi\ i}\ \%}{100\ \%} = \boldsymbol{vekstfaktor}$$

Oppgave 13

Fyll ut tabellen nedenfor. Ta utgangspunkt i at **opprinnelig verdi** er 100 %.

-7 %	=	93 %	=	0,93		=		=	0,978
+ 7 %	=	107 %	=	1,07	+ 0,4 %	=		=	
- 7,5 %	=		=		- 17,5 %	=		=	
+ 12,3%	=		=			=	300 %	=	
+ 20 %	=		=			=		=	3,5
- 10 %	=		=		- 100 %	=		=	
	=		=	0,87	- 1,2 %	=		=	
	=	140 %	=			=		=	1,007
+ 100 %	=		=			=	100,2 %	=	
	=	70 %	=		- 25 %	=		=	

Bruke vekstfaktoren

Dersom vi får opplyst **opprinnelig verdi** og **endringen i prosent**, kan vi regne **ny verdi** ved hjelp av følgende **regnemetode**:

$$\boldsymbol{Opprinnelig\ verdi\ \cdot ny\ verdi\ i\ \% = ny\ verdi}$$

I oppgave 13 trente du på å gjøre **prosent** om til **desimaltall**. Dersom vi bruker **desimaltallet** i utregningen istedenfor **prosenten**, bruker vi ordet **vekstfaktor** om **desimaltallet**. Da får vi følgende **regnemetode**:

$$\boldsymbol{Opprinnelig\ verdi\ \cdot vekstfaktor = ny\ verdi}$$

Anta at en vare i 2020 kostet 143 kroner, og at prisen steg med 2,6 % i løpet av 2021.
For å finne prisen i 2021 kan vi enten multiplisere med **ny verdi i prosent**:

$Pris\ 2021 = 143kr\ \cdot 102{,}6\ \% \approx 147\ kr$

eller ved å multiplisere med **vekstfaktoren**:

$Pris\ 2021 = 143kr\ \cdot 1{,}026 \approx 147\ kr$

I 2019 ble det registrert omtrent 750 000 pasienter med døgnopphold på norske sykehus. I 2020 var dette antallet 7 % lavere. For å finne antall pasienter med døgnopphold i 2021 kan vi enten multiplisere med **ny verdi i prosent**:

$Antall\ pasienter\ med\ døgnopphold\ 2020 = 750\ 000\ \cdot 93\ \% = 697\ 500$

eller ved å multiplisere med **vekstfaktoren**:

$Antall\ pasienter\ med\ døgnopphold\ 2020 = 750\ 000\ \cdot 0{,}93 = 697\ 500$

Du velger selv hvilken metode du ønsker å bruke. Det er imidlertid greit å vite hvilke metoder du kan bruke på de ulike digitale hjelpemidlene:

Digitale hjelpemidler	Vekstfaktoren	Ny verdi i %
ExCel	✓	✓
GeoGebra	✓	✓
CAS	✓	✓
Kalkulator	✓	Ikke alle

Løs noen av oppgavene på neste side ved hjelp av ExCel og CAS.

Oppgave 14

I 2018 ble en leilighet kjøpt for 2 450 000 kr. I 2021 hadde verdien av leiligheten steget med 15 %. Hvor høy er verdien av leiligheten i 2021?

Oppgave 15

Nypris på en moped var 12 000 kr. Etter ett år hadde verdien sunket med 20 %. Hva var verdien på mopeden etter ett år?

Oppgave 16

Hanne har en timelønn på 160 kr. Hun blir lovet en lønnsøkning på 4,3 %. Hva blir den nye timelønna hennes?

Oppgave 17

Prisen på en aksje var 68 kr. Dagen etter hadde verdien sunket med 2,8 %. Hva ble den nye verdien på denne aksjen?

Oppgave 18

En familie kjøpte en leilighet i 2008 for 1,8 millioner kroner. De antar at leilighetens verdi har steget med 150 % frem til i dag. Hvor høy er verdien på leiligheten dersom familien har rett?

Oppgave 19

a) I januar 2019 kjøpte en person akser for et visst beløp. Verdien på aksjene kunne i juni beregnes utfra regnestykket 15 000 · 1,05. Hva forteller tallene 15 000 og 1,05?

b) Høsten 2020 startet et visst antall elever på VG1. Antall elever som fullførte året kan beregnes utfra regnestykket 140 · 0,875. Hva forteller tallene 140 og 0,875?

Flere prosentvise endringer

Vi må forvente at prisen på varer og tjenester fortsetter å øke i årene som kommer. For hver prisstigning må vi multiplisere den nye prisen med **vekstfaktoren.** Selv om **endringen i prosent** er lik for hvert år, vil prisstigningen i kroner bli høyere for hvert år.

Anta at varen som kostet 147 kroner i 2021 øker med 2,6 % hvert år de neste 4 årene. For hver prisendring må vi multiplisere med **vekstfaktoren**, noe som gir dette regnestykket:

$$Pris\ etter\ 4\ endringer = 147\ kr\ \cdot \underbrace{1{,}026 \cdot 1{,}026 \cdot 1{,}026 \cdot 1{,}026}_{\text{Dette kan forenkles ved hjelp av potens}} \approx 163\ kr$$

Vi får dermed:

$$Pris\ etter\ 4\ endringer = 147\ kr\ \cdot 1{,}026^4 \approx 163\ kr$$

Anta at antall pasienter med døgnopphold ved norske sykehus fortsetter å synke med 7 % hvert år i de neste tre årene. Vi kan dermed regne ut at

$$Antall\ pasienter\ med\ døgnopphold = 697\ 500\ \cdot 0{,}93^3 = 561\ 039$$

Vi kan regne ut **ny verdi** etter den siste **prosentvise endringen** ved hjelp av følgende **regnemetode**:

$$\boldsymbol{Opprinnelig\ verdi\ \cdot vekstfaktor^x = ny\ verdi}$$
$$\boldsymbol{der\ x\ ertattes\ av\ antall\ endringer}$$

Du legger kanskje merke til at vi kun har vist utregning ved hjelp av **vekstfaktoren**, og ikke ved hjelp av **ny verdi i prosent**? Grunnen ser du her:

Digitale hjelpemidler	Vekstfaktoren	Ny verdi i %	
ExCel	✓	✓	Kalkulator lar deg ikke bruke **prosenttall** ved potensregning
GeoGebra	✓	✓	
CAS	✓	✓	
Kalkulator	✓	✗	

Løs noen av oppgavene nedenfor ved hjelp av ExCel og CAS.

Oppgave 20

Hvis vi setter 10 000 kr i banken 1. januar, vil vi etter ett år få *renter* av pengene slik at beløpet på kontoen øker. Renten er en bergenes prosentvis av det beløpet vi har på kontoen.

Hvor mye vil vi ha på kontoen etter 5 år dersom renta er på 3 % per år?

Oppgave 21

En bærbar PC koster 9800 kr som ny. Vi regner med at verdien minker med 25 % i året. Hvor mye er PC-en verdt etter 4 år?

Oppgave 22

Anta at en aksje, som i dag er verdt 118 kr, stiger med 2 % hver dag den neste uka. Hvor høy er verdien på aksjen etter en uke (7 dager)?

Oppgave 23

Anta at en nytraktet kopp med kaffe holder 93 °C, og at temperaturen synker med 6,5 % per minutt de første minuttene (i normal romtemperatur). Hvor varm vil kaffekoppen være etter 3 minutter?

Oppgave 24

Knut kjøper en bil, og han vet at bilens verdi synker en viss prosentandel hvert år. Han ser for seg å beholde bilen i noen år, og han lager følgende regnestykke for å beregne hvor mye han kan selge bilen for:

$$Salgspris\ =\ 320\,000\ \cdot\ 0{,}85^4$$

Hvor mye kjøpte Knut bilen for, hvor mange prosent antar Knut at verdien synker hvert år, og hvor mange år tenker Knut å beholde bilen før han selger den?

Hvor mye regner Knut å selge bilen for?

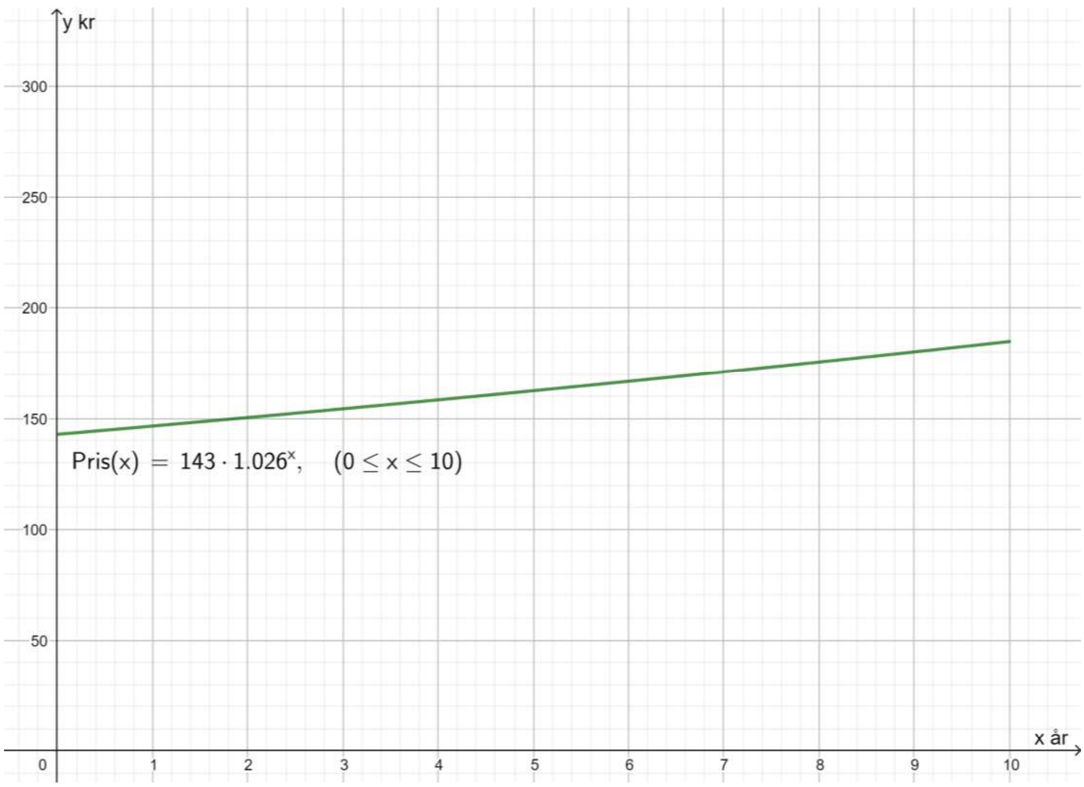
Ukjent antall endringer – eksponentiell utvikling

På de forrige sidene har vi sett på hvordan vi regner **ny verdi** etter et bestemt antall **prosentvise endringer**. Dersom vi ønsker å lage en **regnemetode** som gir oss mulighet til å finne **ny verdi** etter et ukjent antall **endringer**, må vi erstatte det kjente antallet **endringer** med variabelen x.

Nedenfor har vi beskrevet utviklingen i pris for varen fra tidligere eksempler.

Opprinnelig beløp	Etter 1 år	Etter 2 år	Etter 3 år	Etter x år
$143\ kr$	$143 \cdot 1{,}026^1$	$143 \cdot 1{,}026^2$	$143 \cdot 1{,}026^3$	$143 \cdot 1{,}026^x$

Grafisk vil utviklingen se slik ut:



For ordens skyld har vi avgrenset **modellen** til å være **gyldig** i 10 år fremover.

Funksjonsuttrykket $143 \cdot 1{,}026^x$ er skrevet på formen $y = a \cdot b^x$.

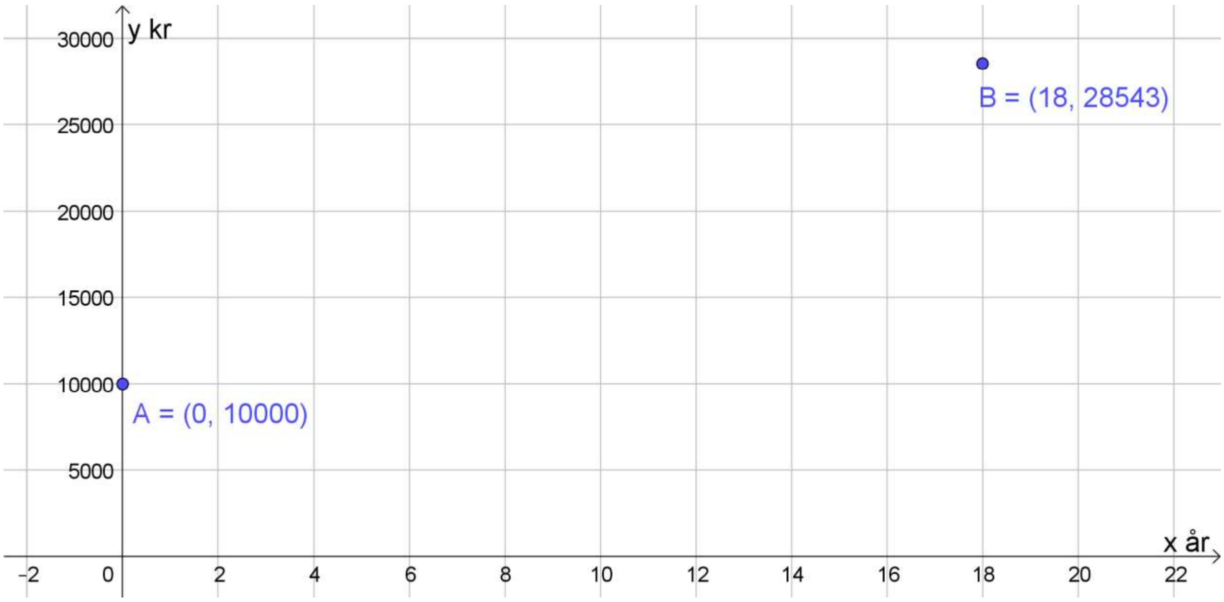
143 er **funksjonens opprinnelige verdi**, og forkortes a

1,026 er **funksjonens vekstfaktor**, og forkortes b.

