Velkommen

Velkommen til Hellerud videregående skole, og gratulerer med valg av skole!

Læring består av to parter; en som ønsker å lære bort og en som ønsker å lære. Her på Hellerud vil du møte topp motiverte lærere som ønsker å hjelpe deg gjennom dette skoleåret slik at du kan få best mulig utbytte av undervisningen.

Imidlertid kan ingen av oss trylle. Skal vi kunne hjelpe deg til å oppnå best mulig resultat er det fire krav du må oppfylle. Du må:

- Møte til undervisning
- Møte presist
- Møte interessert
- Møte forberedt

Ønsker du å beholde karakteren din fra ungdomsskolen må du være forberedt på å jobbe hardt og seriøst med faget, men om du oppfyller dine krav er vi helt sikre på at vi sammen greier å nå målet ditt.

Forord til 9. utgave:

I denne boken vil du finne presentasjonsoppgaver, hvor du skal presentere dine løsninger enten skriftlig eller muntlig. Presentasjonene vil være en del av vurderingsgrunnlaget faglæreren din vil bruke når hun eller han skal sette standpunktkarakter.

Presentasjonsoppgavene gir deg anledning til å

- Være kreativ
- Vise hva du har lært
- Velge dine egne løsninger
- Argumentere for dine valg og løsninger

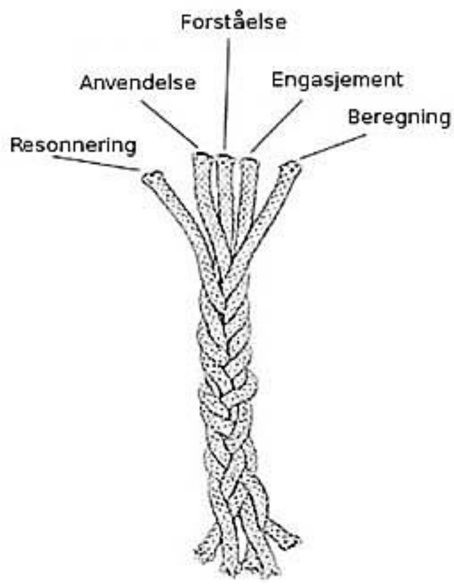
Husk at dine tanker og meninger er like viktige som alle andres!

Matematikkseksjonen ved Hellerud videregående skole
Juli 2021

Forsiden er laget av Nicolai Grytvik Borbe, fra fjorårets 3STM. Baksiden er laget av MK-lærer Christian Gruehagen.

Trådmodellen – hva vil det si å være god i matematikk?

1. **Forståelse:** Forstå matematiske begreper, representasjoner, operasjoner og relasjoner



2. **Beregning:** Utføre prosedyrer som involverer tall, størrelser og figurer, effektivt, nøyaktig og fleksibelt

3. **Anvendelse:** Formulere problemer matematisk og utvikle strategier for å løse problemer ved å bruke passende begreper og prosedyrer

Figur 1: Å være god i matematikk består av fem sammenflettede tråder (oversatt utgave, hentet fra Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001, s. 117)

4. **Resonnering:** Forklare og begrunne en løsning til et problem, eller utvide fra noe kjent til noe som ikke er kjent

5. **Engasjement:** Være motivert for å lære matematikk, se på matematikk som nyttig og verdifullt, og tro at innsats bidrar til økt læring i matematikk

(Kilde: http://www.matematikksenteret.no/content/4526/Hva-betyr-det-a-vare-god-i-matematikk)

Jo Boalers 7 bud

1. **Alle kan lære matematikk på høyeste nivå**
   - Det er ikke slik at noen er født med en «mattehjerne» - det handler om at alle kan lære hvis de vil gjøre jobben.

2. **Å gjøre feil er verdifull**
   - Feil gjør at hjernen din vokser. Det er bra å streve og gjøre feil.

3. **Å stille spørsmål er viktig**
   - Spør om det er noe du lurer på, og svar på andre sine spørsmål. Spør deg selv: er dette riktig?

4. **Matematikk handler om å være kreativ, og skal gi mening**
   - Finn mønstre og sammenhenger, og diskuter disse med andre.

5. **Matematikk er å se sammenhenger og å diskutere**
   - I matematikk kan det samme sies på ulike måter, for eksempel ord, bide, graf og funksjon. Finn sammenhengen mellom dem, og diskuter hvilken som passer best i de ulike situasjonene!

6. **Matematikk handler om å lære, ikke prestere**
   - Det tar tid å lære matematikk, og det handler om innsats.

7. **Det er viktigere å tenke grundig enn fort**
   - Det handler om å forstå noe godt, og det er ikke viktig å være rask

(fritt oversatt fra Jo Boalers «Positive Norms to Encourage in Math Class»)

INNHOLD

Prosent

Målet for opplæringen er at eleven skal kunne:

- bruke prosent, prosentpoeng, promille og vekstfaktor i utregninger, og presentere og grunngi løsninger
- lese, hente ut og vurdere matematikk i tekster om situasjoner lokalmiljøet, gjøre beregner knyttet til dette, og presentere og argumentere for resultatene

Hva er prosent?

Ordet **prosent** har latinsk opprinnelse, og er satt sammen av ordene **pro** (av) og **cent** (hundre). **Prosent** betyr derfor «av hundre», men det kan også leses som «hundredel».

Finne prosenten

Prosent er nyttig å bruke både når vi ønsker å beskrive hvor mye en **del** utgjør av en **helhet**, og når vi ønsker å sammenligne **andeler** av **helheter** med ulik størrelse.

Vi regner ut **prosenten** med følgende regnemetode:

$$\boldsymbol{prosenten} = \frac{verdien\ av\ \boldsymbol{delen}}{verdien\ av\ \boldsymbol{helheten}} \cdot 100\ \%$$

Vi bruker **prosent** når vi ønsker å beskrive:

- hvor mye strøm vi har på telefonen
- hvor mye prisen på klær er redusert når butikkene har salg
- hvor stor andel del av Oslos befolkning som bor i Groruddalen
- hvor stor oppslutning partiene får ved Stortingsvalget
- hvor stor del av verdens verdier Norge eier gjennom Oljefondet

og i mange andre situasjoner.

Tenk deg følgende eksempel. En lærer ønsker å undersøke hvilken ungdomsskole elevene i klassen kommer fra, og lager denne oversikten:

Ungdomsskole	**Antall**	**Andel**	
		(Forholdstall)	**(Forholdstall · $\mathbf{100}$ %)**
Haugerud	8	$\frac{8}{30} = 0{,}27$	$0{,}27 \cdot 100\ \% = 27\ \%$
Lindeberg	7	$\frac{7}{30} = 0{,}23$	$0{,}23 \cdot 100\ \% = 23\ \%$
Granstangen	10	$\frac{10}{30} = 0{,}33$	$0{,}33 \cdot 100\ \% = 33\ \%$
Andre	5	$\frac{5}{30} = 0{,}17$	$0{,}17 \cdot 100\ \% = 17\ \%$
Sum	**30**	$\frac{\mathbf{30}}{\mathbf{30}} = \mathbf{1{,}0}$	$1{,}0 \cdot 100\ \% = 100\ \%$

Oppgave 1

Gjør tilsvarende undersøkelse for klassen din.

Hvordan er fordelingen i klassen din sammenlignet med hele skolen?

Oppgave 2

Som du ser i eksempelet på forrige side, kan vi beskrive en **andel** på tre ulike måter:

BRØK <-> DESIMAL <-> PROSENT

I oppgavene nedenfor får du trening i å regne mellom disse ulike representasjonsmåtene.

Fyll ut tabellen. Klarer du noen av oppgavene uten kalkulator?						
Brøk	**Desimal**	**Prosent**		**Brøk**	**Desimal**	**Prosent**
$\frac{28}{100}$				$\frac{37}{56}$		
	0,48			$\frac{85}{127}$		
	0,61			$\frac{21}{18}$		
	0,7				0,8	
$\frac{5}{100}$					0,9	
		37 %				7 %
		8 %				113 %

Kan du lage en regel på hvordan du regner mellom **desimaltall** og **prosenttall**?

Oppgave 3

Det er vanlig å dele de politiske partiene i 3 hovedbolker: venstresiden, sentrum og høyresiden.

I et valgdistrikt fordelte stemmene seg slik:

- $\frac{3}{7}$ av stemmene gikk til partier på venstresiden
- En andel på 0,2 av stemmene gikk til partier i sentrum
- Resten av stemmene gikk til partier på høyresiden

Hvor mange prosent av stemmene gikk til partier på høyresiden?

En eksamensoppgave

I en eske ligger det røde, grønne og gule kuler.

$\frac{3}{5}$ av kulene er røde, og $\frac{1}{10}$ av kulene er grønne.

Hvor mange prosent av kulene er gule?

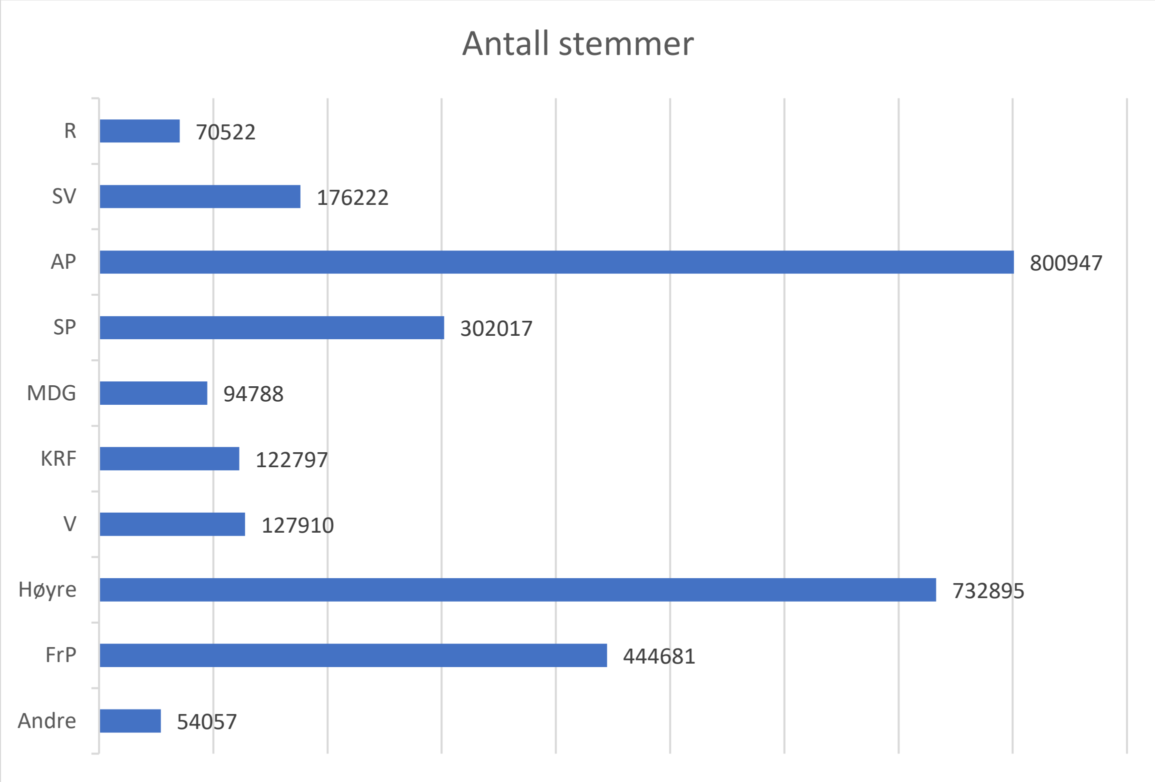
En eksamensoppgave

En gullring er stemplet med 585.
Det betyr at 585 tusendeler av ringen er gull.

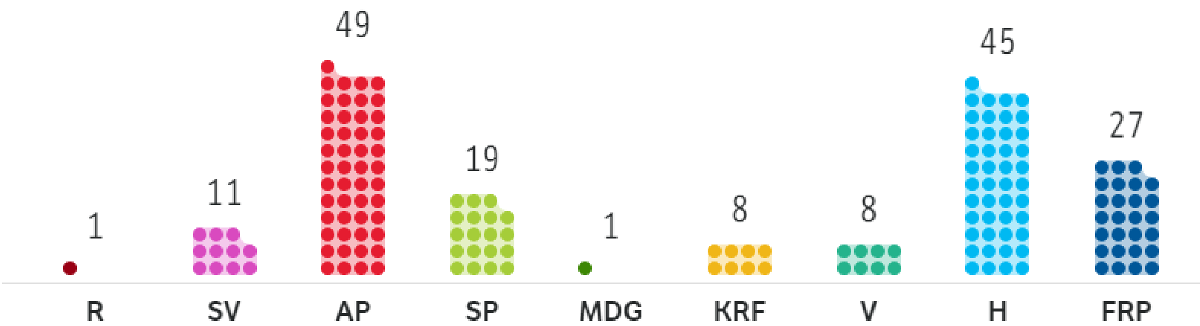
Hvor mange prosent av ringen er gull?

Presentasjonsoppgave

Ved Stortingsvalget i 2017 ble det totalt avgitt 2 926 836 stemmer. Nedenfor finner du resultatet for partiene som oppnådde minst 1 representant på Stortinget (en slik representant kalles en mandat).



Fordelingen av mandater på Stortinget ble slik:



Bruk resultatene ovenfor til å si noe om valgresultatet.

Bruke prosenten

Dersom vi vet hvor stor **prosent** en **del** er av en **helhet**, kan vi regne verdien til **delen** ved hjelp av følgende **regnemetode**:

$$\boldsymbol{Verdien\ \text{til}\ helheten\ \cdot prosenten = verdien\ \text{til}\ delen}$$

I oppgave 2 trente du på å gjøre **prosent** om til **desimaltall**. Dersom vi bruker **desimaltallet** i utregningen istedenfor **prosenten**, bruker vi ordet **prosentfaktor** om **desimaltallet**. Da får vi følgende **regnemetode**:

$$\boldsymbol{Verdien\ \text{til}\ helheten\ \cdot prosentfaktoren = verdien\ \text{til}\ delen}$$

I starten av skoleåret 2021/2022 vil 720 elever begynne på Hellerud vgs. **Andelen** av Helleruds elever som kommer fra Granstangen er omtrent 18 %.

Ved hjelp av **formlene** ovenfor kan vi regne ut hvor mange av Helleruds elever som kommer fra Granstangen.

Prosenten
$Antall\ elever\ fra\ Granstangen = 720\ elever\ \cdot 18\ \% = 129{,}6\ elever \approx 130\ elever$

Prosentfaktoren
$Antall\ elever\ fra\ Granstangen = 720\ elever\ \cdot 0{,}18 = 129{,}6\ elever \approx 130\ elever$

Du velger selv hvilken metode du ønsker å bruke. Det er imidlertid greit å vite hvilke metoder du kan bruke på de ulike digitale hjelpemidlene:

Digitale hjelpemidler	Prosentfaktoren	Prosenten
ExCel	✓	✓
GeoGebra	✓	✓
CAS	✓	✓
Kalkulator	✓	Ikke alle

Oppgave 4

Regn oppgavene nedenfor ved hjelp av kalkulator. Du velger selv om du ønsker å bruke **prosenten** eller **prosentfaktoren**, men prøv gjerne begge metodene.

a) 35 % av 400 b) 28 % av 1 200 c) 40 % av 35 600

d) 8 % av 92 400 e) 6,4 % av 7 600 f) 0,8 % av 159 200

Oppgave 5

En klesbutikk ville selge unna beholdningen av sommerkolleksjonen, og alle varene skal selges med 30 % rabatt.

	A	B		C
1	Vare	Pris		Rabatt
2	Ankelsokker	kr	59	
3	Bluse	kr	99	
4	Caps	kr	149	
5	Kort kjole	kr	199	
6	Lang kjole	kr	299	
7	Linskjorte	kr	249	
8	Pique-skjorte	kr	299	
9	Sandaler	kr	269	
10	Shorts	kr	399	
11	Skjørt	kr	159	
12	Solbriller	kr	499	
13	Solkrem	kr	169	
14	T-skjorte	kr	99	
15	Vannflaske	kr	149	

Lag et regneark som vist til ovenfor som kan brukes til å regne rabatten på hver enkelt vare.

I de grønne rutene skal du skrive formler.

Oppgave 6

En klesbutikk ville selge unna beholdningen av sommerkolleksjonen, og alle varene skal selges med 30 % rabatt.

	A	B	C
1	Rabatt	30 %	
2	Vare	Pris	Rabatt
3	Ankelsokker	kr 59	
4	Bluse	kr 99	
5	Caps	kr 149	
6	Kort kjole	kr 199	
7	Lang kjole	kr 299	
8	Linskjorte	kr 249	
9	Pique-skjorte	kr 299	
10	Sandaler	kr 269	
11	Shorts	kr 399	
12	Skjørt	kr 159	
13	Solbriller	kr 499	
14	Solkrem	kr 169	
15	T-skjorte	kr 99	
16	Vannflaske	kr 149	

Lag et regneark som vist til venstre som kan brukes til å regne rabatten på hver enkelt vare.

I de grønne rutene skal du skrive formler.

Utfordring: i de grønne rutene kan du kun henvise til andre ruter. Du kan ikke skrive inn tall i disse rutene.

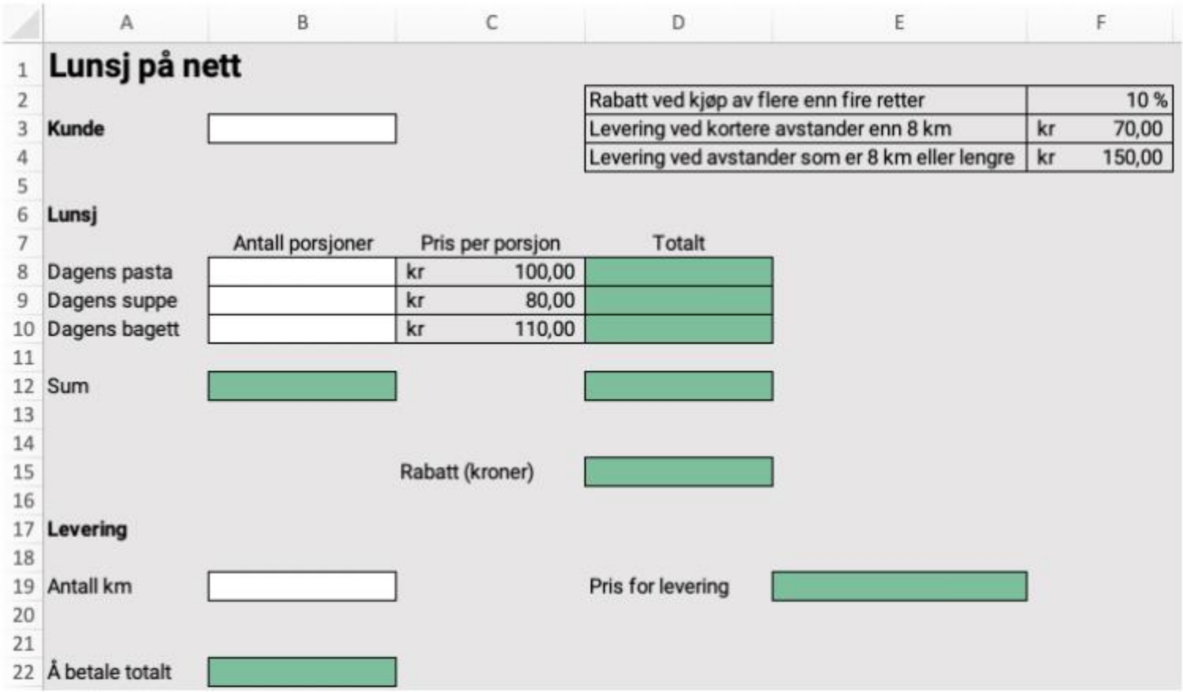
En eksamensoppgave

For å reise til flyplassen kan Herman ta flybussen eller bybanen.
Flybussen koster 100 kroner, og bybanen koster 40 kroner.

a) Hvor mange prosent billigere er bybanen sammenlignet med flybussen?

b) Hvor mange prosent dyrere er flybussen sammenlignet med bybanen?

En eksamensoppgave



«Lunsj på nett» er et firma som lager og leverer ferdige lunsjretter.

Kundene kan velge mellom tre retter:

- Dagens pasta koster 100 kroner
- Dagen suppe koster 80 kroner
- Dagens bagett koster 110 kroner

«Lunsj på nett» gir 10 % rabatt til kunder som bestiller flere enn fire lunsjretter.

Levering koster 70 kroner for avstander som er kortere enn 8 km.
For lengre avstander er prisen 150 kroner

Lag et regneark som «Lunsj på nett» kan bruke for å registrere en bestilling.
Når bestillingen er registrert, skal regnearket beregne hvor mye kunden skal betale.

I de hvite cellene skal «Lunsj på nett» registrere opplysninger når de tar imot en bestilling. I de grønne cellene skal du lage formler.

Sammenligne prosenter – prosentpoeng

Hvilken av disse påstandene er riktige, og hva må forandres i den gale påstanden for at den skal bli riktig?

☐ 60 % er 20 % mer enn 40 %
☐ 60 % er 50 % mer enn 40 %

Den riktige påstanden er påstand nummer to; 60 % er 50 % mer enn 40 %.

For at den første påstanden skal være riktig, må den skrives slik:
60 % er 20 **prosentpoeng** mer enn 40 %.

Dersom vi ønsker å beskrive **forskjellen** mellom to **prosenter**, bruker vi begrepet **prosentpoeng**.

Prosentpoeng = den ene **prosenten** – den andre **prosenten**

En familie med el-bil skal på kjøretur. Ved oppstart viser måleren at batteriet er 80 % fulladet. Etter en times kjøring har batterinivået sunket til 60 %. Dette betyr at batterinivået har sunket med:

- $80 - 60 = 20$ **prosentpoeng**.
- $\frac{20}{80} = 0{,}25 = 25$ **prosent**

Oppgave 7

Batterinivået på en telefon var på 36 %. Etter en stund hadde nivået sunket til 28 %.

Beskriv nedgangen både i **prosentpoeng** og **prosent**.

Oppgave 8

Ved Stortingsvalget 2017 oppnådde MDG en oppslutning på 3,2 %. Det er viktig for et parti å komme over sperregrensa på 4 %.

a) Med hvor mange **prosentpoeng** må oppslutningen til MDG øke for å oppnå dette?
b) Med hvor mange **prosent** må oppslutningen til MDG øke for å oppnå dette?

Presentasjonsoppgave

I regnearket nedenfor finner du informasjon om resultatet ved Stortingsvalget i 2013 og i 2017.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	År	Stemmeberettigede	Antall avgitte stemmer	Valgdeltakelse %				
2	2013	3641994	2848903					
3	2017	3762746	2926836					
4								
5								
6		2013		2017		Endring fra 2013 til 2017		
7	Parti	Andel	Antall stemmer	Andel	Antall stemmer	Antall stemmer	Prosentpoeng	Prosent
8	R	1,1 %		2,4 %				
9	SV	4,1 %		6,0 %				
10	AP	30,8 %		27,4 %				
11	SP	5,5 %		10,3 %				
12	MDG	2,8 %		3,2 %				
13	KRF	5,6 %		4,2 %				
14	V	5,2 %		4,4 %				
15	Høyre	26,8 %		25,0 %				
16	FrP	16,3 %		15,2 %				
17	Andre	1,8 %		1,9 %				
18	Sum							

Lag et regneark som vist ovenfor. I de grønne rutene skal du lage formler.

Bruk regnearket til å finne:

- Antall stemmer hvert parti oppnådde ved hvert av valgene.
- Hvert partis **prosentvise** oppslutning ved hvert av valgene.
- Valgdeltakelse i **prosent**
- Endringen i valgresultatene i 2013 og 2017 for alle partiene. Endringen skal vises både i antall stemmer, **prosentpoeng** og **prosent.**

Lag en presentasjon med fokus på endringene mellom Stortingsvalget i 2013 og 2017. I presentasjonen bør du ha med:

- Kommentarer om interessante funn
- Diagrammer som viser både resultat og endringer

Løsningsforslag

Oppgave 2

Brøk	Desimal	Prosent		Brøk	Desimal	Prosent
$\frac{28}{100}$	0,28	28 %		$\frac{37}{56}$	0,66	66 %
$\frac{48}{100}$	0,48	48 %		$\frac{85}{127}$	0,67	67 %
$\frac{61}{100}$	0,61	61 %		$\frac{21}{18}$	1,17	117 %
$\frac{70}{100}$	0,7	70 %		$\frac{80}{100}$	0,8	80 %
$\frac{5}{100}$	0,05	5%		$\frac{90}{100}$	0,9	90 %
$\frac{37}{100}$	0,37	37 %		$\frac{7}{100}$	0,07	7 %
$\frac{8}{100}$	0,08	8 %		$\frac{113}{100}$	1,13	113 %

Oppgave	Svar	Oppgave	Svar
3	37 %	**7**	- 6 prosentpoeng = -17 %
4	a) 140 b) 336 c) 14 240	**8**	0,8 prosentpoeng = 25 %
	d) 7 392 e) 486,4 f) 1 273,6		

Eksamensoppgaver side 8

$$\frac{3}{5} = 3 \cdot \frac{1}{5} = 3 \cdot 20\ \% = \underline{60\ \%}$$

$$\frac{1}{10} = \underline{10\ \%}$$

$$100\ \% - 60\ \% - 10\ \% = \underline{30\ \%}$$

30 % av kulene er gule.

$$\frac{585}{1000} = \frac{58,5}{100}$$

58,5 % av ringen er gull.

Oppgave 5

	A	B		C	
1	Vare	Pris		Rabatt	
2	Ankelsokker	kr	59	kr	18
3	Bluse	kr	99	kr	30
4	Caps	kr	149	kr	45
5	Kort kjole	kr	199	kr	60
6	Lang kjole	kr	299	kr	90
7	Linskjorte	kr	249	kr	75
8	Pique-skjorte	kr	299	kr	90
9	Sandaler	kr	269	kr	81
10	Shorts	kr	399	kr	120
11	Skjørt	kr	159	kr	48
12	Solbriller	kr	499	kr	150
13	Solkrem	kr	169	kr	51
14	T-skjorte	kr	99	kr	30
15	Vannflaske	kr	149	kr	45

	A	B	C
1	Vare	Pris	Rabatt
2	Ankelsokker	59	=B2*30%
3	Bluse	99	=B3*30%
4	Caps	149	=B4*30%
5	Kort kjole	199	=B5*30%
6	Lang kjole	299	=B6*30%
7	Linskjorte	249	=B7*30%
8	Pique-skjorte	299	=B8*30%
9	Sandaler	269	=B9*30%
10	Shorts	399	=B10*30%
11	Skjørt	159	=B11*30%
12	Solbriller	499	=B12*30%
13	Solkrem	169	=B13*30%
14	T-skjorte	99	=B14*30%
15	Vannflaske	149	=B15*30%

Oppgave 6 For å løse utfordringen har vi brukt «absolutt cellereferanse».

	A	B		C	
1	Rabatt:		30 %		
2	Vare	Pris		Rabatt	
3	Ankelsokker	kr	59	kr	18
4	Bluse	kr	99	kr	30
5	Caps	kr	149	kr	45
6	Kort kjole	kr	199	kr	60
7	Lang kjole	kr	299	kr	90
8	Linskjorte	kr	249	kr	75
9	Pique-skjorte	kr	299	kr	90
10	Sandaler	kr	269	kr	81
11	Shorts	kr	399	kr	120
12	Skjørt	kr	159	kr	48
13	Solbriller	kr	499	kr	150
14	Solkrem	kr	169	kr	51
15	T-skjorte	kr	99	kr	30
16	Vannflaske	kr	149	kr	45

	A	B	C
1	Rabatt:	0,3	
2	Vare	Pris	Rabatt
3	Ankelsokker	59	=B3*$B$1
4	Bluse	99	=B4*$B$1
5	Caps	149	=B5*$B$1
6	Kort kjole	199	=B6*$B$1
7	Lang kjole	299	=B7*$B$1
8	Linskjorte	249	=B8*$B$1
9	Pique-skjorte	299	=B9*$B$1
10	Sandaler	269	=B10*$B$1
11	Shorts	399	=B11*$B$1
12	Skjørt	159	=B12*$B$1
13	Solbriller	499	=B13*$B$1
14	Solkrem	169	=B14*$B$1
15	T-skjorte	99	=B15*$B$1
16	Vannflaske	149	=B16*$B$1

Eksamensoppgave side 12

Det er en prisforskjell på 60 kr mellom flybussen og bybanen.

a) $\frac{60}{100} = 60$ %. Bybanen er 60 % billigere enn flybussen

b) $\frac{60}{40}$ = 150 %. Flybussen er 150 % dyrere enn bybanen

Eksamensoppgave side 13

Løsning

	A	B	C	D	E	F
1	**Lunsj på nett**					
2				Rabatt ved kjøp av flere enn fire retter		10 %
3	**Kunde**	Snekker Andersen		Levering ved kortere avstander enn 8 km		kr 70,00
4				Levering ved avstander som er 8 km eller lengre		kr 150,00
5						
6	**Lunsj**					
7		Antall porsjoner	Pris per porsjon	Totalt		
8	Dagens pasta	1	kr 100,00	kr 100,00		
9	Dagens suppe	4	kr 80,00	kr 320,00		
10	Dagens bagett	1	kr 110,00	kr 110,00		
11						
12	Sum	6		kr 530,00		
13						
14						
15			Rabatt (kroner)	kr 53,00		
16						
17	**Levering**					
18						
19	Antall km	8		Pris for levering	kr 150,00	
20						
21						
22	Å betale totalt	kr 627,00				

Jeg har laget regnearket og testet det for en kunde som kjøper 6 porsjoner og skal betale for levering når avstanden er 8 km. Under har jeg vist formlene som er brukt i regnearket.