I oppgaver vil du bli bedt om å tolke **funksjonsuttrykket.**

Eksponentielle modeller utfra punkter

Tenk deg at foreldrene til et nyfødt barn satte inn et beløp i et aksjefond da barnet ble født. Foreldrene forventer at verdien til aksjefondet stiger frem til barnet blir 18 år.



Kan **punktene** i **koordinatsystemet** ovenfor brukes til å finne aksjefondets årlige verdiøkning, dersom aksjefondet har steget med en fast **prosent** hvert år?

Vi skriver punktene inn i regnearket i GeoGebra, og ber GeoGebra utføre en regresjonsanalyse. Deretter velger vi en eksponentiell modell, og får dette funksjonsuttrykket:

Funksjonsuttrykket gir oss denne informasjonen:

10 000 er det opprinnelige beløpet foreldrene plasserte i aksjefondet da barnet ble født.

1,06 = 106 %, som betyr 6 % årlig verdiøkning.

Også her kan du bli bedt om å finne **tilhørende** x- og y- **verdier**, og det gjøres på samme måte som tidligere.
I tillegg kan du bli bedt om å finne **momentan-** og/eller **gjennomsnittlig vekstfart**.

Momentan vekstfart i ett punkt

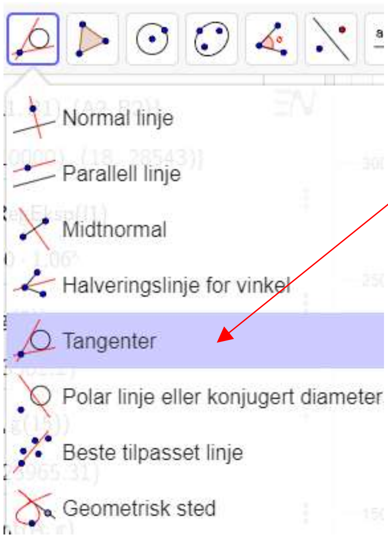
Det kan være interessant å beskrive **endringen** i y- verdi utfra ett bestemt **punkt**. Det er dette som kalles **momentan vekstfart**.

Tenk deg at vi ønsker å finne økningen i aksjefondets **verdi** i år 5 og i år 15, og sammenligne disse økningene.

For å finne den **momentane vekstfarten** til y i ett bestemt **punkt** må vi først skrive inn den oppgitte x- **verdien**. Som vi har beskrevet tidligere kan dette gjøres på flere måter. Vi velger her å skrive (5,g(5)) og (15,g(15)).

Deretter velger vi «Tangent», og trykker på **grafen** og **punktet** vi lagde. Dette må gjøres for begge **punktene**.

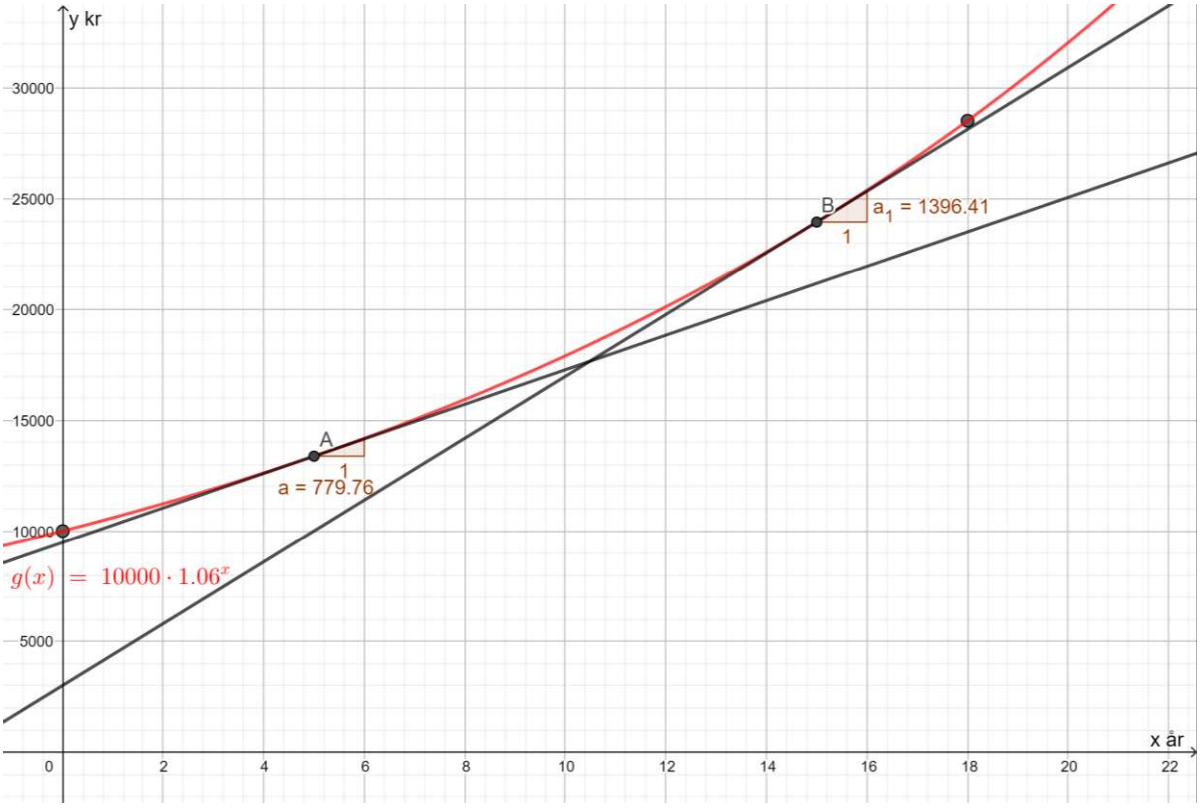
Vi er ute etter **stigningstallet** til denne tangenten. **Stigningstallet** forteller om **utviklingen** i y- **verdi** i akkurat dette **punktet**. Velg «Stigning», og trykk på begge tangentene.



Tangent finner du her:

Stigning finner du her:

Grafikkfeltet vil se slik ut:



Stigningstallet a forteller oss at i år 5 har aksjefondets **verdi** en vekst *tilsvarende* 779,76 kroner per år.

Stigningstallet a_1 forteller oss at i år 15 har aksjefondets **verdi** en vekst *tilsvarende* 1396,41 kroner per år.

Det er interessant å se at aksjefondets **verdi** stiger mer i år 15 enn i år 5, selv om den **prosentvise endringen** er lik. Dette er en egenskap ved **eksponentielle modeller** som viser **positiv utvikling**, og det som gjør at **grafen** har en buet form.

Dersom den **eksponentielle modellen** viser **negativ utvikling,** vil det motsatte gjelde. Jo høyere x- **verdi** vi velger, desto lavere blir nedgangen i y- **verdi**.

Gjennomsnittlig vekstfart mellom to punkter

Det kan også være interessant å beskrive **endringen** i y- verdi mellom to **punkter**. Det er dette som kalles **gjennomsnittlig vekstfart**.

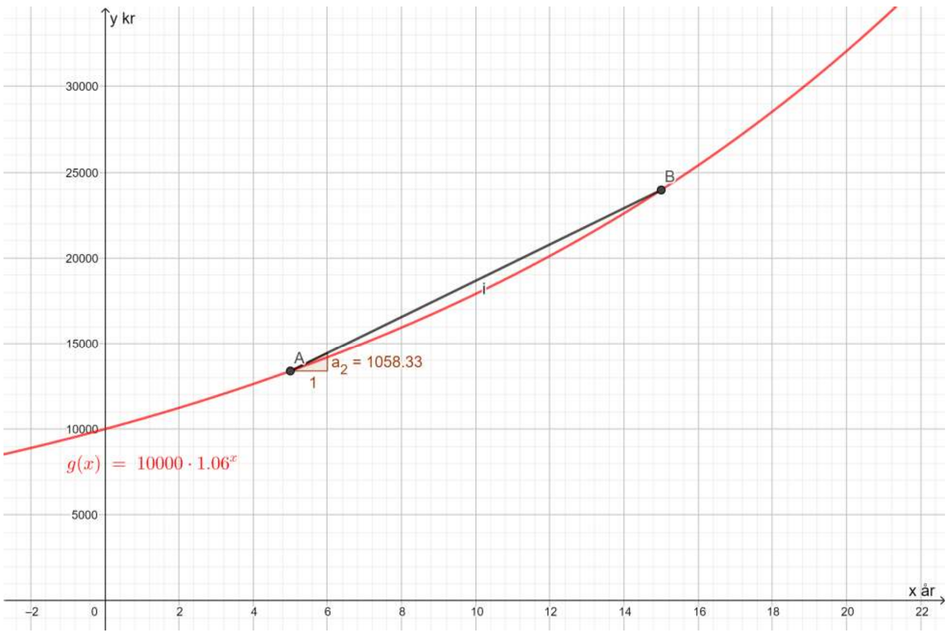
Tenk deg at vi ønsker å finne den årlige økningen i aksjefondets **verdi** mellom år 5 og år 15.For å finne den **gjennomsnittlige vekstfarten** til y mellom to **punkter** må vi først lage **punktene**. I dette eksempelet skal vi bruke **punkter** vi allerede har funnet.

Deretter velger vi «Linjestykke mellom to punkt), og trykker på **punktene** vi lagde. Vi er ute etter **stigningstallet** til dette linjestykket. **Stigningstallet** forteller om gjennomsnittlig **utvikling** i y- **verdi** mellom disse **punktene**. Velg «Stigning», og trykk på linjestykket.

Linjestykke finner du her:

Stigning finner du her:

Grafikkfeltet vil se slik ut:



For ordens skyld har vi fjernet (men ikke slettet) tangentene vi lagde da vi fant **momentan vekstfart**.

Stigningstallet a_s forteller oss at mellom år 5 og 15 har aksjefondet i gjennomsnitt steget med 1 058,33 kroner per år.

Oppgave 25

En nyåpnet videregående skole presenterte følgende elevtall for to utvalgte år etter oppstart:

År etter oppstart	1	3
Elevtall	620	680

Skolens ledelse antar at utviklingen i skolens elevtall kan beskrives med en prosentvis endring som er gyldig i noen år fremover.

Bruk tallene i tabellen til å lage en modell som kan brukes til å beskrive utviklingen i skolens elevtall. Hva forteller modellen om den prosentvise endringen per år i skolens elevtall?

Bruk modellen til å vise at du kan:

- Finne og tolke momentan vekstfart i ett punkt.
- Finne gjennomsnittlig endring i y- verdi mellom to punkter.

Oppgave 26

Ved en annen nyåpnet videregående skole så elevtallet slik ut i to utvalgte år:

År etter oppstart	1	3
Elevtall	1420	1217

Skolens ledelse antar at utviklingen i skolens elevtall kan beskrives med en prosentvis endring som er gyldig i noen år fremover.

Bruk tallene i tabellen til å lage en modell som kan brukes til å beskrive utviklingen i skolens elevtall. Hva forteller modellen om den prosentvise endringen per år i skolens elevtall?

Bruk modellen til å vise at du kan:

- Finne og tolke momentan vekstfart i ett punkt.
- Finne gjennomsnittlig endring i y- verdi mellom to punkter.

En eksamensoppgave

Tabellen nedenfor viser antall innbyggere i Norge 1. januar noen utvalgte år.

År	1960	1970	1980	1990	2000	2010	2017
Innbyggere (millioner)	3,57	3,86	4,08	4,23	4,47	4,85	5,25

La x være antall år etter 1960. (La $x = 0$ svare til år 1960, $x = 10$ til 1970 osv.)

Før du begynner med oppgavene nedenfor må du regne ut x- verdiene til alle årstallene

a) Vis at $f(x) = 3{,}57 \cdot 1{,}006^x$ er en modell som passer godt med tallene i tabellen.

b) Hva forteller tallet 1,006 i denne modellen?

Anta at modellen fra oppgave a) vil gjelde i årene framover.

c) I hvilket år vil innbyggertallet i Norge passere 10 millioner ifølge denne modellen?

En eksamensoppgave

Dato	1. juni	1. juli	1. august	1. september
Antall tusen registrert smittet	6278	10 660	17 837	25 761

Tabellen viser antall tusen personer som totalt var registrert smittet av covid-19 noen dager i 2020.

La $x = 1$ svare til 1. juni, $x = 2$ til 1. juli, $x = 3$ til 1. august og $x = 4$ til 1. september.

a) Bruk regresjon til å vise at funksjonen f gitt ved

$$f(x) = 4038 \cdot 1{,}608^x$$

kan brukes som en modell for antall tusen personer som totalt var registrert smittet måned for måned i denne perioden.

b) Hvor mange prosent økte det totale antallet registrert smittede personer med per måned ifølge modellen?

En presentasjonsoppgave

I tabellen nedenfor finner du informasjon om lønnsutvikling i perioden 2015 – 2019 blant ulike yrkesgrupper.

	Gjennomsnittlig månedslønn				
Yrkesgruppe	**2015**	**2016**	**2017**	**2018**	**2019**
Ledere	63400	64350	65800	67810	70150
Akademiske yrker	49620	50370	51640	53120	54970
Kontoryrker	36840	37660	38560	39720	41000
Salg og service	32510	33210	33980	34900	36140
Håndverker	36080	36890	37900	38940	40210

La x være antall år fra 2015. Bruk GeoGebra til å finne:

- en lineær beskrivelse av lønnsutviklingen til hver av yrkesgruppene
- en eksponentiell (prosentvis) beskrivelse av lønnsutviklingen til hver av yrkesgruppene

Syns du lønnsutviklingen til yrkesgruppene er rettferdig?

Eksponentielle modeller utfra funksjonsuttrykk

Tenk deg at du kjøper en moped når du blir 16 år, og selger denne når du blir 20 år. I hvert av de fire årene du eier mopeden, vil mopedens **verdi** synke med en fast prosent.

Funksjonen

$$M(x) = 15000 \cdot 0.85^{x} \quad , \quad 0 \leq x \leq 4$$

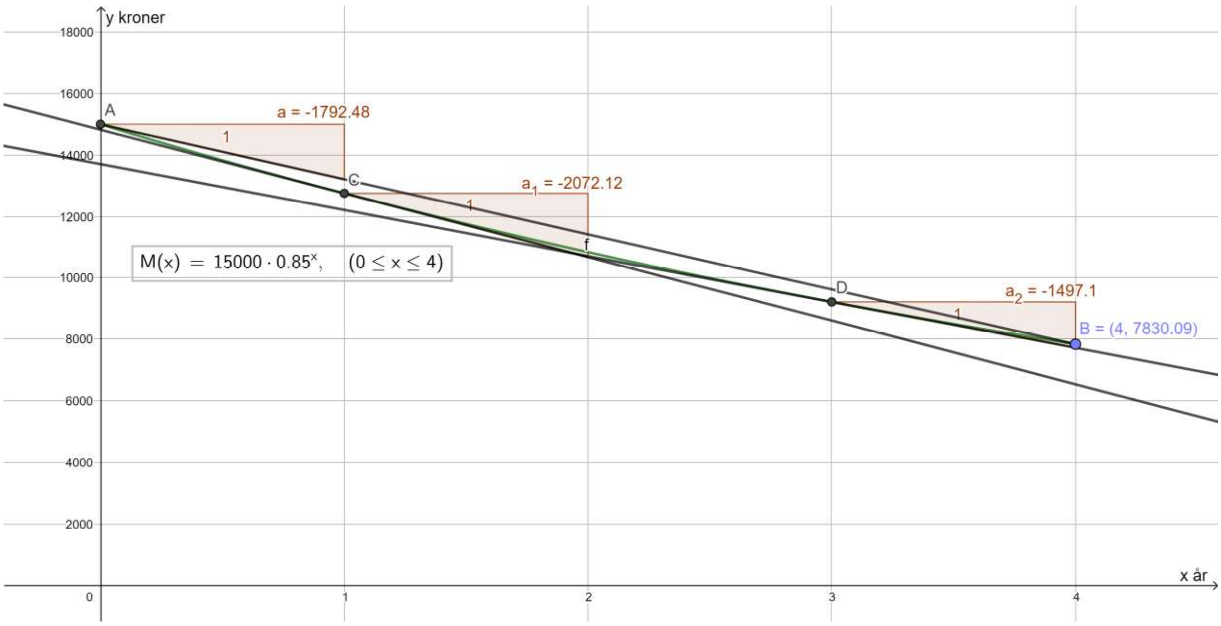
kan brukes til å beregne mopedens **verdi** $M(x)$ kroner x år etter at du kjøpte den.

Hvilken interessant informasjon kan vi finne ved hjelp av **funksjonsuttrykket**?

- **Opprinnelig verdi** er 15000. Dette er summen du kjøper mopeden for.
- **Vekstfaktoren** er 0,85. Dette betyr at mopedens verdi synker med 15 % i året
- $0 \leq x \leq 4$ er **funksjonens** avgrensning. Dette betyr at funksjonen er gyldig for x- verdier mellom 0 og 4.

Ved å tegne **grafen** i GeoGebra, kan vi finne ut at:

- **Punkt** B forteller at forventet salgsverdi om 4 år er omtrent 7 800 kroner. Dette betyr at du må forvente et verditap på omtrent 7 200 kroner på dette kjøpet.
- **Stigningstall** a forteller at mopedens **verd**i i gjennomsnitt synker med omtrent 1 800 kroner per år.
- **Stigningstall** a_1 forteller at etter 1 år synker mopedens **verdi** tilsvarende omtrent 2 072 kr per år.
- **Stigningstall** a_2 forteller at etter 3 år synker mopedens **verd**i tilsvarende omtrent 1 500 kr per år.
- Verditapet per år blir altså lavere jo lenger du har eid mopeden. Dette er en egenskap ved **eksponentielle modeller** med negativ **utvikling**.



Oppgave 27

En familie kjøper en bil.

Funksjonen

$$f(x) = 420000 \cdot 0{,}82^x \quad , \quad 0 \le x \le 8$$

kan brukes til å beregne bilens verdi $f(x)$ kroner x år etter kjøpet av bilen, og frem til familien planlegger å selge bilen.

Bruk funksjonsuttrykket og grafen til å finne interessant informasjon om bilens verdi.

Oppgave 28

Familien kjøpte samtidig en leielighet.

Funksjonen

$$L(x) = 3480000 \cdot 1{,}08^x \quad , \quad 0 \le x \le 15$$

kan brukes til å beregne leilighetens verdi $L(x)$ kroner x år etter kjøpet av leiligheten, og frem til familien planlegger å selge leiligheten.

Bruk funksjonsuttrykket og grafen til å finne interessant informasjon om leilighetens verdi.

Oppgave 29

Funksjonen *N* gitt ved

$$N(x) = 5{,}32 \cdot 10^6 \cdot 1{,}008^x \qquad 0 \leq x \leq 9$$

kan brukes til å regne ut befolkningen *N(*x*)* i Norge *x* år etter 1. januar 2021.

Bruk funksjonsuttrykket og grafen til å finne interessant informasjon om Norges befolkning.

Oppgave 30

Spørsmålet om hvor mange mennesker som kan leve på jorda har vært stilt en rekke ganger.
Funksjonen gitt ved

$$F(x) = 7{,}83 \cdot 10^9 \cdot 1{,}0114^x \quad 0 \leq x \leq 10$$

kan brukes til å beregne folketallet på jorda *x* år etter 1. januar 2021.

Bruk funksjonsuttrykket og grafen til å finne interessant informasjon om verdens folketall.

Oppgave 31

Funksjonen *O* gitt ved

$$O(x) = 1{,}1 \cdot 10^{13} \cdot 1{,}063^x \qquad 0 \leq x \leq 10$$

viser forventet verdi av Statens pensjonsfond utland (Oljefondet) *O(*x*)* for x år etter 1. januar 2021.

Bruk funksjonsuttrykket og grafen til å finne interessant informasjon om Norges fondsformue.

Oppgave 32

En kopp med rykende varm kaffe settes på kjøkkenbenken. Funksjonen

$$T(x) = 93 \cdot 0{,}83^x$$

er en modell som viser temperaturen $T(x)$ grader °C til kaffen, x minutter etter at koppen blir satt på kjøkkenbenken.

Hvilket gyldighetsområde vil du si at modellen kan ha?

Oppgave 32

Funksjonen O gitt ved

$$O(x) = 697000 \cdot 1{,}008^x$$

kan brukes til å beregne folketallet i Oslo x år fremover.

Hvilket gyldighetsområde vil du si at modellen kan ha?

Sammenligne lineære og eksponentielle modeller

Det kan ofte være interessant å analysere en utvikling ved hjelp av ulike modeller. For å avgjøre hvilken av modellene som best beskriver utviklingen må vi sammenligne hva modellene spår med en reell observasjon.

Oppgave 33

Tabellen viser folketallet y i Norge (i millioner) fra 1950 (x = 0) til 2000 (x = 50).

År	1950	1960	1970	1980	1990	2000
x	0					
y folketall i millioner	3,2	3,6	3,9	4,1	4,2	4,5

Finn ved regresjon en lineær modell som passer godt til denne utviklingen. Omtrent hvor mye har folketallet økt per år ifølge denne modellen?

Finn en modell på formen $y = a \cdot b^x$ som passer godt til denne utviklingen. Omtrent hvor mye øker folketallet per år ifølge denne modellen?

Undersøk folketallet i Norge i dag.
Hvilken av modellene passer best med dagens folketall?

Oppgave 34
Lars og Lene forsker på hvordan antallet hoppekreps i et ferskvann endrer seg. Tabellen nedenfor viser antall observerte hoppekreps noen dager i april og mai.

Dato	30. april	3. mai	4. mai	6. mai
Antall hoppekreps	10 000	20 000	30 000	120 000

Ut fra disse observasjonene vil Lars og Lene lage ulike modeller. De lar x være antall dager etter 30. april, og y være antall hoppekreps.

Når Lars lager sin modell, antar han at antallet hoppekreps øker med et fast antall hver dag.

a) Bestem modellen han da får.
Gjør rede for hva hvert av tallene i modellen betyr i denne praktiske situasjonen.

Når Lene lager sin modell, antar hun at antallet hoppekreps øker med en fast prosent hver dag.

b) Bestem modellen hun da får.
Gjør rede for hva hvert av tallene i modellen betyr i denne praktiske situasjonen.

9. mai ble det registrert omtrent 150 000 hoppekreps i ferskvannet.

c) Avgjør om utviklingen i antall hoppekreps passer best med modellen du lagde i a) eller modellen du lagde i b)

Polynomisk utvikling: $y = ax^2 + bx + c$

Felles for **lineær** og **eksponentiell utvikling** er at **utviklingen** enten er positiv eller negativ. Dersom vi skal beskrive **utvikling** som både er positiv og negativ, må vi bruke **polynomiske modeller**.

Ordet **poly** betyr flere, og en **polynofunksjon** består av flere **ledd**. En **polynomfunksjon** inneholder **variabler** med ulike eksponenter, og den høyeste eksponenten bestemmer graden.

Et **tredjegradspolynom** inneholder et **ledd** med x^3 som høyeste eksponent.

Et **andregradspolynom** inneholder et **ledd** med x^2 som høyeste eksponent.

Du velger polynom her

og grad her

Høyest eller lavest verdi – ekstremalpunkt

En utvikling som både stiger og synker vil ha en lavest og en høyest **funksjonsverdi**. Dette kan vi enten finne i ett av **endepunktene** til **grafen**, eller ved å bruke «Ekstremalpunkt».

Ved å velge «Ekstremalpunkt» ber vi GeoGebra finne x- og y- **verdier** der den **momentane vekstfarten** er null. Det er kanskje enklere å tenke at vi ber GeoGebra finne x- og y- **verdier** der **grafen** snur.

Du finner «snupunktene» ved å velge «Ekstremalpunkt» her:

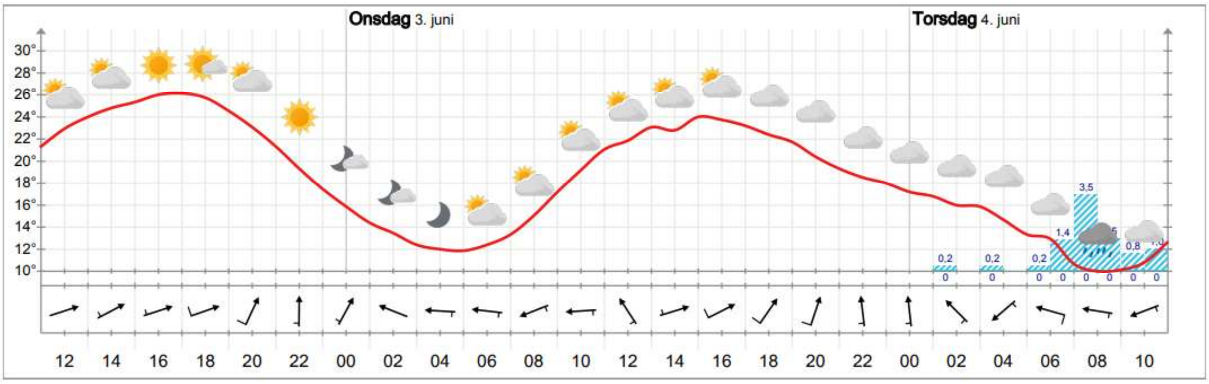
Deretter trykker du hvor som helst på grafen.

Oppgave 35

Yr.no har følgende prognose for temperaturen på Hellerud onsdag 3. juni:

Klokkeslett	**0**	**2**	**3**	**5**	**8**	**10**	**11**	**14**	**15**	**17**	**20**	**21**	**22**	**23**
Temperatur	16	13	12	12	15	19	21	23	24	23	20	19	18	18

I tillegg bruker nettsiden følgende linjediagram for å vise den forventet temperatur samme dag:



Legg informasjonen i tabellen inn som punkter i GeoGebra, og velg en modell med en graf som ligner på linjediagrammet ovenfor.

Finn høyest og lavest temperatur onsdag 3. juni.

Presentasjonsoppgave

Tabellen nedenfor viser det månedlige strømforbruket til en enebolig i Oslo i 2019.

Måned	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
kWh	2800	2230	2360	1420	1410	1190	720	1070	1180	1800	2430	2520

I tillegg får du vite at den gjennomsnittlige strømprisen i 2019 var 112,6 øre/kWh.

Bruk informasjonen over til å finne interessant informasjon om strømforbruket til boligen.

En eksamensoppgave

I denne oppgaven skal vi bruke funksjonen S gitt ved

$$S(x) = -3x^4 + 305x^3 - 9000x^2 + 66000x + 495000 \quad , \quad 0 \leq x \leq 50$$

som en modell for seibestanden $S(x)$ tonn i Arktis x år etter 1960.

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til S.

b) I hvor mange år var seibestanden lavere enn 450 000 tonn?

c) Hvor mange tonn steg seibestanden i gjennomsnitt med per år fra den var på sitt laveste, til den var på sitt høyeste?

d) Bestem den momentane vekstfarten til S i 1970.
Gi en praktisk tolkning av svaret.

En eksamensoppgave

Anta at funksjonen A gitt ved

$$A(x) = 0{,}002x^4 - 0{,}13x^3 + 2{,}75x^2 - 18x + 118 \quad , \quad 0 \leq x \leq 30$$

kan brukes som en modell som viser verdien $A(x)$ kroner av en aksje x uker etter 01.01.2017.

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til A.

b) I hvor mange uker var verdien av aksjen lavere enn 92 kroner?

c) Bestem forskjellen mellom laveste og høyeste verdi av aksjen de 30 første ukene av 2017.

d) Hvor mye steg aksjen i verdi i gjennomsnitt per uke de 30 første ukene i 2017?

e) Bestem den momentane vekstfarten til funksjonen A når $x = 22$.
Gi en praktisk tolkning av dette svaret.

En eksamensoppgave

Et firma produserer vanntanker. Carl har undersøkt en av tankene og funnet ut at dersom tanken er full og kranen åpnes, vil det etter x minutter være $V(x)$ liter vann igjen i tanken, der

$$V(x) = (10 - 0{,}1x^2)^3 \quad , \quad 0 \le x \le 10$$

a) Bestem $V(0)$, og gi en praktisk tolkning av svaret du får.

b) Bruk graftegner til å tegne grafen til V.

c) Hvor lang tid går det fra kranen åpnes, til det er 400 L vann igjen i tanken?

d) Hvor mye vann renner i gjennomsnitt ut av tanken per minutt mens den tømmes?

e) Bestem den momentane vekstfarten til funksjonen V når $x = 3$.
Gi en praktisk tolkning av svaret du får.