	A	B	C	D	E	F
1	**Lunsj på nett**					
2				Rabatt ved kjøp av flere enn fire retter		0,1
3	**Kunde**	Snekker Andersen		Levering ved kortere avstander enn 8 km		70
4				Levering ved avstander som er 8 km eller lengre		150
5						
6	**Lunsj**					
7		Antall porsjoner	Pris per porsjon	Totalt		
8	Dagens pasta	1	100	=B8*C8		
9	Dagens suppe	4	80	=B9*C9		
10	Dagens bagett	1	110	=B10*C10		
11						
12	Sum	=SUMMER(B8:B10)		=SUMMER(D8:D10)		
13						
14						
15			Rabatt (kroner)	=HVIS(B12>4;D12*F2;0)		
16						
17	**Levering**					
18						
19	Antall km	8		Pris for levering	=HVIS(B19<8;F3;F4)	
20						
21						
22	Å betale totalt	=D12-D15+E19				

Presentasjon og analyse

Målet for opplæringen er at eleven skal kunne:

- lese, hente ut og vurdere matematikk i tekster om situasjoner lokalmiljøet, gjøre beregner knyttet til dette, og presentere og argumentere for resultatene

INFORMASJON

På ungdomskolen har du sannsynligvis vært med på å samle inn informasjon, kanskje gjennom en spørreundersøkelse eller ved et forsøk. Du har kanskje spurt dine medelever om hvor mange søsken de har, eller hvor mange timer de bruker på skjerm. Kanskje har du registrert hvor mange biler som passerer skolen i et bestemt tidsrom.

Hvert enkelt svar fra spørreundersøkelsen eller hvert enkelt resultat fra forsøket kalles en **observasjon**, og antallet som svarer eller antall resultater fra undersøkelsen kalles **sum observasjoner**.

Informasjonen hver enkelt observasjon gir kalles **data**, og alle dataene samlet kalles **datamateriale**. I dette kapittelet skal vi først se på hvordan vi kan **presentere** informasjonen fra et datamateriale. Deretter skal vi se hvilke **analyser** vi kan gjøre av et datamateriale.

Tenk deg at læreren spør klassen om hvor mange transportmidler hver enkelt elev brukte for å komme til skolen i dag. Da vil hvert enkelt svar være en **observasjon** og antall elever som var med på undersøkelsen vil være **sum observasjoner**.

Hva hver enkelt elev svarer vil være **data**, mens alle svarene samlet vil bli undersøkelsens **datamateriale**. Det er dette **datamaterialet** som vi enten kan **presentere** eller **analysere**

Eksempel:

En taxisjåfør registrerte antall turer hver dag en uke i desember. Her blir **antall observasjoner** 7.

Sjåføren registrerte følgende observasjoner fra mandag til søndag:

14 – 17 – 12 – 21 – 29 – 37 - 14

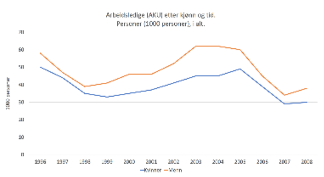
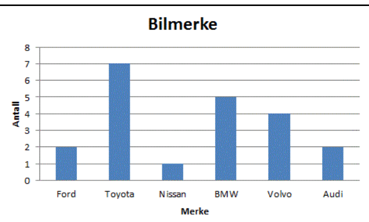
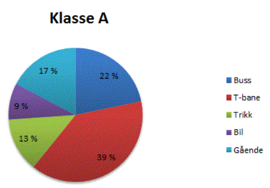
PRESENTASJON

Når vi har skaffet oss et datamateriale kan vi lage en presentasjon av informasjonen i datamaterialet. Det er ryddig å først systematisere dataene i en **tabell**, og det kan være lurt å gjøre dette i ExCel:

	A	B
1	Dag	Antall turer
2	Mandag	14
3	Tirsdag	17
4	Onsdag	12
5	Torsdag	21
6	Fredag	29
7	Lørdag	37
8	Søndag	14

Tabell er ikke alltid den beste måten å presentere informasjon på, spesielt ikke dersom det er mye informasjon som skal presenteres. I slike tilfeller kan vi bruke mer visuelle hjelpemidler, for eksempel en graf eller et **diagram**.

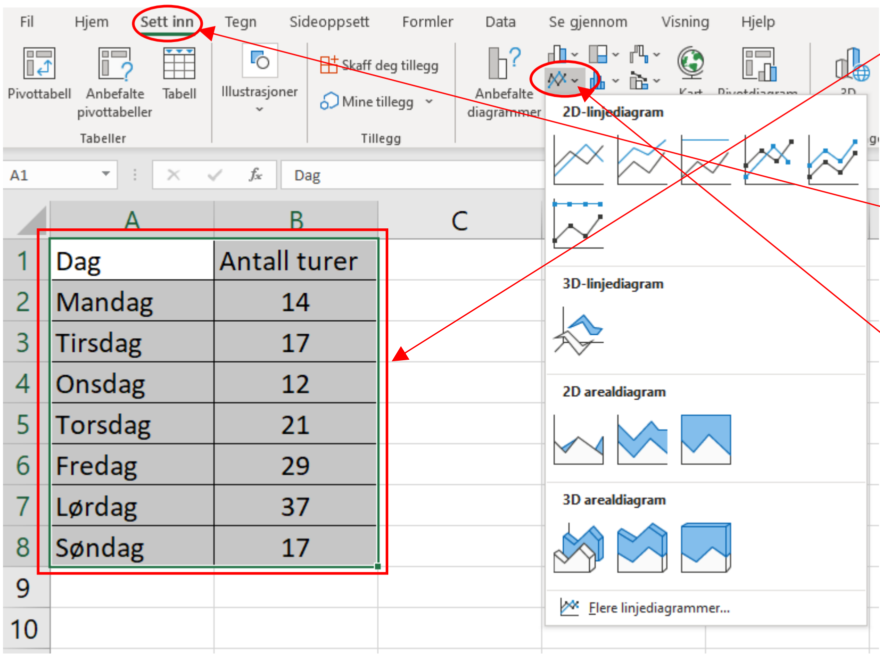
Det finnes tre typer diagrammer du bør kjenne til og når de kan brukes:

Type	Linjediagram	Søylediagram	Sektordiagram
Brukes når vi ønsker å vise	Utvikling over tid	Forskjellen mellom dataene. Her trenger ikke alle data være med.	Andel (gjerne prosent) av datamaterialet
Eksempel			

På de neste sidene viser vi hvordan du kan lage slike diagrammer i ExCel.

Linjediagram:

Dersom vi ønsker å vise utvikling i antall turer gjennom uka, kan vi bruke et **linjediagram**.



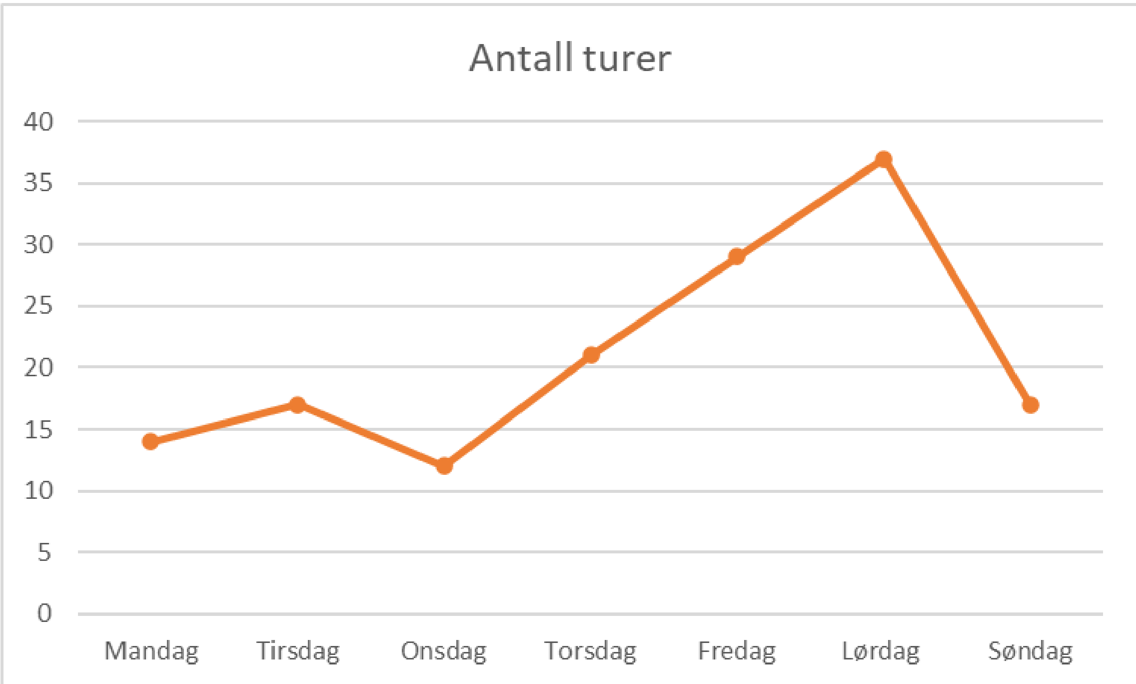
1. Marker tallene i tabellen.

2. Trykk på «Sett inn».

3. Trykk på «Sett inn linje- eller arealdiagram».

4. Velg det diagrammet du ønsker.

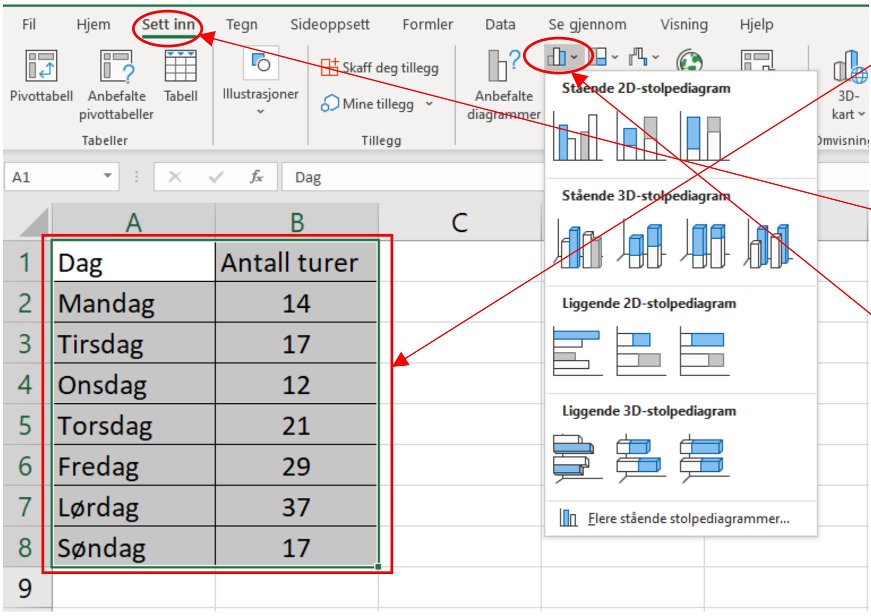
Utviklingen i antall turer gjennom uka blir slik:



Klarer du å lage dette diagrammet i ExCel?

Søylediagram:

Dersom vi ønsker å vise forskjellen i antall turer gjennom uka, kan vi bruke et **søylediagram**.



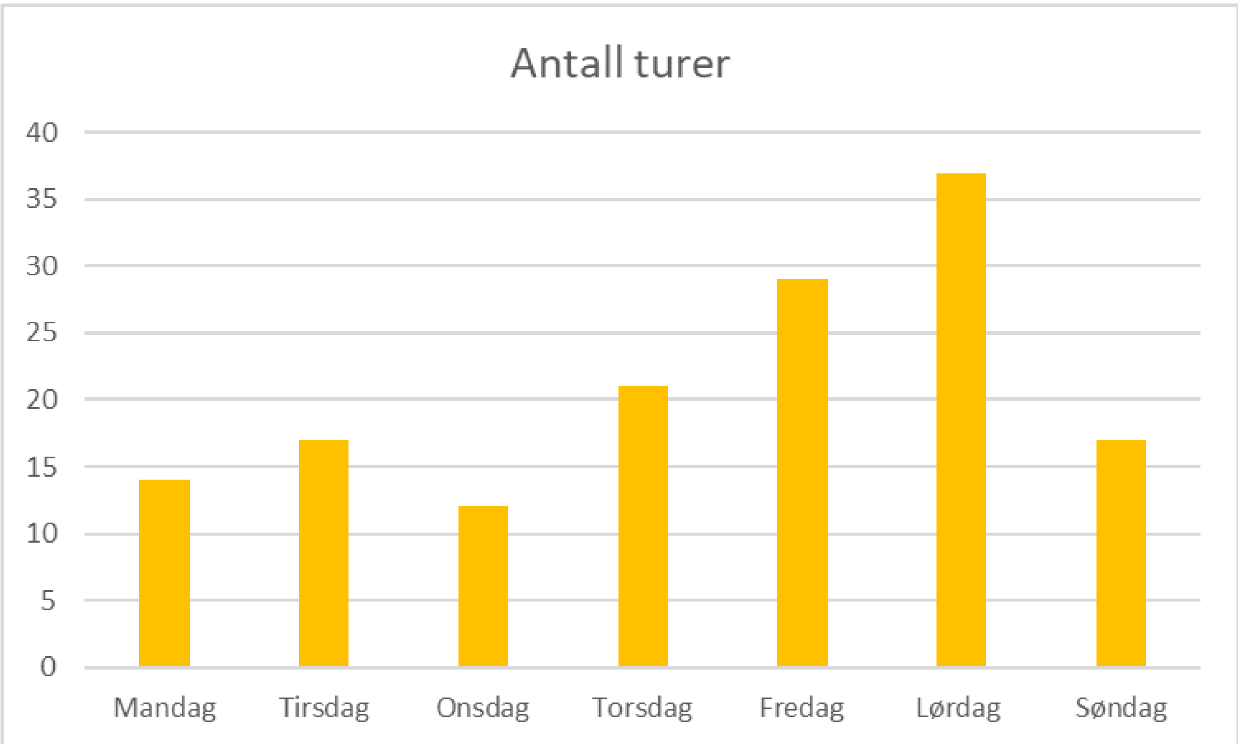
1. Marker tallene i tabellen.