En eksamensoppgave

Kari tapper ut vannet av en badestamp. Volumet V liter av vannet i badestampen x minutter etter at hun har åpnet kranen, er gitt ved

$$V(x) = 2 \cdot (30 - x)^2 \quad , \quad 0 \le x \le 30$$

a) Tegn grafen til V.

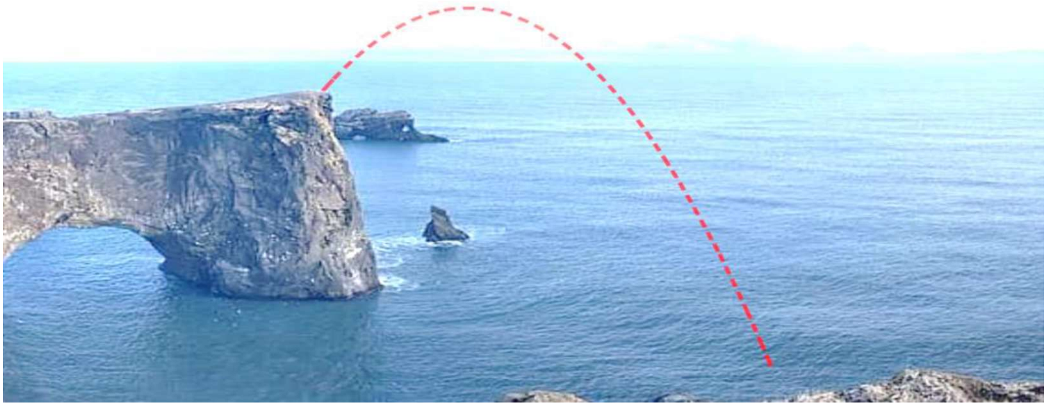
b) Hvor lang tar det ta å tappe ut halvparten av vannet?

c) Hvor mye vann renner i gjennomsnitt ut per minutt fra Kari åpner kranen, til badestampen er tom?

d) Bestem den momentane vekstfarten til funksjonen V når $x = 15$.
Gi en praktisk tolkning av svaret.

Presentasjonsoppgave

Tenk deg at du står på en klippe ved vannet, og kaster en stein ut i vannet. Steinen vil følge en kurve som tegnet nedenfor:



Steinens kurve kan beskrives ved hjelp av følgende funksjonsuttrykk:

$$H(x) = -5x^2 + 10x + 25$$

hvor x er antall sekunder som har gått siden steinen ble kastet, og H er steinens høyde over havoverflaten.

Bruk informasjonen ovenfor til å finne interessant informasjon om steines bevegelse gjennom lufta. Hvilket gyldighetsområde vil du si modellen kan ha?

En eksamensoppgave

Funksjonen h gitt ved

$$h(x) = -0{,}0005x^3 + 0{,}04x^2$$

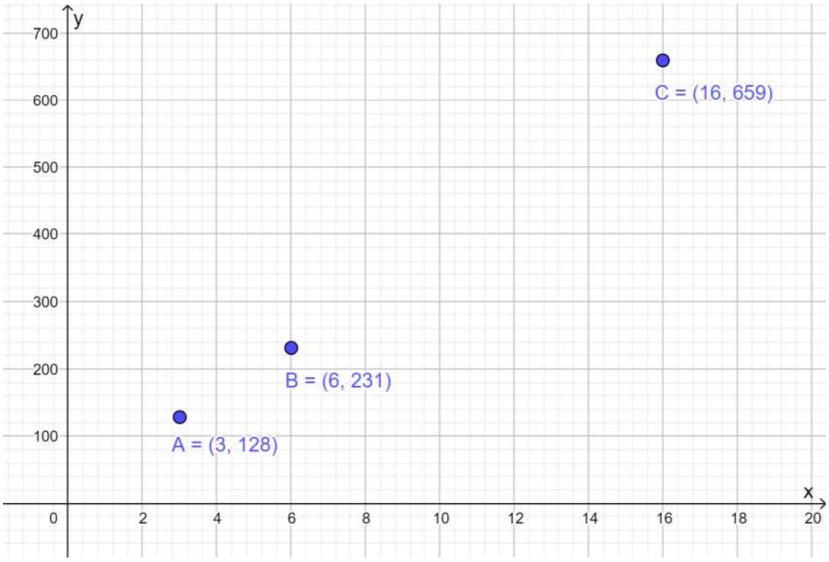
er en modell som viser høyden $h(x)$ cm til en plante, x dager etter at planten begynte å spire.

a) Hva viser modellen om plantens vekst?

b) Hvilket gyldighetsområde vil du si modellen kan ha?

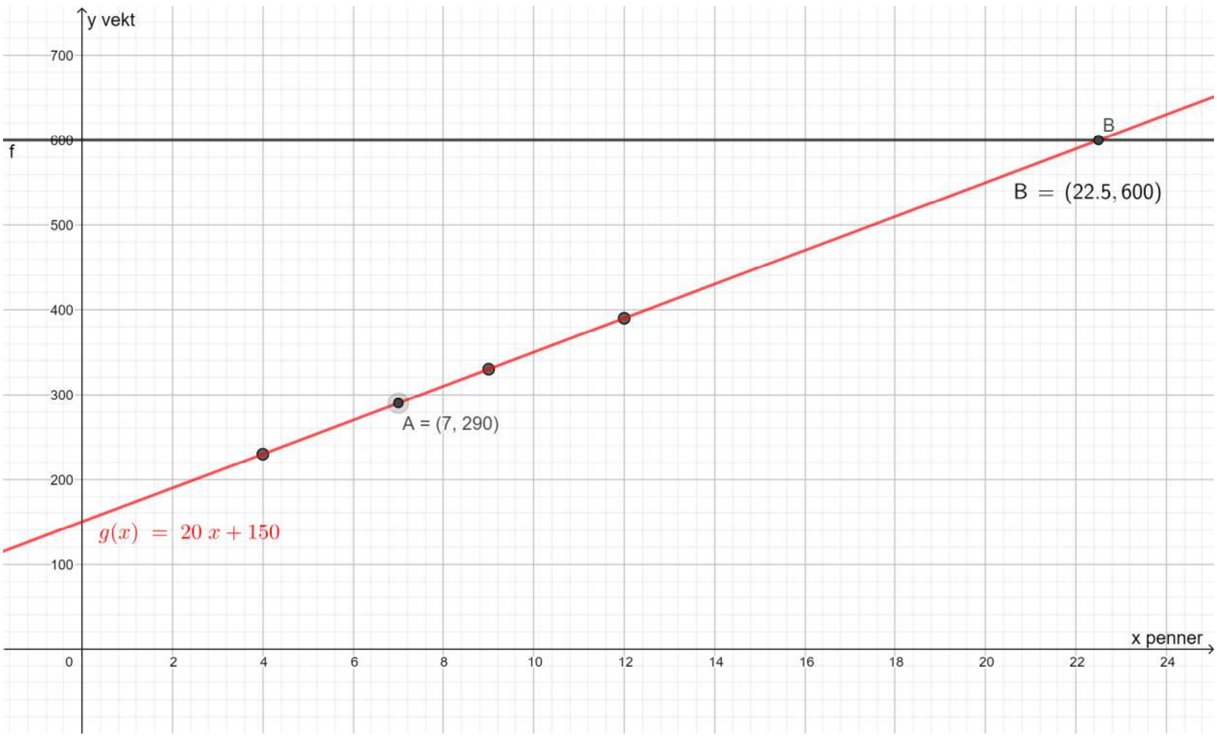
Løsningsforslag

Oppgave 1



Oppgave 2

Det er en lineær modell fordi vekten øker med like mye for hver penn som legges i koppen for $x \in [0,20]$, hvor x er antall penner.
Funksjonsuttrykket forteller at hver penn veier 20 gram, mens koppen veier 150 gram.
Punkt A forteller at 7 penner + koppen veier 290 gram.
Punkt B forteller at 600 gram ligger utenfor definisjonsmengden til denne funksjonen.



Oppgave 3

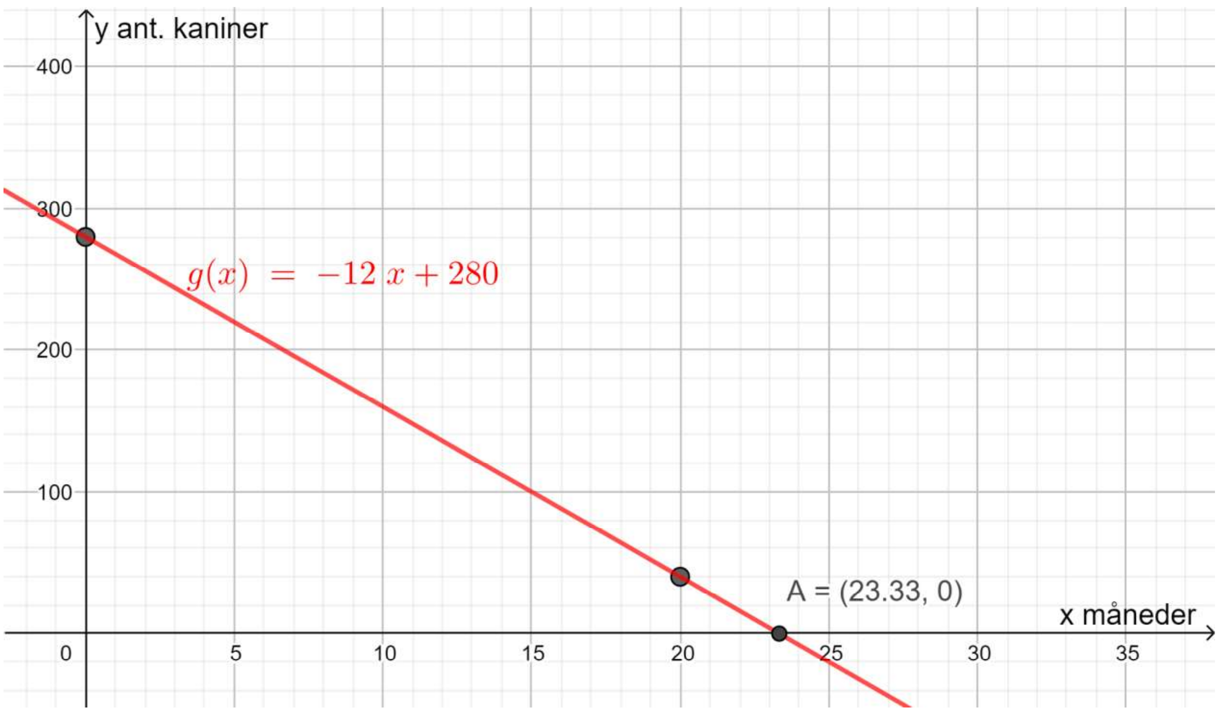
Funksjonsuttrykket forteller at det var 605 elever ved skolens oppstart, og at elevtallet øker med 15 elever per år.
Etter 10 år vil det være 755 elever ved skolen, ifølge modellen. Dette stemmer ganske bra med det reelle antallet, og modellen kan derfor vurderes som gyldig i 10 år fremover.

$y = 15\,x + 605$

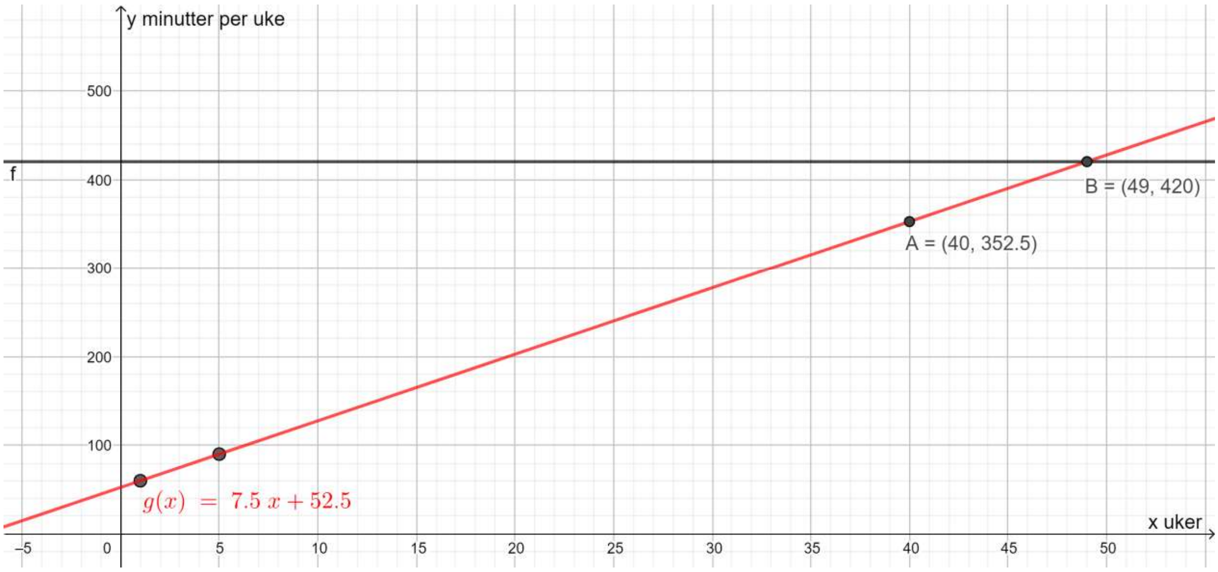
Symbolsk utregning: $x =$ 10 $y =$ 755

Oppgave 4

Funksjonsuttrykket forteller at antall kaniner synker med 12 for hver måned.
Modellen er nok ikke gyldig etter måned 20. Modellen viser at det vil være et negativt antall kaniner i området etter 23 måneder, noe som ikke er mulig. Dessuten er det rimelig å anta at antall kaniner vil øke når sykdommen avtar.



Oppgave 5
a) Liv må øke treningen med 7,5 minutter per uke for å nå dette målet.
b) I uke 40 må hun trene 352,5 minutter, som tilsvarer 5 timer 52 minutter og 30 sekunder.
c) Det er vanskelig å sette en begrensning for Liv, men noe særlig mer enn 1 time hver dag/7 timer i uka er lite trolig at hun klarer. Vi tror derfor at modellen er gyldig for $x \in [0{,}49]$



Oppgave 6
Modellen forteller at ungdommen får 250 kroner for oppmøtet, og 80 kroner per time. Antall timer og lønn er ikke proporsjonale størrelser, i og med at ungdommen får 250 kroner for oppmøtet.

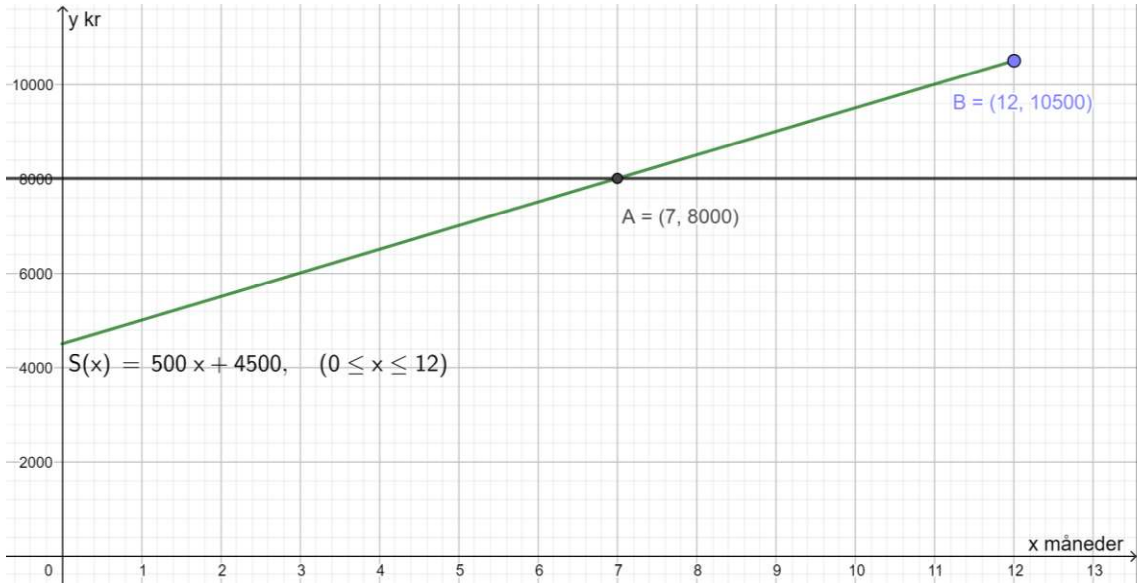
$$y = 80\,x + 250$$

Oppgave 7
$f(x) = 80000x + 1200000$

Oppgave 8
Skrev inn punktene (0,8500) og (5,6000), som ga modellen $y = -500x + 8500$. Dette betyr at antallet individer av denne dyrearten synker med 500 per år.

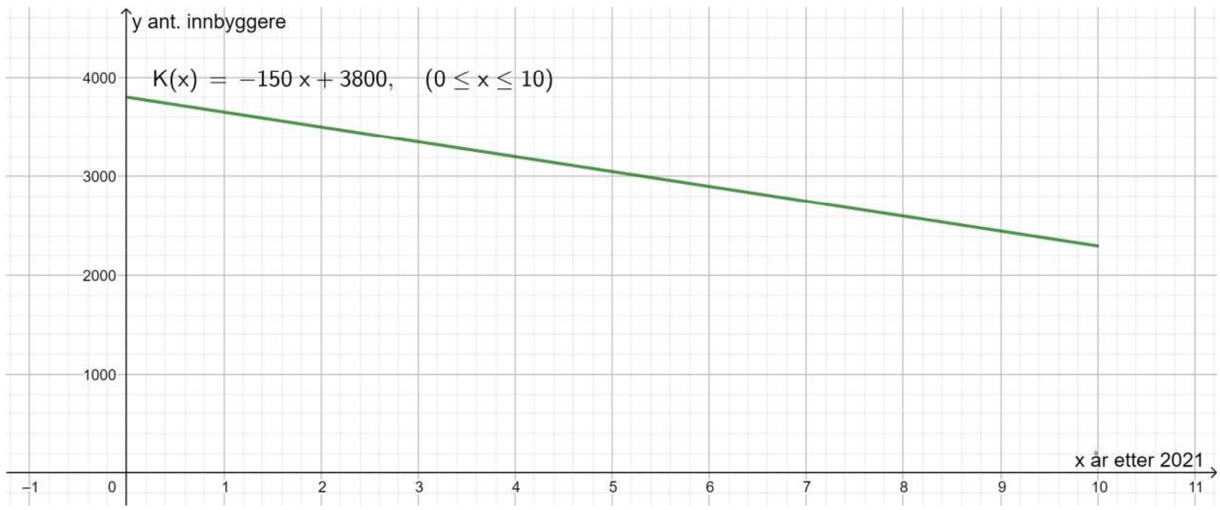
Oppgave 9

Funksjonsuttrykket forteller at Mathias har 4 500 kroner på sparekontoen når han begynner å spare, og at han sparer 500 kroner per måned.
Punkt A forteller at det tar 7 måneder før sparekontoen passerer 8 000 kroner, mens punkt B forteller at han har 10 500 kroner på kontoen etter å ha spart i ett år.



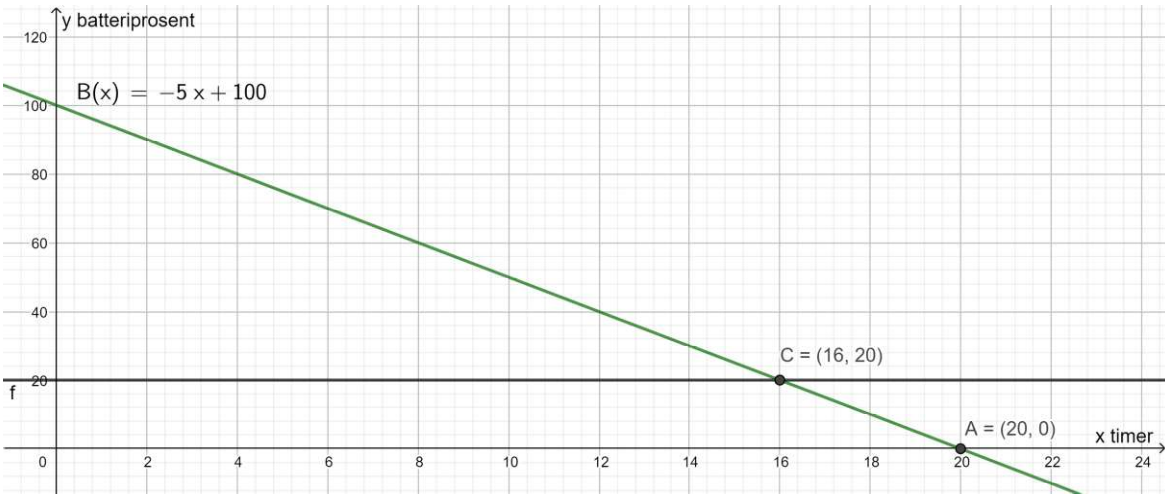
Oppgave 10

Funksjonsuttrykket forteller at det var 3 800 innbyggere i 2021, og at innbyggertallet synker med 150 per år.

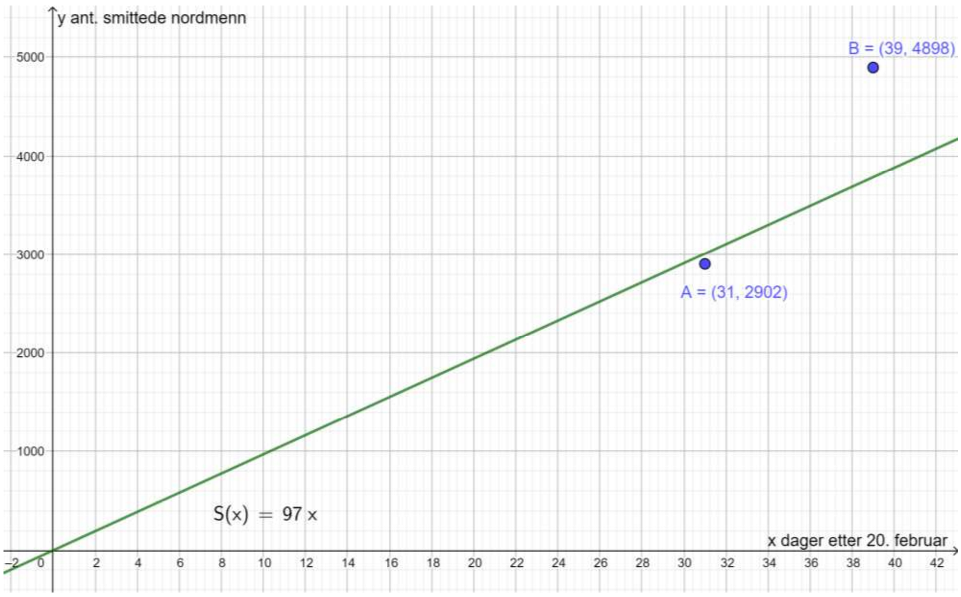


Oppgave 11

Funksjonsuttrykket forteller at batterinivået synker med 5 prosentpoeng per time ved normal bruk. Modellen er i beste fall gyldig frem til telefonen er tom for strøm, som ifølge modellen inntreffer etter 20 timer.
Imidlertid har de fleste telefoner en innstilling som gjør at strømforbruket reduseres når batterinivået er lavere enn 20 %. Det betyr at modellen kun er gyldig frem til punkt B, altså 16 timer. Vi vurderer derfor funksjonen til å være gyldig for $x \in [0,16]$



Oppgave 12
Ifølge modellen er antall dager og antall smittede proporsjonale størrelser, og antall smittede øker med 97 per dag.
Modellen stemmer relativt bra med punkt A, men kan ikke brukes til å forklare utviklingen etter 31 dager. Antall smittede nordmenn økte derfor ikke lineært i denne perioden, og vi må derfor bruke en annen modell for å beskrive utviklingen i antall smittede etter 22. mars.



Eksamensoppgave side 119
Jacob tjener $(0{,}075 \cdot 150000 + 32\,000 =)$ 43 250 kroner denne måneden.

Eksamensoppgave side 119
Sarah må selge 20 bøker for at timelønna skal bli 450 kroner

$y = 15\,x + 150$

Symbolsk utregning: x = 20 y = 450

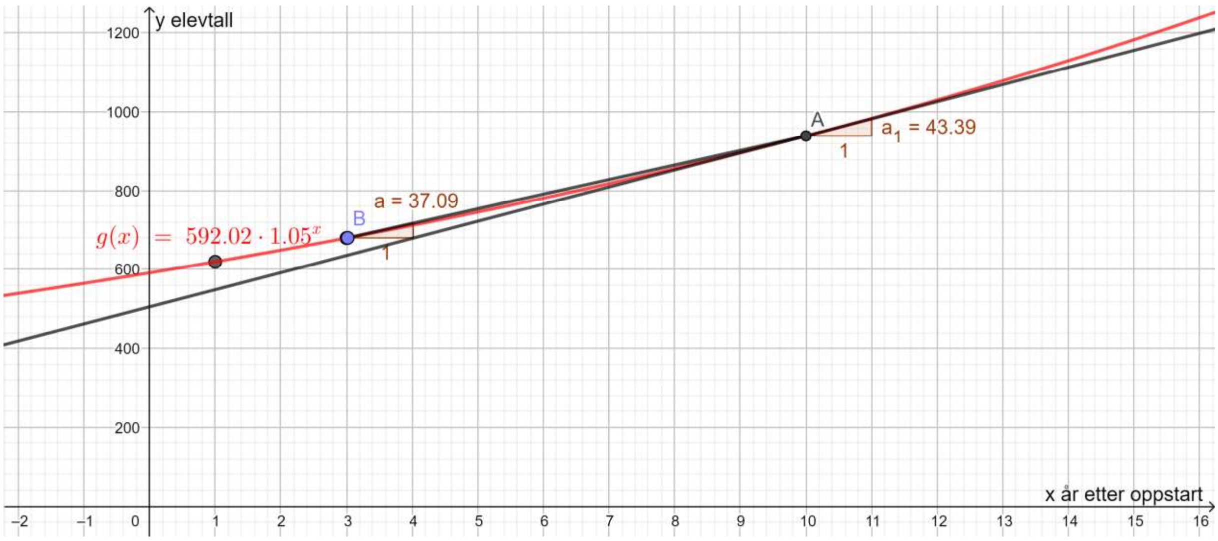
Oppgave 13

-7 %	=	93 %	=	0,93	- 2,2 %	=	97,8 %	=	0,978
+ 7 %	=	107 %	=	1,07	+ 0,4 %	=	100,4 %	=	1,004
- 7,5 %	=	92,5 %	=	0,925	- 17,5 %	=	82,5 %	=	0,825
+ 12,3%	=	112,3 %	=	1,1123	+ 200 %	=	300 %	=	3
+ 20 %	=	120 %	=	1,2	+ 250 %	=	350 %	=	3,5
- 10 %	=	90 %	=	0,9	- 100 %	=	0 %	=	0
- 13 %	=	87 %	=	0,87	- 1,2 %	=	98,8 %	=	0,988
+ 40 %	=	140 %	=	1,4	+ 0,7 %	=	100,7 %	=	1,007
+ 100 %	=	200 %	=	2	+ 0,2 %	=	100,2 %	=	1,002
- 30 %	=	70 %	=	0,7	- 25 %	=	75 %	=	0,75