2. Trykk på «Sett inn».

3. Trykk på «Sett inn stående eller liggende stolpediagram».

4. Velg det diagrammet du ønsker.

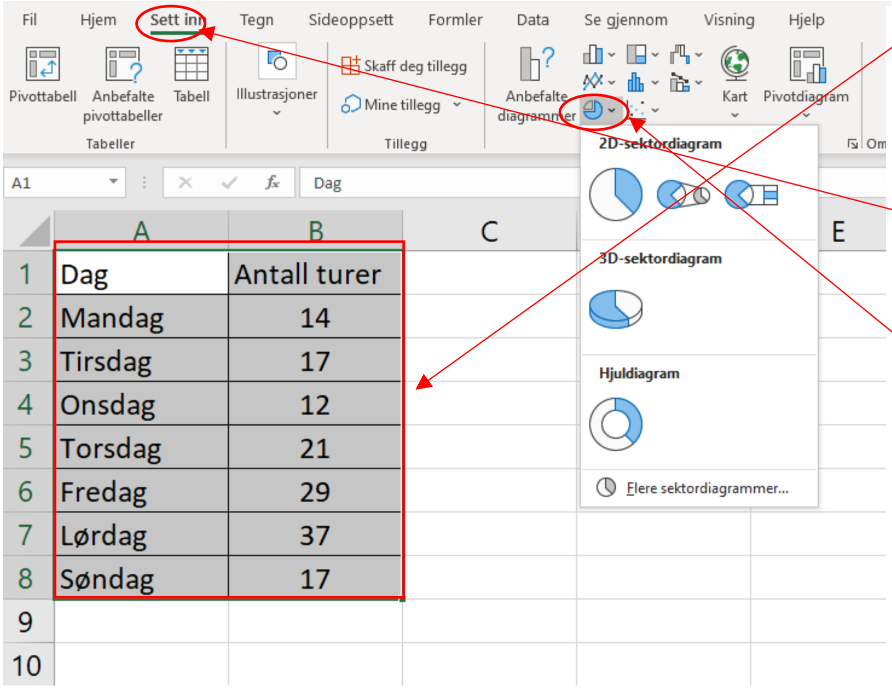
Antall turer fra mandag til søndag blir slik:



Klarer du å lage dette diagrammet i ExCel?

Sektordiagram:

Dersom vi ønsker å vise den prosentvise fordelingen av antall turer, kan vi bruke et **sektordiagram**.



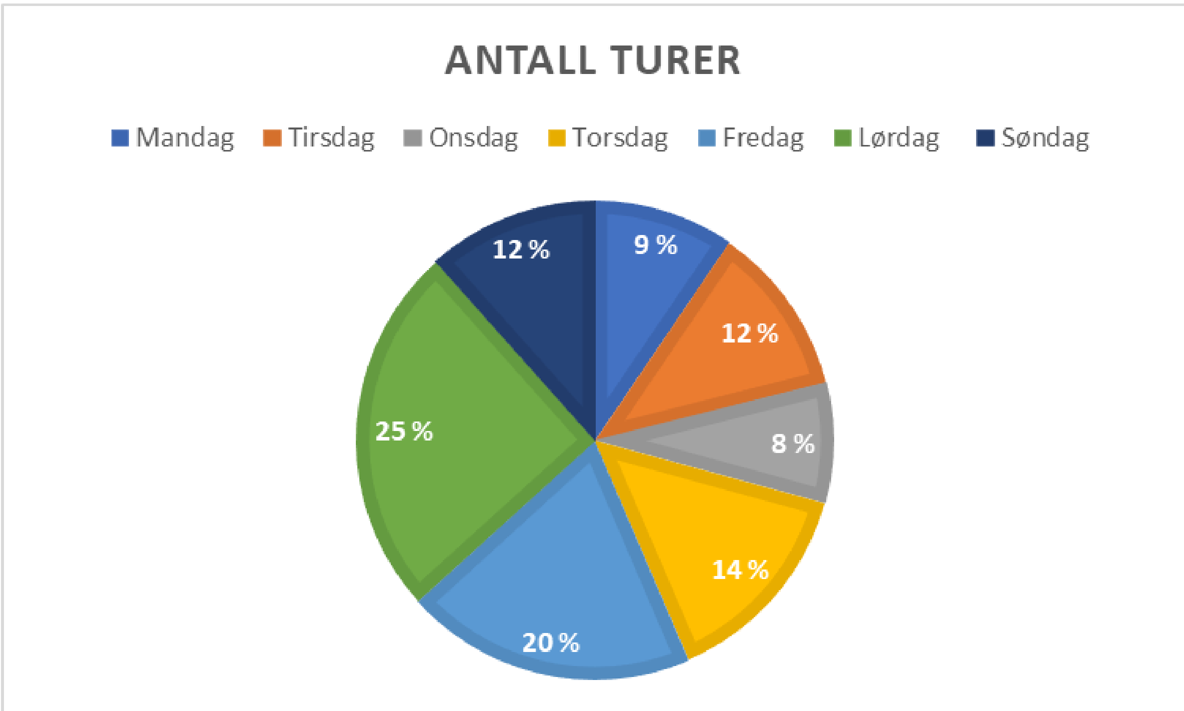
1. Marker tallene i tabellen.

2. Trykk på «Sett inn».

3. Trykk på «Sett inn sektor- eller hjuldiagram».

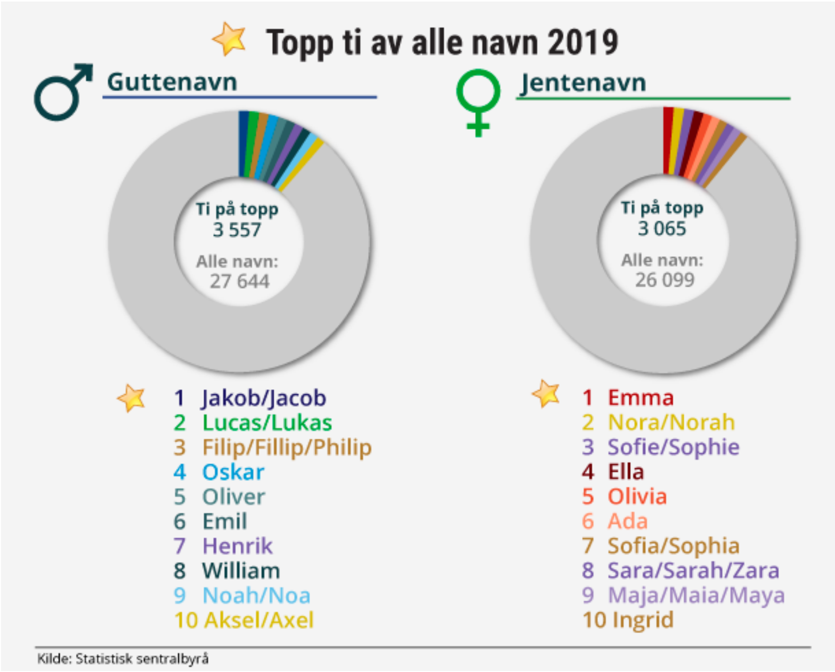
4. Velg det diagrammet du ønsker. Husk å inkludere prosent.

Den prosentvise fordelingen av antall turer blir slik:

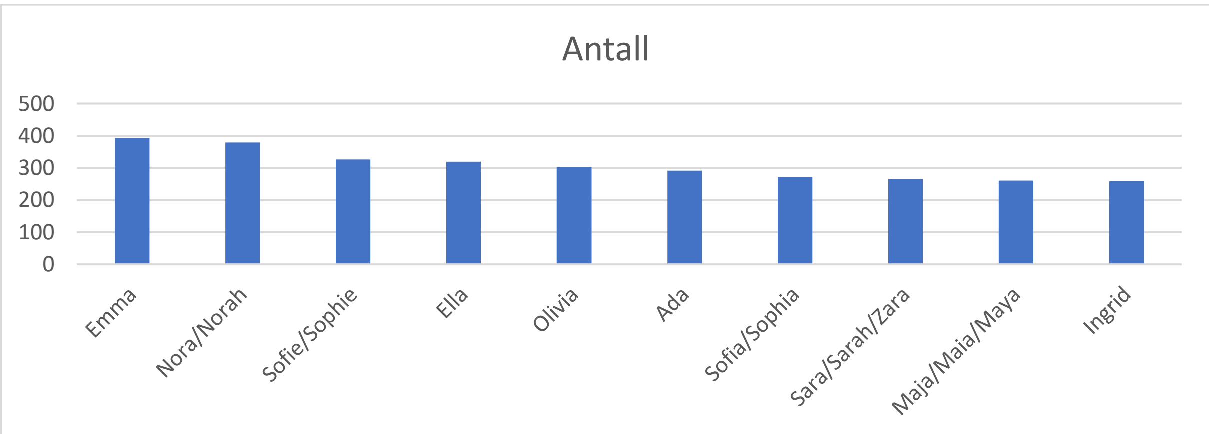


Klarer du å lage dette diagrammet i ExCel?

Spørsmål til diskusjon: nedenfor har vi presentert en liste over de 10 mest populære gutte- og jentenavnene i 2019 på tre ulike måter. Hvilken informasjon gir de ulike presentasjonsmetodene? Hvilken metode liker du best?



Topp ti, jentenavn og guttenavn. 2019					
Jentenavn	Antall	Per 1 000	Guttenavn	Antall	Per 1 000
Emma	393	15	Jakob/Jacob	423	15
Nora/Norah	379	14	Lucas/Lukas	392	14
Sofie/Sophie	326	12	Filip/Fillip/Philip/Phillip	387	13
Ella	319	12	Oskar/Oscar	358	12
Olivia	303	11	Oliver	353	12
Ada	291	11	Emil	347	12
Sofia/Sophia	271	10	Henrik	339	12
Sara/Sarah/Zara	265	10	William	333	12
Maja/Maia/Maya	260	9	Noah/Noa	314	11
Ingrid	258	9	Aksel/Axel	311	11



Oppgave 1

På Wikipedia kan vi finne følgende informasjon om antall nordmenn som er bekreftet smittet av Covid-19 i ukene 40 – 45:

Uke	Antall bekreftet smittet av Covid-19
40	742
41	1 072
42	915
43	1 096
44	3 402
45	4 162

a) Bestem hvilket poeng du ønsker å få frem, og lag et passende diagram.

b) Hvorfor passer det ikke å bruke et sektordiagram til dette datamaterialet?

Oppgave 2

En lærer spurte klassen hvor mange transportmidler elevene vanligvis bruker frem og tilbake til skolen. Læreren systematiserte svarene i tabellen nedenfor:

Antall transportmidler	Frekvens
0	4
1	3
2	8
3	1
4	6
5	3
6	2

a) Bestem hvilket poeng du ønsker å få frem, og lag et passende diagram.

b) Hvorfor passer det ikke å bruke et linjediagram til dette datamaterialet?

Oppgave 3

I løpet av første termin hadde en klasse gjennomført 3 prøver i matematikk. Læreren hadde registrert følgende karakterer på prøvene:

Karakter	Frekvens første prøve	Frekvens andre prøve	Frekvens tredje prøve
1	0	2	1
2	3	4	4
3	5	7	6
4	8	5	4
5	4	3	4
6	1	0	2

Bestem hvilket poeng du ønsker å få frem, og lag et passende diagram.

Presentasjonsoppgave

I tabellen nedenfor finner du oversikt over nedbørsmengden (målt i millimeter) registrert i Oslo og Bergen for hver måned i 2014. Du finner også en oversikt over hva som er normal nedbørsmengde i disse månedene.

Sted	.	Året	Jan.	Feb.	Mars	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sep.	Okt.	Nov.	Des.
Oslo	2014	1028	73	130	58	55	58	111	53	109	42	211	102	28
	Normal	763	49	36	47	41	53	65	81	89	90	84	73	55
Bergen	2014	2429	101	200	278	131	97	59	163	206	128	473	169	423
	Normal	2250	190	152	170	114	106	132	148	190	283	271	259	235

Lag en rapport hvor du presenterer informasjonen som finnes i tabellen.

Før du begynner med rapporten: en av kolonnene skal ikke inkluderes i presentasjonen. Hvilken?

Rapporten bør inneholde:

- Et diagram som viser den månedlige utviklingen i nedbørsmengde i de to byene, både for 2014 og for hva som er normalt
- Diagram som viser den prosentvise fordelingen av nedbørsmengde fordelt på måneder i hver av de to byene, både for 2014 og for hva som er normalt
- Egne kommentarer om hva som er likt og hva som er ulikt i diagrammene, og annet du finner interessant

Ta vare på denne rapporten. Vi skal bruke den senere.

ANALYSE

Når vi har skaffet oss et datamateriale kan vi gjøre mer enn å bare presentere resultatene. Vi kan også gjøre noen analyser av informasjonen. Nedenfor har vi listet opp noen spørsmål som kan være naturlig å stille til datamaterialet fra taxi-sjåføren.

Hvilket resultat er i midten?

Dersom vi skal finne hva som er i midten må vi først sette resultatene i rekkefølge, for eksempel fra lavest til høyest:

12 – 14 – 17 – 17 – 21 – 29 – 37

Her ser vi at 17 turer er det resultatet i midten. Dette kalles for øvrig for **median**.

Spørsmål til diskusjon: hva om det er 2 i midten? Når inntreffer dette?

Hva er det vanligste resultatet?

Er det et resultat som kommer oftere enn andre? I datamaterialet til taxi-sjåføren ser vi at 17 turer er det resultatet som forekommer oftest. Dette kalles for øvrig for **typetall**.

Spørsmål til diskusjon: hva om det er flere observasjoner som forekommer oftest? Hva om ingen observasjoner forekommer flere ganger?

Hva om alle resultatene hadde vært like?

Tenk om sjåføren kunne fordelt turene slik at det ble kjørt like mange turer hver dag, istedenfor mange turer noen dager og få turer andre dager? Dette kalles for øvrig for **gjennomsnitt**.

I så fall må vi først finne ut hvor mange turer sjåføren kjørte til sammen. Deretter må vi fordele disse turene på antall dager. Dette kan skrives slik:

Gjennomsnitt = $\frac{sum\ data}{antall\ \ observasjoner} = \frac{sum\ turer}{antall\ dager} = \frac{147}{7} = 21$

Spørsmål til diskusjon: for hvilke typer undersøkelser er det ikke mulig å regne gjennomsnitt?

Disse tre analysene kalles for **sentralmål**. Blir du bedt om å finne **sentralmålene** til et datamateriale er det disse analysene du skal gjøre.

Hva om vi legger sammen resultatene underveis?

Det kan kanskje være interessant å vite hvor mange turer sjåføren har kjørt fra mandag til onsdag, eller fra mandag til fredag. Dette kalles for øvrig **kumulativ frekvens.** Kumulativ kommer av ordet akkumulere, som betyr å samle opp.

Vi kunne naturligvis skrevet det slik:

Kumulativ frekvens for mandag: antall turer mandag.

Kumulativ frekvens for tirsdag: antall turer mandag + tirsdag

Kumulativ frekvens for onsdag: antall turer mandag + tirsdag + onsdag

osv…

men det er mer fornuftig å gjøre dette i en tabell:

	A	B	C
1	Dag	Antall turer	Kumulativ frekvens
2	Mandag	14	14
3	Tirsdag	17	31
4	Onsdag	12	43
5	Torsdag	21	64
6	Fredag	29	93
7	Lørdag	37	130
8	Søndag	17	147

Spørsmål til diskusjon: nedenfor har vi vist formlene som ble brukt for å regne ut den kumulative frekvensen for dette datamaterialet. Hvordan er regnearket bygd opp?

	A	B	C
1	Dag	Antall turer	Kumulativ frekvens
2	Mandag	14	=B2
3	Tirsdag	17	=C2+B3
4	Onsdag	12	=C3+B4
5	Torsdag	21	=C4+B5
6	Fredag	29	=C5+B6
7	Lørdag	37	=C6+B7
8	Søndag	14	=C7+B8

Hvor stor (prosent)andel utgjør hvert resultat?

Det kan kanskje være interessant for sjåføren å vite hvor mange prosent av turene som ble kjørt på hver av dagene. Vi har tidligere sett at vi kan finne dette ved å lage et sektordiagram, men det kan også gjøres ved regning.

Dette kalles **relativ frekvens**, og dersom vi legger sammen prosentene underveis kalles dette **kumulativ relativ frekvens**. Dette er også fornuftig å gjøre i en tabell:

	A	B	C	D
1	Dag	Antall turer	Relativ frekvens	Kumulativ relativ frekvens
2	Mandag	14	9,5 %	9,5 %
3	Tirsdag	17	11,6 %	21,1 %
4	Onsdag	12	8,2 %	29,3 %
5	Torsdag	21	14,3 %	43,5 %
6	Fredag	29	19,7 %	63,3 %
7	Lørdag	37	25,2 %	88,4 %
8	Søndag	17	11,6 %	100,0 %
9	Sum turer	147	100,0 %	

Spørsmål til diskusjon: nedenfor har vi vist formlene som ble brukt for å regne ut den relative frekvensen for dette datamaterialet. Hvordan er regnearket bygd opp?

	A	B	C
1	Dag	Antall turer	Relativ frekvens
2	Mandag	14	=B2/$B$9
3	Tirsdag	17	=B3/$B$9
4	Onsdag	12	=B4/$B$9
5	Torsdag	21	=B5/$B$9
6	Fredag	29	=B6/$B$9
7	Lørdag	37	=B7/$B$9
8	Søndag	17	=B8/$B$9
9	Sum turer	=SUMMER(B2:B8)	=B9/$B$9

Er det stor forskjell på resultatene?

Hvilken dag kjører sjåføren færrest turer? Hvor mange turer kjører sjåføren på den travleste dagen? Hvor stor er forskjellen mellom det høyeste og det laveste antall turer? Dette kalles for øvrig **variasjonsbredde**, og er en del av det som kalles **spredningsmål.**

Vi ser at sjåføren kjører 37 turer på den travleste dagen, og 12 turer på den roligste dagen. Vi kan dermed regne ut **variasjonsbredden** slik:

Variasjonsbredde = høyest resultat – lavest resultat = 37 turer – 12 turer = 25 turer.

Oppgave 4

Nedenfor ser du karakterene til en elev på vurderinger i første termin på VG1:

3 – 4 – 2 – 4 – 5 – 2 – 3 – 6 – 3 – 4 – 5 – 3

a) Hvilken karakter er den midterste karakteren til denne eleven?

b) Hva er den vanligste karakteren denne eleven har fått?

c) Hvor høy er gjennomsnittskarakteren til denne eleven?

d) På hvor mange prosent av vurderingene fikk eleven karakteren 5?

e) Hvor stor var forskjellen på den høyeste og den laveste karakteren for denne eleven?

Oppgave 5

Vi spurte 8 elever hvor mye penger de hadde brukt i kantina i storefri. Nedenfor finner du svarene de ga (i kroner):

55, 70, 45, 60, 130, 50, 65 og 70

a) Hvor stor var forskjellen i pengebruk mellom den som brukte mest og den som brukte minst?

b) Hvor mye brukte hver av elevene i gjennomsnitt?

c) Hva er midtpunktet til dette datamaterialet?

d) Hvor mange prosent av elevene brukte mer penger enn gjennomsnittet? Hvor mange prosent av elevene brukte mindre penger enn gjennomsnittet?

Oppgave 6

Finn sentralmål og spredningsmål til datamaterialet i oppgave 1.

ANALYSE I ExCel

ExCel kan forenkle analysearbeidet for oss dersom vi kjenner kommandoene. Nedenfor finner du en oversikt over hvordan du kan bruke ExCel til å finne **sentralmå**l og **spredningsmå**l til et datamateriale.

Dersom du skal skrive inn kommandoen gjør du det i følgende rekkefølge:

1. Begynn med å skrive = [kommandoen]

2. Dobbelklikk på kommandoen som kommer opp.

3. Marker tallene du ønsker at ExCel skal analysere

4. Trykk «Enter»

Hvilken analyse	Kommando
Gjennomsnitt	=gjennomsnitt(datamaterialet)
Median	=median(datamaterialet)
Typetall	=modus(datamaterialet)
Variasjonsbredde	=maksa(datamaterialet) – min(datamaterialet)

Merk: disse kommandoene fungerer kun når datamaterialet er skrevet som en liste med tall, slik det er gjort i eksempelet med taxi-turer.

Dersom du skal finne **sentral- og spredningsmål** når data er samlet i kategorier, som i oppgave 2 og 3 må dette løses på en annen måte. Dette skal du lære i 2P

ExCel-analyse av taxi-turene:

	A	B
1	Dag	Antall turer
2	Mandag	14
3	Tirsdag	17
4	Onsdag	12
5	Torsdag	21
6	Fredag	29
7	Lørdag	37
8	Søndag	17
9		
10	**Median:**	17
11	**Typetall:**	17
12	**Gjennomsnitt:**	21
13	**Variasjonsbredde:**	25

	A	B
1	Dag	Antall turer
2	Mandag	14
3	Tirsdag	17
4	Onsdag	12
5	Torsdag	21
6	Fredag	29
7	Lørdag	37
8	Søndag	17
9		
10	**Median:**	=MEDIAN(B2:B8)
11	**Typetall:**	=MODUS(B2:B8)
12	**Gjennomsnitt:**	=GJENNOMSNITT(B2:B8)
13	**Variasjonsbredde:**	=MAKSA(B2:B8)-MIN(B2:B8)

Legg merke til at vi forklarer hvilke analyser vi utfører.

Oppgave 7

Bruk datamaterialet du finner i oppgave 1, og gjør en analyse av sentralmål og spredningsmål ved hjelp av ExCel.

Spørsmål til diskusjon: kommandoer er ment for å forenkle arbeidet. Er det noen av kommandoene som fremstår som en mer tungvint metode enn å utføre analysen selv? Kan dette variere ut fra størrelsen på datamaterialet?

Presentasjonsoppgave

Ta frem rapporten du lagde i presentasjonsoppgaven på side 27. Bruk ExCel til å gjøre så mange analyser som mulig av tallmaterialet.

Utvid rapporten du laget med kommentarer fra analysen. Det kan være interessant å sammenligne:

- De enkelte sentral- og spredningsmål for hver av byene
- Sentral- og spredningsmål mellom byene
- Sentral- og spredningsmål mellom 2014 og hva som er normalt

Lever rapporten til faglærer. Jo flere relevante kommentarer du har med jo høyre måloppnåelse vil rapporten gi.

En eksamensoppgave

Steffen bruker en app for å samle data om sykkelturene sien.
Han setter dataene i en tabell.
Tabellen inneholder to typer opplysninger:
1. Gjennomsnittsfart for hver kilometer
2. Antall meter stigning fo rhver kilometer

Vennene var imponerte, og det hadde blant annet disse kommentarene og spørsmålene til Steffen:
«Wow, Steffen. Det ble mange mil. Hvor lang tid brukte du»?
«Oj, det ble høyt etter hvert. Hvor mange høydemeter ble det i alt»?
«Skal si du holdt bra gjennomsnittfart»
«Litt av ei løype, det går jo opp og ned hele tiden».

Bruk tabellen nedenfor og gjør beregninger, lag diagrammer og gi en beskrivelse av sykkelturen.

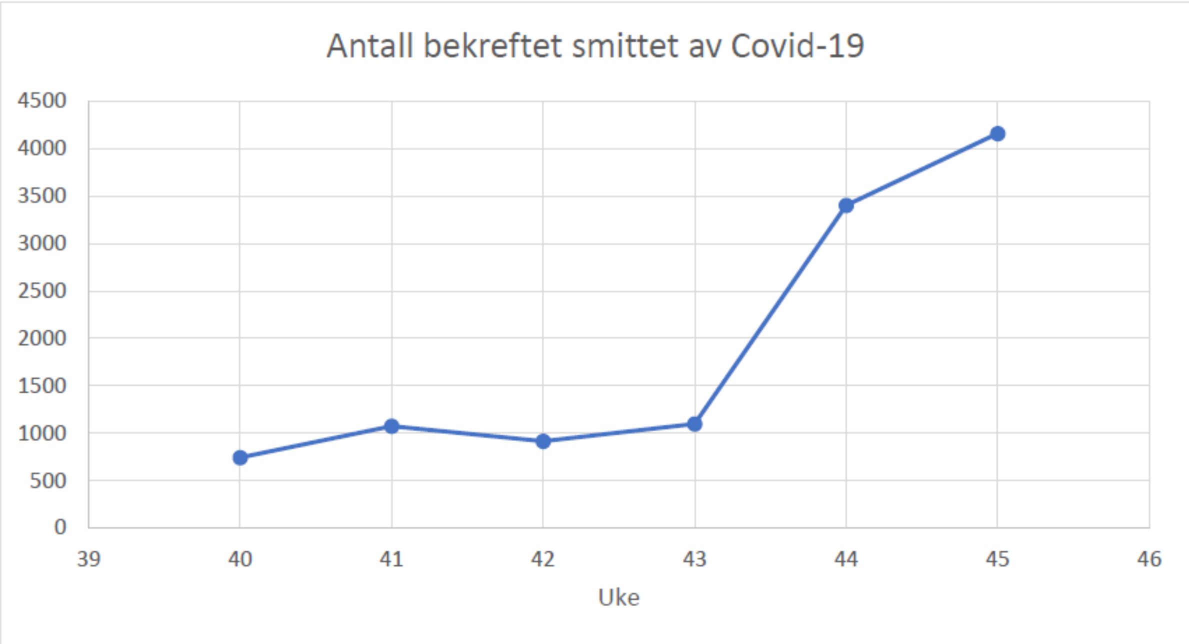
Kilometer (Første, andre ...)	Gjennomsnittsfart denne kilometeren (km/h)	Stigning denne kilometeren (m)
1.	22,92	27
2.	23,66	25
3.	17,26	65
4.	23,83	13
5.	36,84	–37
6.	38,02	–42
7.	17,36	–29
8.	23,38	–25
9.	24,34	10
10.	23,03	19
11.	16,76	26
12.	15,07	17
13.	14,69	7
14.	17,38	13
15.	24,70	–13
16.	15,67	47
17.	17,08	–7
18.	14,81	39
19.	15,06	42
20.	15,63	44

Løsningsforslag

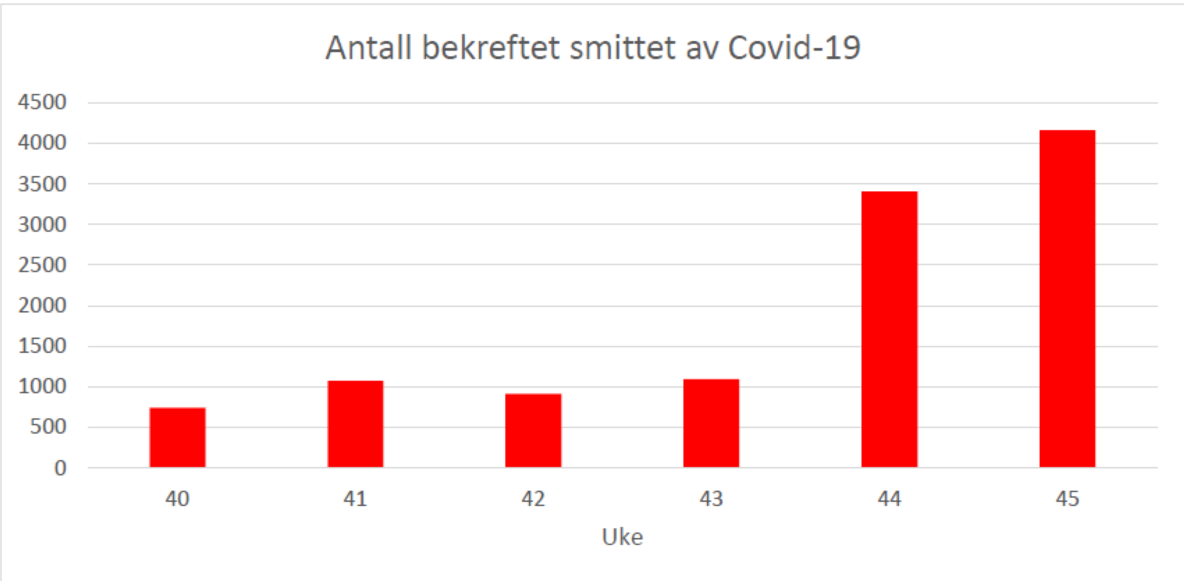
Oppgave 1

a)