Oppgave 14

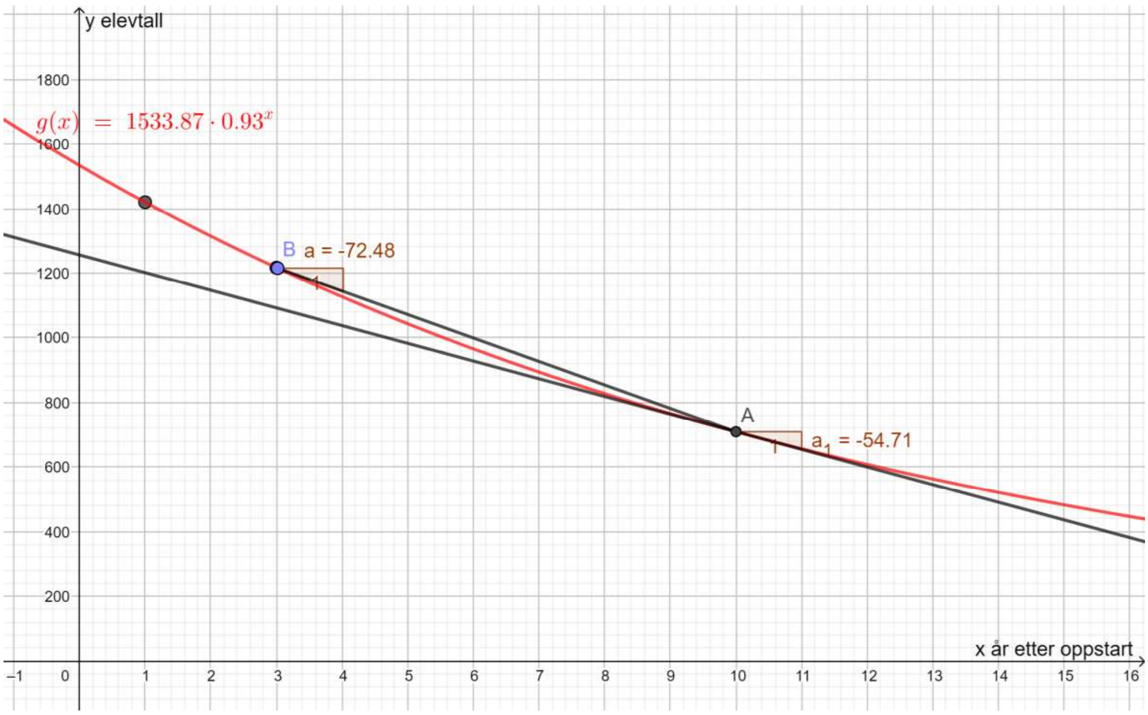
Oppgave	Svar	Oppgave	Svar
14	2 817 500 kr	**20**	11 592,74 kr
15	9 600 kr	**21**	3 100 kr
16	166,88 kr/time	**22**	135,54 kr
17	66,10 kr	**23**	76 °C
18	4,5 millioner kroner	**24**	Knut betalte 320 000 kr for bilen, han antar at bilens verdi synker med 15 % hvert år, og han skal selge bilen etter 5 år for omtrent 142 000 kroner.
19	a) 15 000 betyr kjøpesummen, mens 1,05 betyr en verdiøkning på 5 % b) 140 betyr antall elever ved skolestart mens 0,875 betyr at 12,5 % har sluttet		

Oppgave 25
Vekstfaktoren 1,05 forteller at antall elever øker med 5 % hvert år.
Fra år 3 til år 10 øker antall elever med 37 i gjennomsnitt per år. I år 10 øker antall elever tilsvarende 43 elever per år.



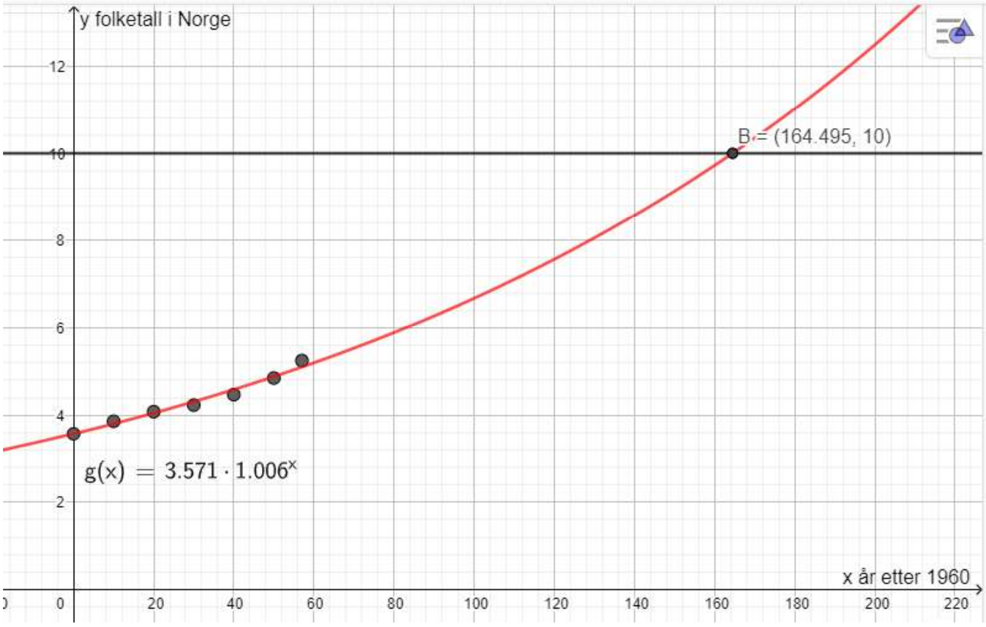
Oppgave 26

Vekstfaktoren 0,93 forteller at antall elever synker med 7 % hvert år.
Fra år 3 til år 10 synker antall elever med 72 i gjennomsnitt per år. I år 10 synker antall elever tilsvarende 55 elever per år.



Eksamensoppgave side 132

a) Har vist ved regresjon at modellen passer godt med tallene i tabellen.
b) 1,006 er en vekstfaktor, som forteller at folketallet i Norge øker med 0,6 % per år
c) Folketallet i Norge vil passere 10 millioner etter 164 år, som betyr i år 2124.



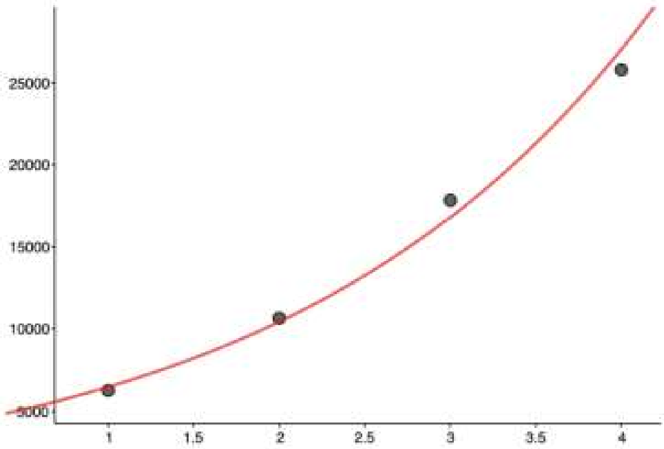
	A	B
1	0	3.57
2	10	3.86
3	20	4.08
4	30	4.23
5	40	4.47
6	50	4.85
7	57	5.25
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		

Eksamensoppgave side 132

	A	B
1	1	6278
2	2	10660
3	3	17837
4	4	25761

X: A1:A4

Y: B1:B4



Regresjonsmodell

$y = 4038.4858 \cdot 1.608^x$

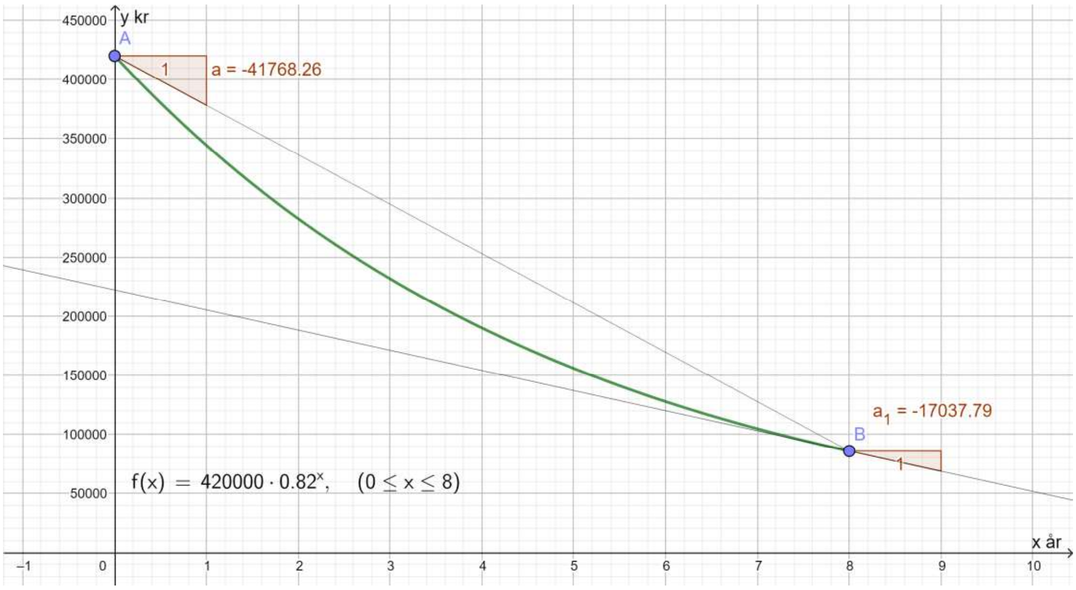
Eksponentiell

b) Jeg ser at vekstfaktoren er 1,608.
Det betyr at antall registrert smittede økte med 60,8 % per måned.

Oppgave 27

Funksjonsuttrykket forteller at familien betalte 420 000 kroner for bilen, og at bilens verdi synker med 18 % per år.

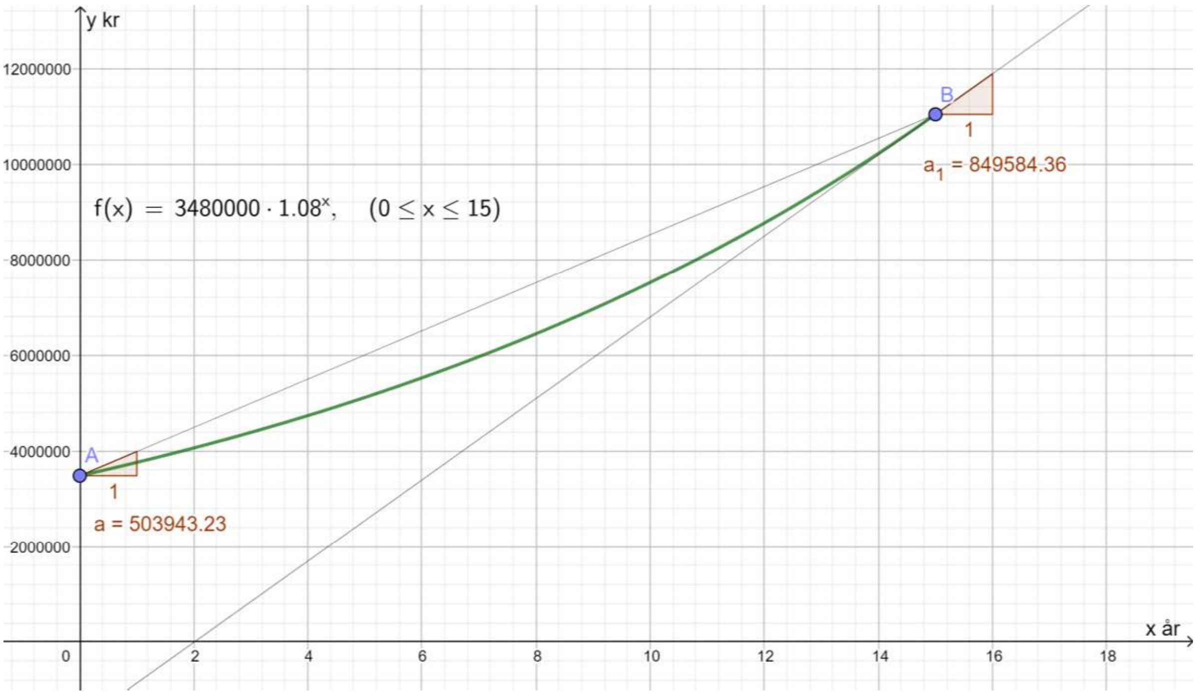
Vi valgte å analysere grafens endepunkter. I gjennomsnitt synker bilens verdi med omtrent 41 800 kroner per år i disse 8 årene. I år 8 synker bilens verdi tilsvarende 17 000 kroner per år.



Oppgave 28

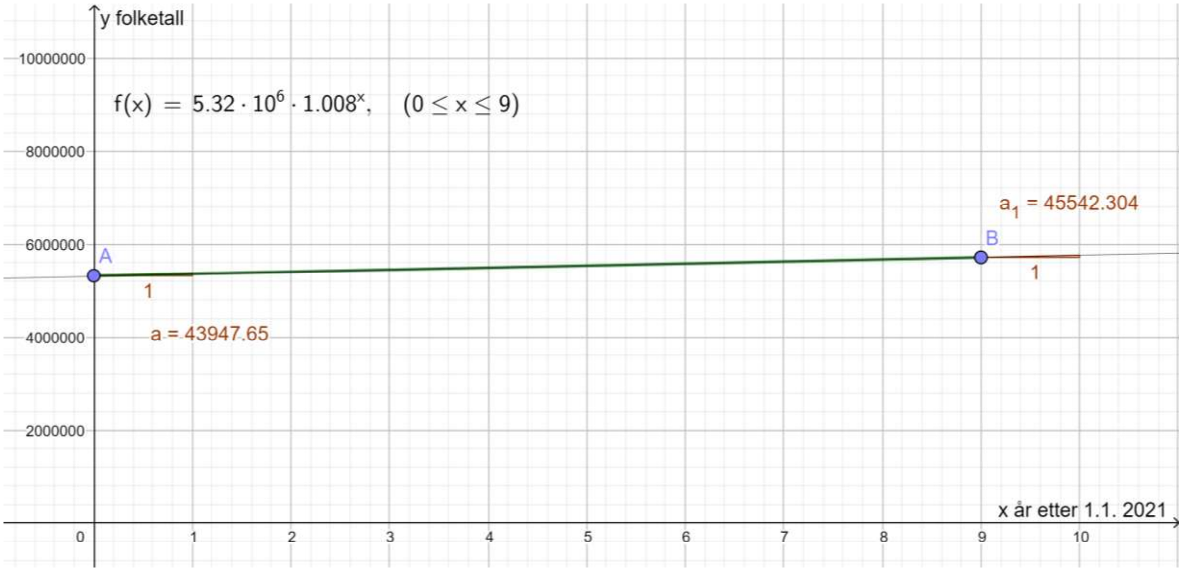
Funksjonsuttrykket forteller at familien betalte 3 480 000 kroner for leiligheten, og at leilighetens verdi øker med 8 % per år.