Dersom man ønsker å vise utvikling i smitte disse ukene:



Dersom man ønsker å vise antall smitte disse ukene:

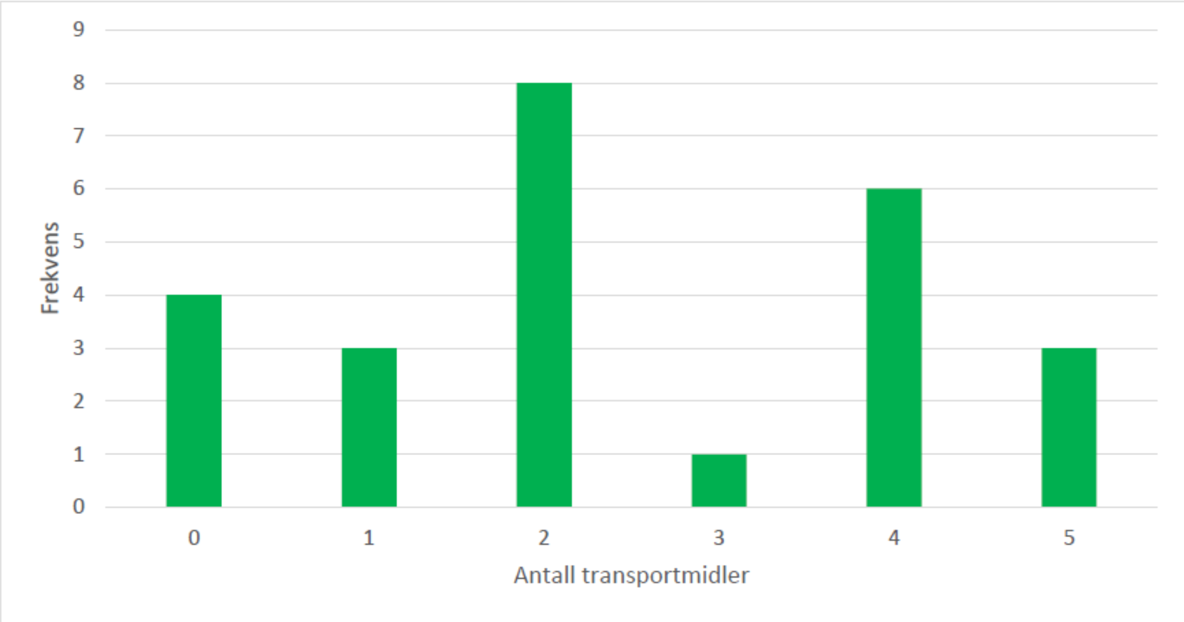


b) Det passer ikke med et sektordiagram fordi datamaterialet kun gir informasjon om antall smittete i enkelte uker

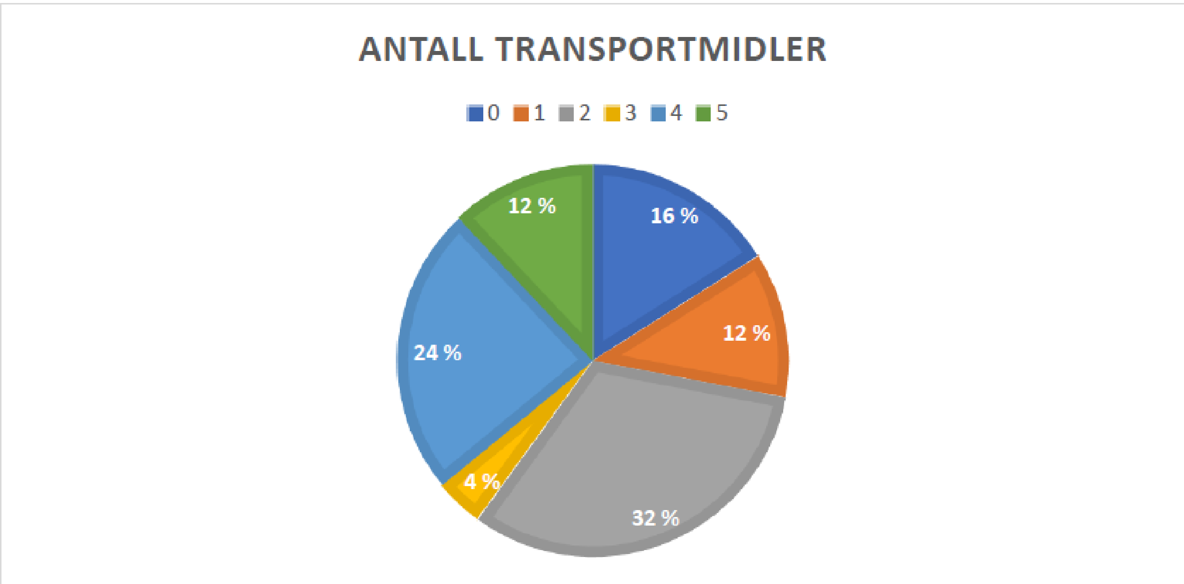
Oppgave 2

a)

Dersom man ønsker å frekvensen til antall transportmidler:

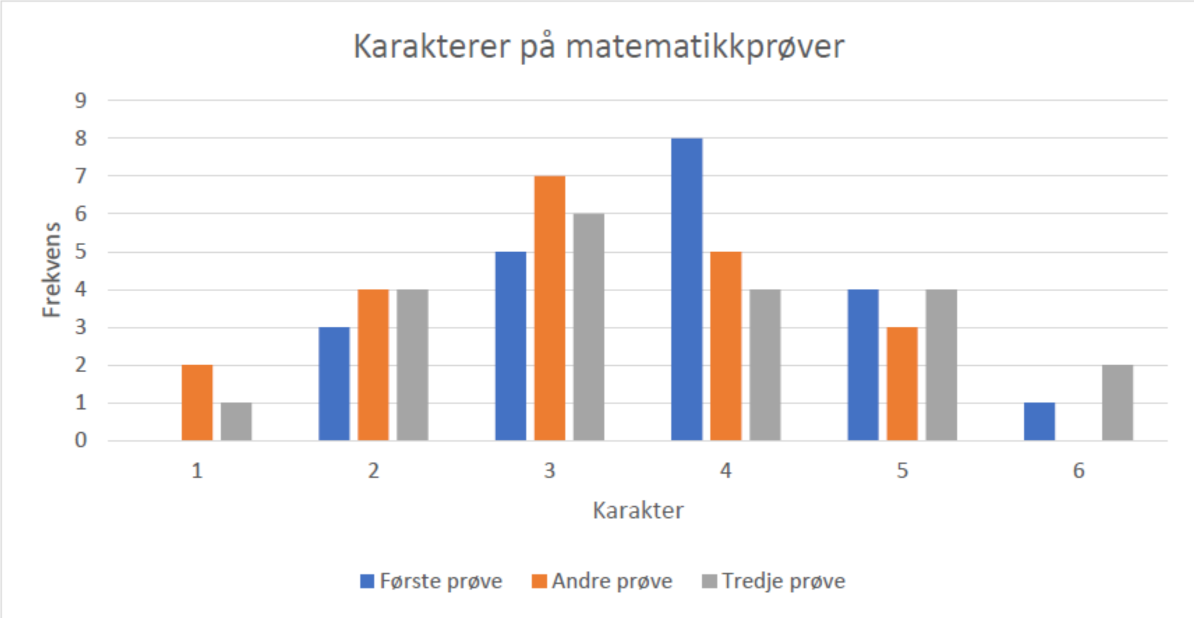


Dersom man ønsker å vise fordelingen i bruk av antall transportmidler:



b) Det passer ikke med et linjediagram fordi datamaterialet ikke viser utvikling over tid.

Oppgave 3



Oppgave 4

a) Det er to karakterer i midten (3 og 4). Medianen blir da 3,5.

b) Denne eleven fikk flest 3-ere.

c) Gjennomsnittskarakteren er 3,7.

d) Eleven fikk karakteren 5 på omtrent 17 % av prøvenen.

e) Den beste prøven var 4 karakterer bedre enn den dårligste.

Oppgave 5

Vi spurte 8 elever hvor mye penger de hadde brukt i kantina i storefri. Nedenfor finner du svarene de ga (i kroner):

55, 70, 45, 60, 130, 50, 65 og 70

a) Den som brukte mest penger brukte 85 kroner mer enn den som brukte minst.

b) I gjennomsnitt brukte elevene omtrent 68 kroner.

c) Midtpunktet til datamaterialet er 62,50 kroner.

d) 37,5 % av elevene brukte mer enn gjennomsnittet, mens 62,5 % av de spurte brukte mindre enn gjennomsnittet.

Oppgave 6

I gjennomsnitt ble det registrert 1 898 nye smittetilfeller hver uke i perioden.
Median for antall smittede per uke i perioden er 1 084.
Uka med flest smittede registrerte 3 420 flere smittede enn uka med færrest smittede.

Oppgave 7

	A	B
1	Uke	Antall bekreftet smittet av Covid-19
2	40	742
3	41	1 072
4	42	915
5	43	1 096
6	44	3 402
7	45	4 162
8		
9	Gjennomsnitt	1898
10	Median	1084
11	Variasjonsbredde	3 420

9	Gjennomsnitt	=GJENNOMSNITT(B2:B7)
10	Median	=MEDIAN(B2:B7)
11	Variasjonsbredde	=MAKSA(B2:B7)-MIN(B2:B7)

Formler og digitale ferdigheter

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

Målet for opplæringen er at eleven skal kunne:

- identifisere variable størrelser i ulike situasjoner, og bruke dem til utforsking og generalisering
- tolke og bruke formler som gjelder samfunnsliv og arbeidsliv
- bruke digitale verktøy i utforsking og problemløsning knyttet til egenskaper ved funksjoner, og diskutere løsningene

Formler

I både hverdagen og i arbeidslivet har vi behov for å beskrive hvordan to eller flere størrelser henger sammen.

Eksempler på dette kan være:

- Prisen for smågodt i en butikk er 135 kr per kg
- En trebarnsfamilie må betale for to voksenbilletter og tre barnebilletter dersom de skal delta på aktiviteter
- En butikkansatt skal ha 119 kroner per time hen jobber

For å beskrive sammenhenger matematisk bruker vi **formler**.

En **formel** er en **regnemetode** hvor vi ikke kjenner alle **verdiene**.

Når vi kjenner alle **verdiene** forandres en **formel** fra en **regnemetode** til et **regnestykke**.

Tenk deg at en familie som består av 2 voksne og 3 barn skal tilbringe en dag i Oslo, hvor de skal betale seg på ulike aktiviteter. Før vi vet hvor mye billettene til aktivitetene koster kan vi ikke regne ut hvor mye familien må betale.

Vi kan imidlertid lage en **regnemetode** eller en **formel** som kan brukes til å regne ut hvor mye det vil koste familien å delta på en aktivitet.

I dette tilfellet vil **formelen** bli slik:

$$Pris\ for\ en\ aktivitet = 2\ \cdot voksenbillett + 3\ \cdot barnebillett$$

Vi forkorter gjerne ordene med en bokstav, slik at det blir mindre å skrive. Det er viktig at vi informerer om hva bokstavene representerer:

$Pris\ for\ en\ aktivitet = P$

$Voksenbillett = v$

$Barnebillett = b$

Dermed kan vi skrive **formelen** på en enklere måte:

$$P = 2v + 3b$$

Lurer du på hvor det ble av multiplikasjonstegnet? Vi bruker regelen at

$$2\ \cdot v = 2v \qquad \text{og} \qquad 3\ \cdot b = 3b$$

Resultat, konstanter og variabler

En **formel** er satt sammen av bokstaver og tall. De ulike ingrediensene har ulike navn, og det er viktig at du forstår disse begrepene.

Vi fortsetter med **formelen** som beskriver hvor mye en familie må betale for å delta på en aktivitet, og setter navn på **leddene** i **formelen**:

Konstant

Resultat $\rightarrow$ $P = 2v \cdot 3b$

Variabel

Resultat: det vi ønsker å regne ut, svaret på regnestykket. I dette tilfellet: hvor mye familien må betale for å delta på en aktivitet.

Konstant: noe som ikke forandrer **verdi**. I dette tilfellet: familien må alltid regne ut prisen for **2** voksne og **3** barn.

Variabel: noe som kan forandre **verdi**. I dette tilfellet: både prisen for en voksenbillett og prisen for en barnebillett er avhengig av hvilken aktivitet familien

Oppgave 1

Lag **formler** til situasjonen nedenfor. Velg passende bokstaver som forkortelse.

a) En barnefamilie består av to voksne og to barn. Lag en formel som kan brukes til å regne ut hvor mye familien betaler når de skal delta på ulike aktiviteter.

b) I de fleste fotballserier får et lag tre poeng for seier, ett poeng for dersom en kamp ender uavgjort og null poeng dersom de taper kampen. Lag en formel som kan brukes til å regne ut poengsummen til et lag utfra utfallet av kampene.

c) Dersom du ønsker å ta førerkort i klasse b (bil) må du beregne cirka 17 000 kroner i faste kostnader. I tillegg koster en kjøretime omtrent 600 kroner. Lag en formel som kan brukes til å regne ut totalpris for å ta førerkort utfra hvor mange kjøretimer du trenger.

Innsetting av verdier i formler

Når vi får oppgitt **verdien** til **variablene**, kan vi erstatte **variablene** i **formelen** med de oppgitte **verdiene**. Dermed endrer vi **formelen** fra å være en regnemetode til å bli et regnestykke, hvor vi kan regne ut svaret.

Tenk deg at familien ovenfor skal reise med t-banen, og velger å kjøpe enkeltbilletter. På Ruter.no finner de følgende prisoversikt:

Voksenbillett: 38 kr
Barnebillett: 19 kr

For å regne ut hvor mye familien må betale, må vi ta utgangspunkt i **formelen** vi lagde

$$P = 2v + 3b$$

og erstatte **variablene** med de oppgitte **verdiene**. Dermed får vi følgende regnestykke:

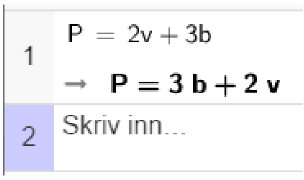
$$P = 2 \cdot 38 + 3 \cdot 19 = 76 + 57 = \underline{\underline{133}}$$

Formelregning i CAS (Computer Algebra System)

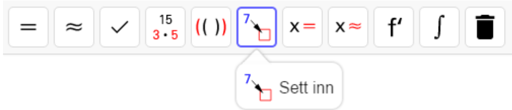
Det finnes digitale verktøy som kan hjelpe oss med innsetting i **formler**. Ett av disse verktøyene er **CAS**, som du finner i **GeoGebra**.

Trykk «Oppsett», og velg CAS

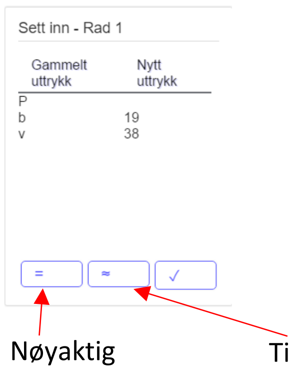
Skriv inn **formelen**



Velg «Sett inn»



Vi får opp denne boksen. Her kan vi erstatte **variablene** med **verdier.**



Vi kan velge mellom å få et nøyaktig svar, eller et tilnærmet svar. I dette tilfellet blir svarene like.

Oppgave 2

Til denne aktiviteten trenger du to terninger med ulik farge, for eksempel en hvit terning og en rød terning. Målet er å oppnå høyest mulig sluttsum.

Kast begge terningene. Den hvite terningen skal erstatte **variabelen** H i en **formel**, mens den røde terningen skal erstatte **variabelen** R.

Du skal gjøre aktiviteten to ganger. Første gang skal du løse **formlene** i rekkefølge. Begynn med den øverste.

Formel	Verdi		Innsetting	Sum
	H	R		
Sum = 3H + R				
Sum = 2R - H				
Sum = 4R + 2H				
Sum = 2R – 1				
Sum = 2H + 4				

Når du har regnet alle **formlene**, skal du gjøre aktiviteten en gang til. Denne gangen kaster du terningene først, og bestemmer deg for hvilken **formel** du skal løse etter at du har sett resultatet av kastet. Hver **formel** skal kun løses en gang.

Formel	Verdi		Innsetting	Sum
	H	R		
Sum = 3H + R				
Sum = 2R - H				
Sum = 4R + 2H				
Sum = 2R – 1				
Sum = 2H + 4				

Oppgave 3

For over 2000 år siden beskrev greske matematikere hvordan vi kan regne ut arealet og volumet til geometriske figurer. **Formlene** de skrev ned er fortsatt gyldige.

Nedenfor finner du oppgaver med noen av de meste kjente **formlene**. Du skal løse minst fire av dem ved hjelp av CAS.

a) Arealet til et rektangel kan regnes ved hjelp av formelen $A = l \cdot b$
Finn arealet til et rektangel med $l = 3{,}8\ m$ og $b = 6{,}2\ m$

b) Arealet til en trekant kan regnes ved hjelp av formelen $A = \frac{g \cdot h}{2}$
Finn arealet til en trekant med $g = 4{,}1\ cm$ og $h = 2{,}8\ cm$

c) Arealet til en sirkel kan regnes ved hjelp av formelen $A = \pi r^2$.
Finn arealet til midtsirkelen på en fotballbane, som har $r = 9\ m$

d) Volumet til et rektangulært prisme kan regnes ved hjelp av formelen $V = l \cdot b \cdot h$
Finn volumet til et rektangulært prisme med $l = 40\ cm$, $b = 28\ cm$ og $h = 30\ cm$

e) Volumet til en sylinder kan regnes ved hjelp av formelen $V = \pi r^2 \cdot h$
Finn volumet til en sylinder med $r = 2\ dm$ og $h = 1{,}5\ dm$

f) Volumet til en kule kan regnes ved hjelp av formelen $V = \frac{4}{3}\pi r^3$
Finn volumet til en kule med $r = 5\ cm$

g) Overflaten til et rektangulært prisme kan regnes ut ved hjelp av formelen
$O = 2lb + 2lh + 2hb$
Finn overflaten til et rektangulært prisme med $l = 8\ cm$, $b = 12\ cm$ og $h = 10\ cm$

h) Overflaten til en sylinder kan regnes ut ved hjelp av formelen $O = 2\pi r^2 + 2\pi rh$
Finn overflaten til en sylinder med $r = 7\ cm$ og $h = 12\ cm$

i) Overflaten til en kule kan regnes ut ved hjelp av formelen $O = 4\pi r^2$
Finn overflaten til en basketball med $r = 12\ cm$

Utregning av variabler i formler

Dersom vi får oppgitt **resultatet** til en **formel**, kan vi regne ut **verdien** til en av **variablene** i **formelen**. Dette kan gjøres både ved hjelp av likningsregler du lærte på ungdomskolen, eller ved å bruke CAS.

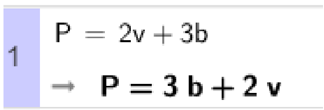
Tenk deg at familien fra forrige eksempel betalte 410 kroner for en aktivitet, og at prisen for voksenbillett var 100 kroner. Hvor høy var prisen for en barnebillett?

Vi kan løse dette ved hjelp av likningsregler:

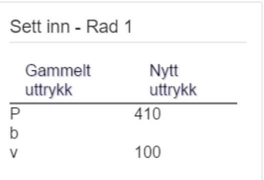
$3b + 2 \cdot 100 = 410$	Setter inn **verdien** for voksenbillett og **resultatet** i **formelen**
$3b + 200 = 410$	Regner ut
$3b = 410 - 200$	Trekker fra 200 på hver side av likhetstegnet
$3b = 210$	Regner ut
$b = 70$	Dividerer med 3 på hver side av likhetstegnet

Vi kan løse dette ved hjelp av CAS:

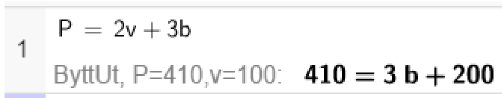
Vi skriver inn **formelen**



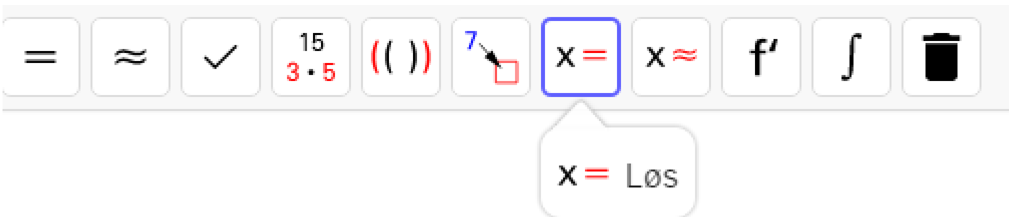
og setter inn **verdiene**



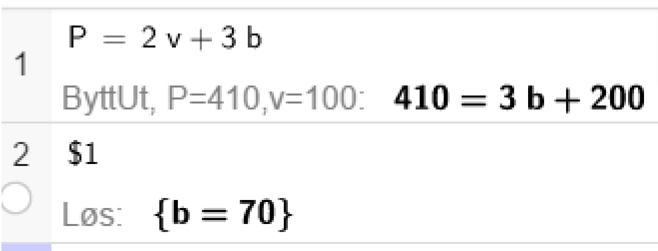
Dermed får vi følgende:



Når vi står i rad 2, kan vi trykke på «Løs»:



CAS løser likningen for oss:



Oppgave 4

Familien fra eksempelet dro på kino, og betalte til sammen 630 kroner for billettene. Barnebillettene kostet 120 kroner per stykk.

Hvor mye kostet voksenbillettene per stykk?

Oppgave 5

Fra fysikkens verden kan vi lære at bevegelsesenergi, *E,* måles i joule (J) og kan regnes ut med formelen

$$E = \frac{1}{2}\,mv^2$$

der *m* er massen målt i kilogram (kg) og *v* er farten målt i meter per sekund (m/s).

Hvor stor masse *m* har en fallende kule med bevegelsesenergi på 8000 joule og som faller i 40 m/s?

Oppgave 6

Løs noen av oppgavene nedenfor i CAS.

a) Arealet til et rektangel kan regnes ved hjelp av formelen $A = l \cdot b$
Finn lengden til et rektangel med $A = 32{,}8\ m^2$ og $b = 6{,}2\ m$

b) Arealet til en trekant kan regnes ved hjelp av formelen $A = \frac{g \cdot h}{2}$
Finn høyden til en trekant med $A = 16\ cm^2$ og $g = 6{,}8\ cm$

c) Arealet til en sirkel kan regnes ved hjelp av formelen $A = \pi r^2$.
Finn radiusen til en sirkel med $A = 100\ cm^2$

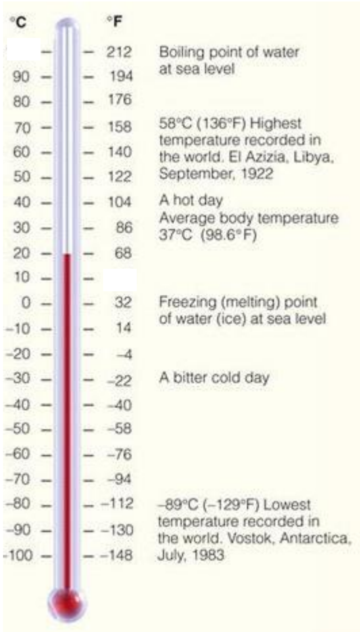
d) Volumet til et rektangulært prisme kan regnes ved hjelp av formelen $V = l \cdot b \cdot h$
Finn høyden til et rektangulært prisme med $V = 200\ cm^3$, $b = 4\ cm$ og $l = 12\ cm$

e) Volumet til en sylinder kan regnes ved hjelp av formelen $V = \pi r^2 \cdot h$
Finn radius til en sylinder med $V = 7\ dm^3$ og $h = 0{,}8\ dm$

f) Volumet til en kule kan regnes ved hjelp av formelen $V = \frac{4}{3}\pi r^3$
Finn radius til en kule med $V = 3\ 000\ cm^3$

Oppgave 7

I Norge måler vi temperatur i antall Celsius, forkortet ℃. I USA brukes en annen skala, som kalles Fahrenheit, forkortet ℉.



Sammenhengen mellom ℃ og ℉ kan beskrives ved formelen

$$℉ = ℃ \cdot \frac{9}{5} + 32$$

a) Bruk CAS til å
   - Gjøre 0℃ om til ℉
   - Gjøre 212℉ om til ℃

   Hvorfor har vi valgt akkurat disse temperaturene?

b) Velg noen andre temperaturer som du omgjør mellom skalaene.

Oppgave 8

Har du noen gang opplevd at strømmen hjemme har gått? Dette kan skyldes at det er koblet for mange elektriske apparater i stikkontaktene, noe som fører til en overbelastning av strømkretsen.

Alle strømkretser har en maksimal kapasitet, og dersom det trekkes mer strøm enn dette vil sikringen slå ut for å forhindre brann. Maksimal kapasitet til en strømkrets kan regnes ut med **formelen** ovenfor.

Maksimal belastning

$$P = U \cdot I$$

P = effekt, som måles i Watt (W)
U = spenning, som måles i Volt (V)
I = strøm, som måles i Ampere (A)

I Norge har vi en spenning på 230 Volt. En normal kurs i hus og leiligheter er på 16 Ampere. For sikkerhets skyld vil sikringen ut av dersom det brukes 80 % av maksimal belastning.

a) Hvor høy er kapasiteten (målt i Watt) på en normal kurs i hus og leiligheter i Norge?

Tenk deg at en strømkrets går til badet, og en annen går til kjøkkenet.

b) Undersøk effekten til ulike elektriske apparater som er vanlig å bruke på badet og på kjøkkenet. Lag en oversikt over ulike kombinasjoner av apparater som kan være tilkoblet en strømkrets uten at sikringen slår ut.

Noen strømkretser har kurs på 10A.

c) Hvordan vil dette påvirke svarene dine i a) og b)?

Formler er mye brukt ved dosering av medisin. På de neste sidene finner du tre eksempler på dette.

Oppgave 9

Noen medisiner doseres etter hvor stor kroppsoverflate en pasient har. Mostellers **formel** kan brukes til å beregne arealet av en persons kroppsoverflate.

> Mostellers **formel**
>
> $$O = \frac{1}{60} \cdot \sqrt{h \cdot m}$$
>
> O: antall kvadratmeter kroppsoverflate
> h: personens høyde målt i centimeter
> m: antall kilogram personen veier

En person er 180 cm høy og veier 75 kg

a) Bruk Mostellers formel til å beregne arealet av kroppsoverflaten til denne personen.
b) Hva vil skje med denne personens kroppsoverflate dersom hen går opp eller ned i vekt?

En pasient veier 61 kg. Arealet av kroppsoverflaten er 1,66 m^2

c) Hvor høy er denne pesonen ifølge Mostellers formel?

Oppgave 10

Parklands **formel** blir brukt for å beregne hvor mange milliliter væske en pasient med store brannskader skal ha tilført i løpet av de første 24 timene etter en forbrenning.

> Parklands **formel**
>
> $$V = 4 \cdot m \cdot A$$
>
> V: Væske (milliliter)
> m: personens vekt målt i kilogram
> A: prosenten av kroppsoverflaten som er forbrent

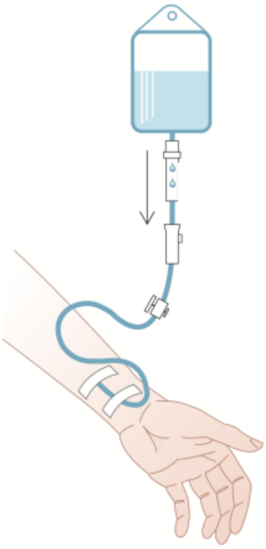
En pasient veier 63 kg, og 25 % av kroppsoverflaten er forbrent.

a) Hvor mye væske skal pasienten ha tilført i løpet av de 24 første timene etter forbrenniga?
b) Hvordan vil endring i vekt påvirke mengden væske?

En annen pasient veier 85 kg. En lege beregener at pasienten skal ha tilført 10 000 mL væske de første 24 timene etter en forbrenning.

c) Hvor stor prosentandel av kroppsoverflaten er forbrent hos denne pasienten?

Oppgave 11



Intravenøst drypp brukes for å gi pasienter væsker og flytende medisiner.