Vi valgte å analysere grafens endepunkter. I gjennomsnitt øker leilighetens verdi med omtrent 500 000 kroner per år i disse 15 årene. I år 15 øker leilighetens verdi tilsvarende 850 000 kroner per år.



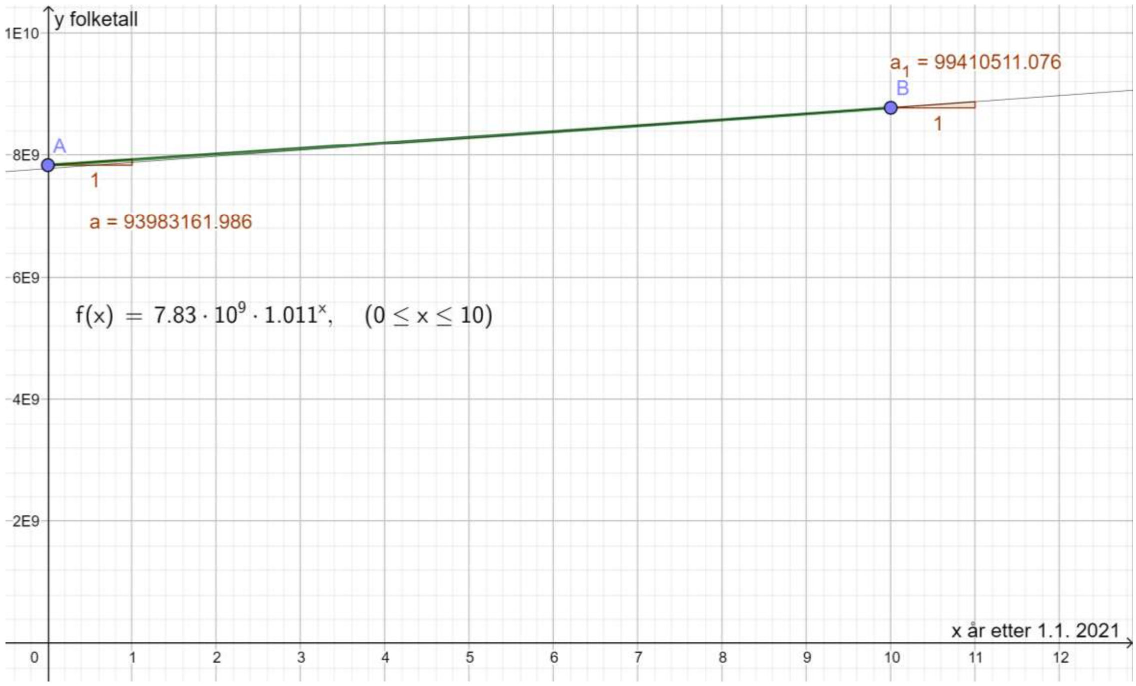
Oppgave 29
Funksjonsuttrykket forteller at folketallet i Norge ved inngangen til 2021 er 5,32 millioner og at folketallet øker med 0,8 % per år.

Vi valgte å analysere grafens endepunkter. I gjennomsnitt øker folketallet med omtrent 44 000 per år i disse 9 årene. I år 9 øker folketallet tilsvarende 45 542 per år.



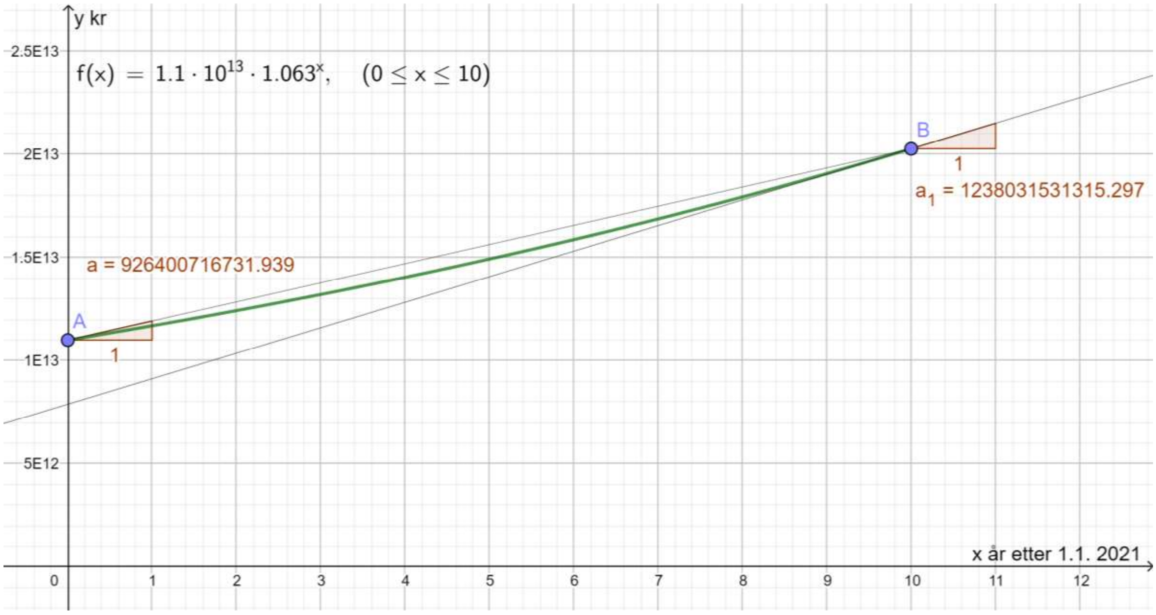
Oppgave 30
Funksjonsuttrykket forteller at folketallet i verden ved inngangen til 2021 er 7,83 milliarder og at folketallet øker med 1,14 % per år.

Vi valgte å analysere grafens endepunkter. I gjennomsnitt øker folketallet med omtrent 94 millioner per år i disse 10 årene. I år 10 øker folketallet tilsvarende omtrent 100 millioner per år.



Oppgave 31
Funksjonsuttrykket forteller at verdien til Oljefondet inngangen til 2021 er på svimlende 11 000 milliarder kroner, og at verdien til Oljefondet øker med 6,3 % per år..

Vi valgte å analysere grafens endepunkter. I gjennomsnitt øker verdien til Oljefondet med omtrent 900 milliarder per år i disse 10 årene. I år 10 øker verdien til Oljefondet tilsvarende omtrent 1 200 milliarder per år



Oppgave 32

Kaffens temperatur vil ikke kunne synke under romtemperatur. Dersom vi antar at denne er 20 ℃, vil kaffen nå denne temperaturen etter omtrent 8 minutter. Det vil si at modellens gyldighetsområde er for $x \in [0,8]$

Oppgave 33
SSB spår følgende om antall innbyggere i Oslo i to utvalgte år:

Kilde: https://www.ssb.no/kommunefakta/oslo

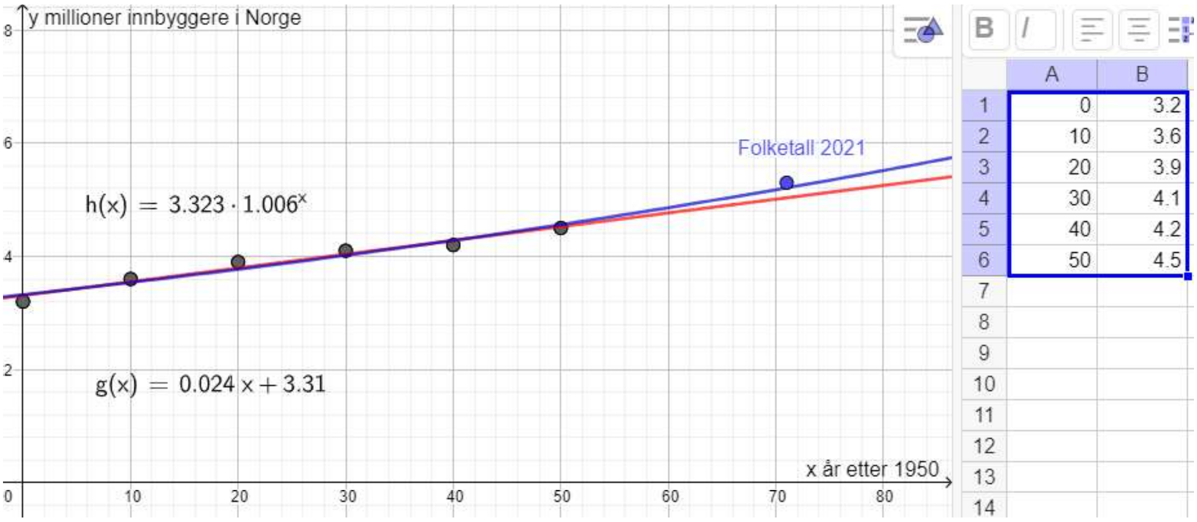
Sammenlignet med disse tallene er modellen troverdig frem til 2030, men viser for høyt folketall i 2050. Det betyr at modellen vil bli upålitelig etter 2030.

Oppgave 33

En lineær modell som beskriver utviklingen: $0{,}024x + 3{,}31$. Denne modellen forteller at antall innbyggere i Norge øker med 24 000 per år.

En eksponentiell modell som beskriver utviklingen: $3{,}323 \cdot 1{,}006^x$. Denne modellen forteller at antall innbyggere i Norge øker med 0,6 % per år.

Sammenlignet med dagens folketall fremstår befolkningsutviklingen å være eksponentiell.

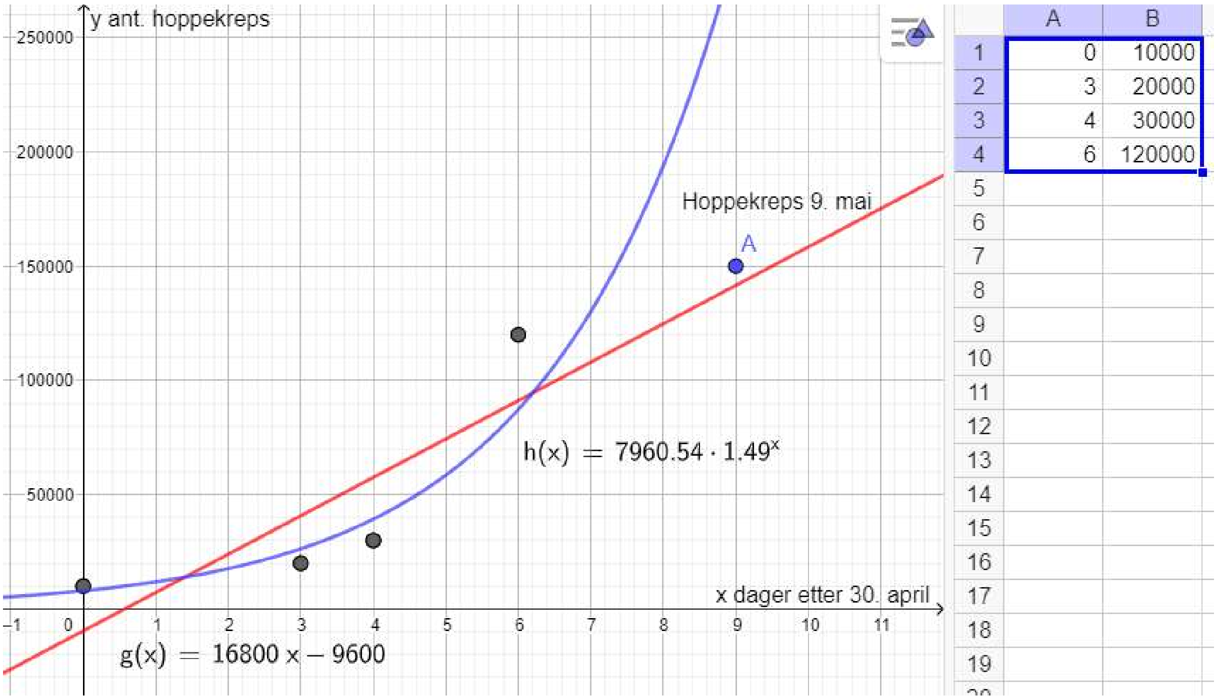


Oppgave 34

Ifølge Lars øker antall hoppekreps med 16 800 per dag.

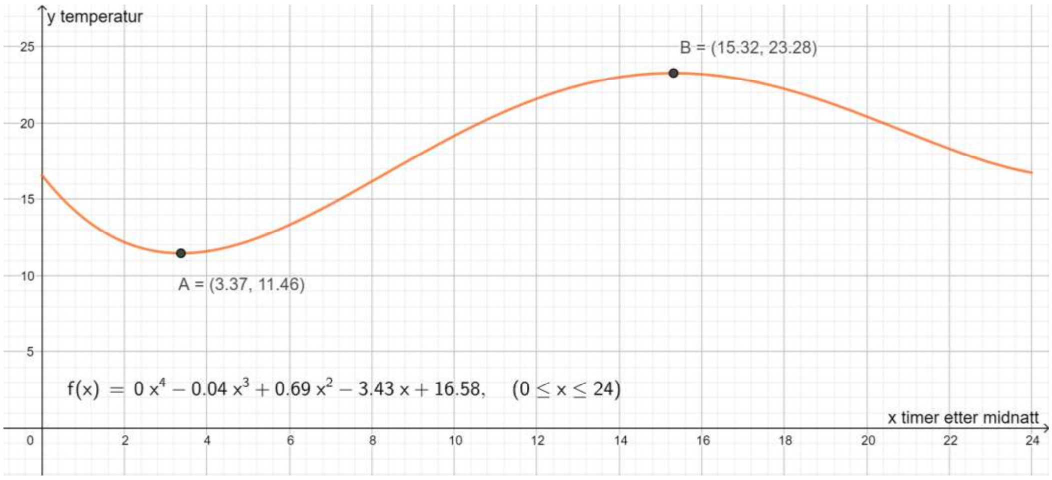
Ifølge Lene øker antall hoppekreps med 49 % per dag.

Sammenlignet med antall hoppekreps 9. mai kan det kan virke som om utviklingen i antall hoppekreps bør beskrives lineært.



Oppgave 35

Vi valgte å bruke en polynommodell av 4. grad for å beskrive utviklingen i temperatur. Ifølge modellen vil høyeste temperatur være 23,3 ℃, og laveste temperatur vil være 11,5 ℃.



Eksamensoppgave side 141

b)

I ca. 25 år, fra 1972 til 1997. Se graf i a.

c)

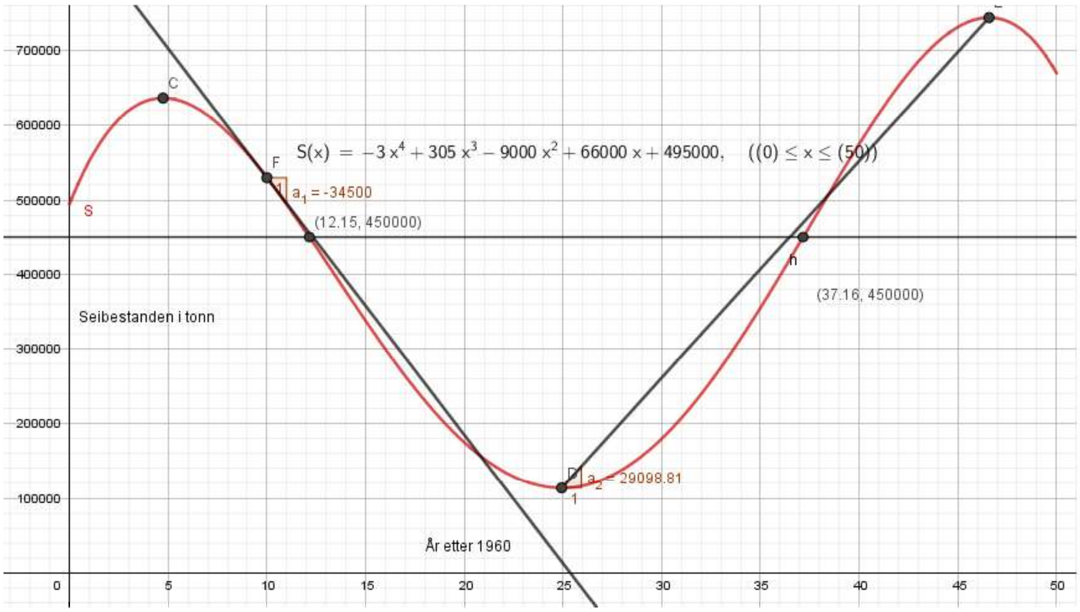
Den øker i gjennomsnitt med 20 100 tonn per år.

Laget et linjestykke fra minste til største verdi og fant stigningstallet til denne rette linjen. Det er det samme som den gjennomsnittlige veksten i perioden.

d)

Med momentan menes i øyeblikket, altså forandringen i 1970. Den momentane veksten er negativ, -34 500 tonn per år (i 1970). Det betyr at i løpet av året 1970 blir det 34 500 tonn **mindre** sei i Arktis. Når vi snakker om vekst er det fort å tenke at noen eller noe blir flere, men når veksten er negativ blir det mindre.

Laget en tangent til grafen i x=10, som tilsvarer år 1970. Fant stigningen til tangenten, som tilsvarer grafens momentane vekst. Legg merke til forskjellen fra oppgave c der man fant gjennomsnittet.



Eksamensoppgave side 141

b)

Verdien var lavere enn 92 kroner i ca. 6 uker, fra slutten av uke to til starten av uke ni.

c)

Verdien varierte mellom 81,6 kroner og 163 kroner. Forskjellen var 81, 4 kroner.

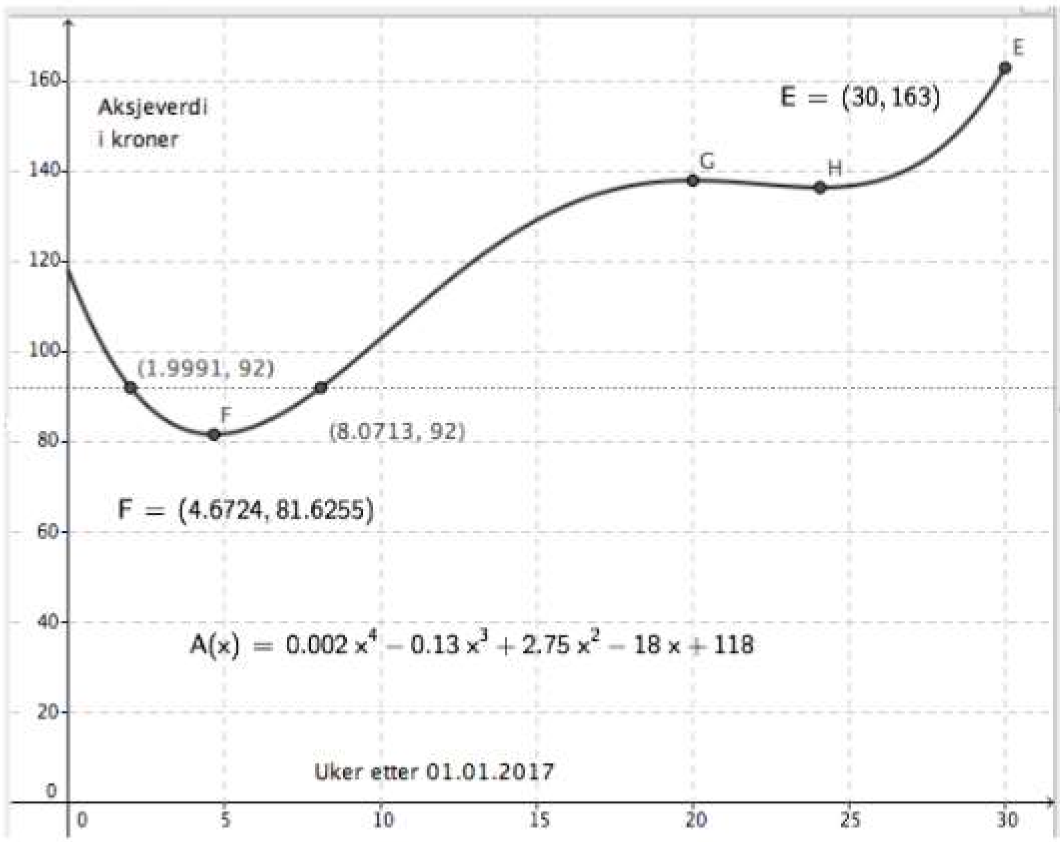
d)

163 - 118 = 45

Aksjen steg med 45 kroner denne perioden. Gjennomsnittlig vekst per uke blir $\frac{45\,kr}{30\,uker} = 1,5$ kroner/uke.

e)

Dag nr. 154 $(22 \cdot 7)$ i 2017 avtar verdien av aksjen med 0,58 kroner.



Eksamensoppgave side 142

a)

$$V(x) = (10 - 0,1x^2)^3 \quad 0 \leq x \leq 10$$

$$V(0) = 10^3 = 1000$$

Tanken rommer 1000 liter.

c)

Fra figuren i b ser man at det tar 5,13 minutter i desimal tid. Vi gjør 0,13 om til sekunder:

$$\frac{13}{100} = \frac{x}{60}$$
$$x = 7,8$$

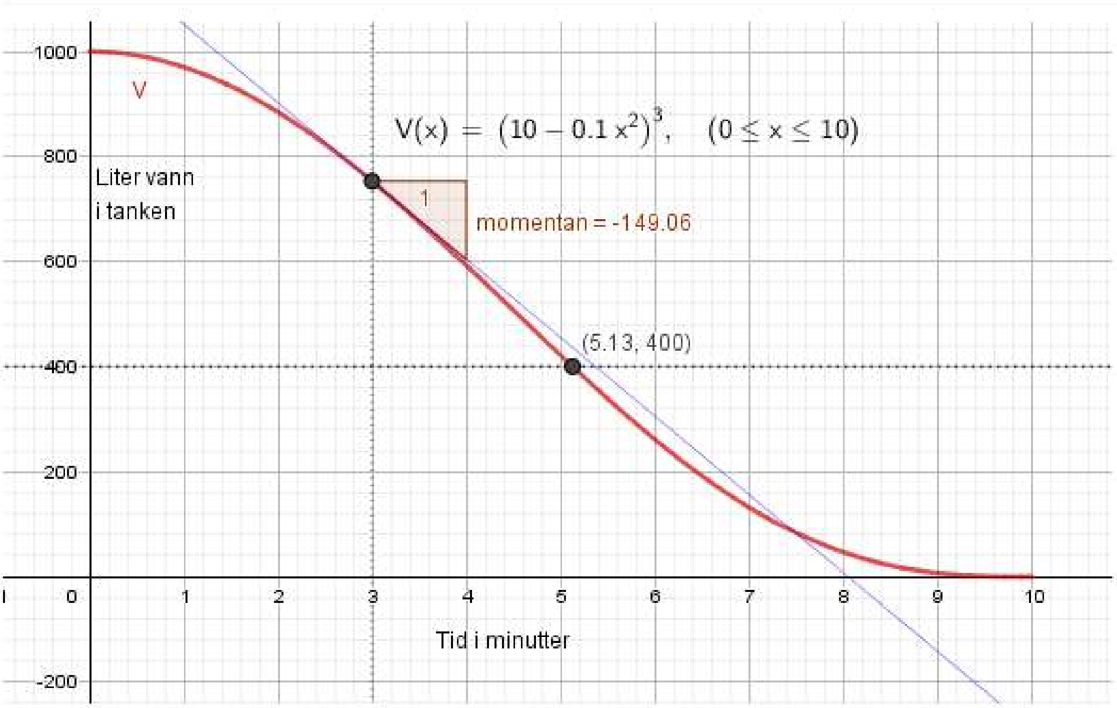
Det tar 5 minutter og 8 sekunder før det er 400 liter igjen i tanken.

d)

1000 liter tømmes på 10 minutter. Det blir i gjennomsnitt 1000 liter/ 10 min som er 100 L/min.

e)

Se figuren i b: Lag linjen x=3 og finn skjæring med grafen. I punktet lager man tangenten til grafen. Stigningen til tangenten i punktet er den momentane veksten for x =3. Den er - 149. Det betyr at akkurat når det har gått 3 minutter tømmes tanken med en fart på 149 L/min.

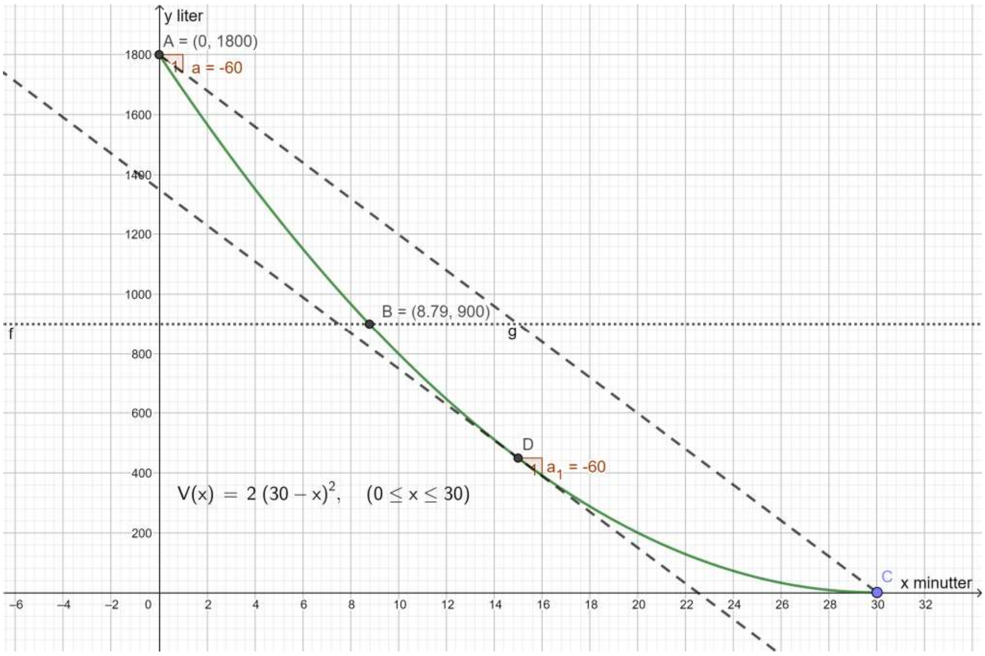


Eksamensoppgave side 142

b) Finner først ut at tanken inneholder 1 800 liter vann. Halvparten av dette er 900 liter. Det tar 8,79 minutter å tømme halvparten av tanken. Det er det samme som 8 minutter 47 sekunder og 4 tideler.

c) Det renner i gjennomsnitt 60 liter vann per minutt fra Kari åpner kranen til tanken er tom.

d) Den momentane vekstfarten til V når $x = 15$ er -60. Det betyr at etter 15 minutter synker vannstanden i tanken tilsvarende 60 liter per minutt.



Eksamensoppgave side 143

Jeg finner toppunktet (53, 38) ved å bruke kommandoen «ekstremalpunkt». Ifølge modellen vokser planten i omtrent 53 dager etter at den begynner å spire. Etter 53 dager er den ca. 38 centimeter høy.

I starten øker veksten for hver dag. Etter omtrent 20 dager må veksten være tilnærmet konstant, siden grafen er tilnærmet lik en rett linje. Fra dag 40 begynner veksten å avta.

Etter dag 53 viser modellen at planten vil bli lavere og lavere helt fram til dag 80 etter at den begynte å spire.

b) Modellen viser at planten er på sitt høyeste etter 53 dager etter at den begynte å spire. Det vil være naturlig at den holder denne høyden i en tidsperiode før den eventuelt visner og dør.

Jeg vil si at modellen er gyldig i omtrent er gyldig i omtrent 53 dager, altså til $x = 53$. Etter 53 dager mener jeg modellen ikke viser hvordan det går med planten.