For å regne ut drypphastigheten H i dråper per minutt for intravenøse drypp brukes **formelen**

$$H = \frac{d \cdot v}{60 \cdot t}$$

der

d = dråpefaktoren målt i dråper per milliliter
v = volumet i milliliter av den intravenøse væsken
t = antall timer det vil ta å tilføre den intravenøse væsken

En pasient skal ha intravenøst drypp i 2 timer. Volumet av den intravenøse væsken er 240 mL. Dråpefaktoren er 20 dråper per milliliter.

a) Regn ut drypphastigheten H.
b) Hva skjer med H dersom t dobles, mens d og v ikke endres?

En annen pasient skal ha intravenøst drypp i 3 timer med en drypphastighet på 50 dråper per minutt. Dråpefaktoren er 25 dråper per milliliter.

c) Bestem volumet av den intravenøse væsken denne pasienten skal ha.

Variabel med ulik verdi

I noen tilfeller kan det være interessant å erstatte **variablene** i en **formel** med ulike **verdier**, for å se hva **resultatet** blir.

I oppgave 1 b) ble vi informert om totalprisen knyttet til oppkjøring til førerkort, og vi lagde følgende **formel**:

$$P = 600t + 17\,000$$

hvor P betyr totalpris, mens t står for antall kjøretimer.

Før man begynner øvelseskjøringen kan det være vanskelig å vite nøyaktig hvor mange kjøretimer man kommer til å bruke, og derfor blir det også vanskelig å beregne nøyaktig totalpris.

Det man imidlertid kan være helt sikker på, er at jo flere kjøretimer man bruker jo høyere blir totalprisen.

Før du begynner med øvelseskjøringen kan du lage en oversikt over hvor høy totalprisen vil bli alt ettersom hvor mange kjøretimer du bruker. Til dette kan du bruke ExCel eller GeoGebra.

Det kan være lurt å tenke gjennom hvor stor oversikt du vil lage. I løsningen på de neste sidene begrenser vi oversikten til å gjelde for 15 til 30 timer.

Totalpris for 15 til 30 timer, laget i ExCel

	A	B	C	D
1	Antall timer	Pris per time	Faste kostnader	Totalpris
2	15	kr 600	kr 17 000	kr 26 000
3	16	kr 600	kr 17 000	kr 26 600
4	17	kr 600	kr 17 000	kr 27 200
5	18	kr 600	kr 17 000	kr 27 800
6	19	kr 600	kr 17 000	kr 28 400
7	20	kr 600	kr 17 000	kr 29 000
8	21	kr 600	kr 17 000	kr 29 600
9	22	kr 600	kr 17 000	kr 30 200
10	23	kr 600	kr 17 000	kr 30 800
11	24	kr 600	kr 17 000	kr 31 400
12	25	kr 600	kr 17 000	kr 32 000
13	26	kr 600	kr 17 000	kr 32 600
14	27	kr 600	kr 17 000	kr 33 200
15	28	kr 600	kr 17 000	kr 33 800
16	29	kr 600	kr 17 000	kr 34 400
17	30	kr 600	kr 17 000	kr 35 000

For å spare tid lager vi formler i den første raden, som vi kopierer nedover.

Dette er noe du må trene på dersom du skal beherske ExCel.

Vi brukte disse formlene:

	A	B	C	D
1	Antall timer	Pris per time	Faste kostnader	Totalpris
2	15	600	17000	=A2*B2+C2
3	16	600	17000	=A3*B3+C3
4	17	600	17000	=A4*B4+C4
5	18	600	17000	=A5*B5+C5
6	19	600	17000	=A6*B6+C6
7	20	600	17000	=A7*B7+C7
8	21	600	17000	=A8*B8+C8
9	22	600	17000	=A9*B9+C9
10	23	600	17000	=A10*B10+C10
11	24	600	17000	=A11*B11+C11
12	25	600	17000	=A12*B12+C12
13	26	600	17000	=A13*B13+C13
14	27	600	17000	=A14*B14+C14
15	28	600	17000	=A15*B15+C15
16	29	600	17000	=A16*B16+C16
17	30	600	17000	=A17*B17+C17

Totalpris for 15 til 30 timer, laget i GeoGebra.

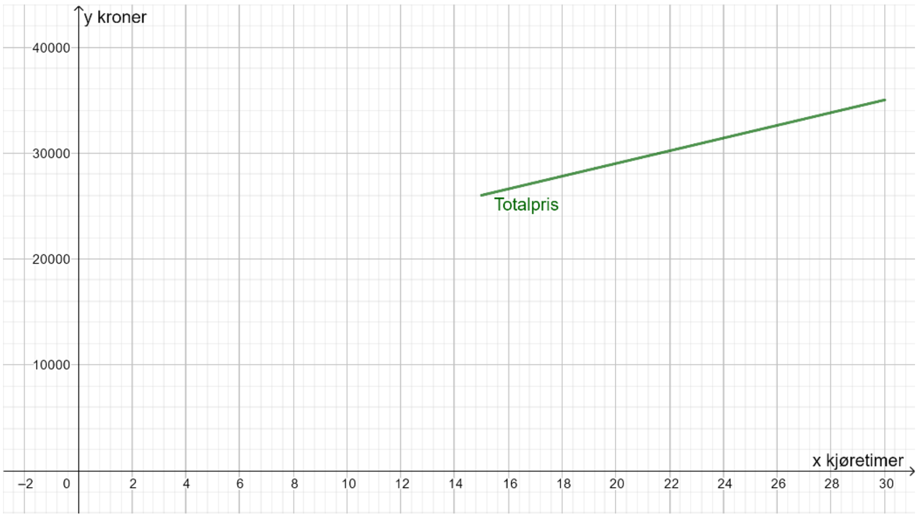
Merk: GeoGebra forstår kun **variabelen** x. Vi må derfor skrive inn

$$Totalpris(x) = 600x + 17000, 15 \leq x \leq 30$$

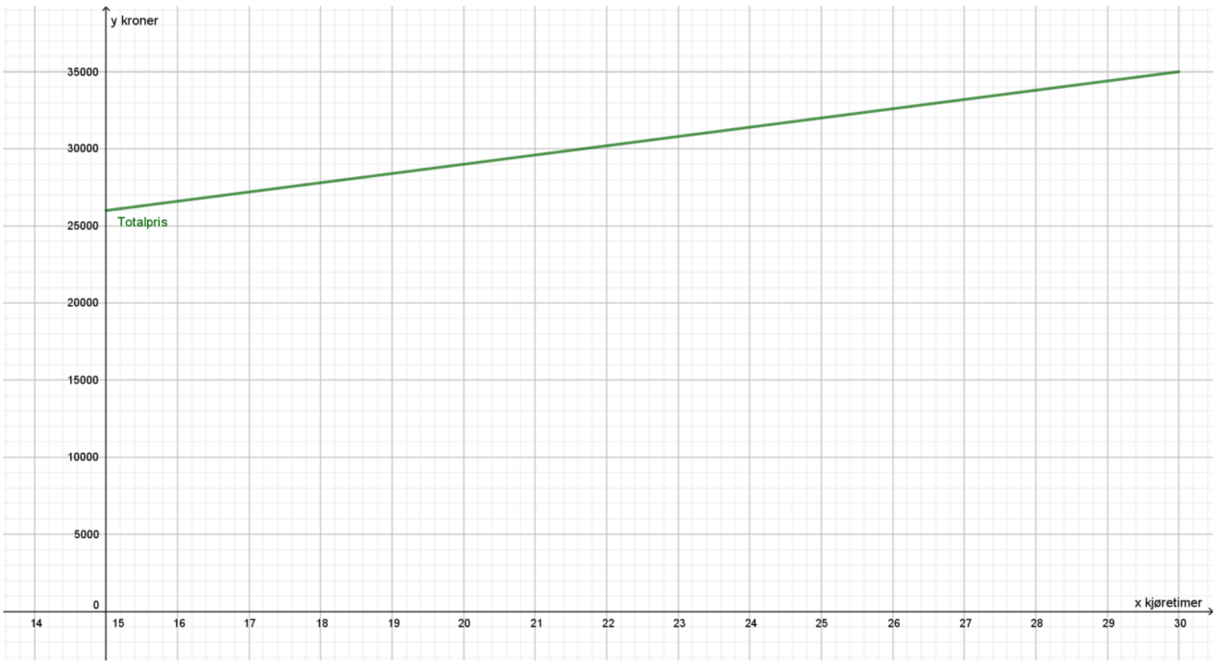
og får denne formelen i algebrafeltet:

$$\text{Totalpris}(x) = 600\,x + 17000, \quad (15 \leq x \leq 30)$$

Det gir oss denne linja i grafikkfeltet:



Vi kan flytte y-aksen til dit grafen starter, slik at vi unngår det tomme området og får et mer detaljert bilde:



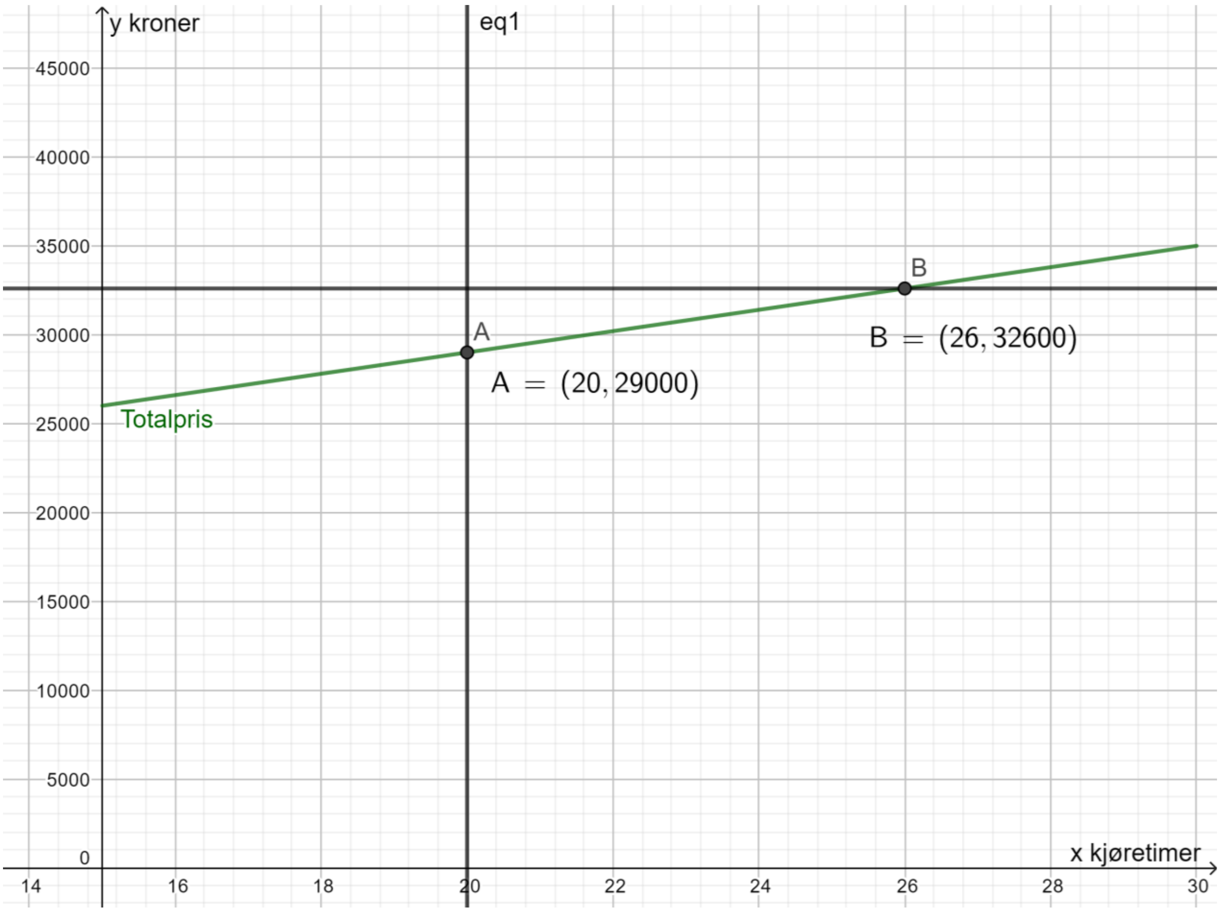
Nøyaktig avlesning i GeoGebra

Etter at vi har tegnet inn grafen i GeoGebra, kan vi ønske å finne nøyaktig informasjon om enten totalpris eller antall kjøretimer.

Vi kan for eksempel ønske å finne totalprisen for 20 kjøretimer, eller hvor mange kjøretimer du brukte dersom totalprisen ble 32 600 kroner.

Dersom vi ønsker å finne totalprisen for 20 kjøretimer, må vi tenke at vi finner 20 kjøretimer på x-aksen. Derfor skriver vi inn x = 20, og bruker en knapp som heter «skjæring mellom to objekt». Punkt A forteller oss at 20 kjøretimer gir en totalpris på 29 000 kroner.

Dersom vi ønsker å beregne antall kjøretimer når totalprisen ble 32 600 kroner, må vi tenke at vi finner 32 600 kroner på y- aksen. Derfor skriver vi inn y = 32600, og bruker knappen «skjæring mellom to objekt». Punkt B forteller oss at en totalpris på 32 600 kroner betyr at du har brukt 26 kjøretimer.



Oppgave 12

Trond selger mobilabonnementer. Han får 120 kroner for hver time han jobber, pluss 30 kroner for hvert abonnement han selger.

a) Lag en **formel** som kan brukes til å regne ut hvor mye han tjener i løpet av en time.
b) Lag en oversikt som vist på de forrige sidene, som kan brukes til å finne ut hvor mye han tjener alt ettersom hvor mye han selger. Du skal både lage en oversikt i ExCel og i GeoGebra. Bruk fornuftige begrensninger.

Oppgave c) og d) skal du løse to ganger: både ved hjelp av ExCel og GeoGebra.

c) Hvor mye tjener han dersom han selger 7 abonnementer i løpet av en time?
d) Hvor mange abonnenter må han selge dersom han skal tjene 400 kroner i løpet av en time?
e) Hvilket av de to verktøyene likte du best? Har verktøyene noen begrensninger?

Oppgave 13

Sarah har deltidsjobb som bokselger. Hun har en grunnlønn på 150 kroner per time. I tillegg får hun 15 kroner per bok hun selger.

a) Lag en **formel** som kan brukes til å regne ut hvor mye hun tjener i løpet av en time.

Løs de neste oppgavene digitalt. Du velger selv om du vil bruke ExCel eller GeoGebra.

b) Lag en oversikt som vist på de forrige sidene, som kan brukes til å finne ut hvor mye hun tjener alt ettersom hvor mye hun selger. Bruk fornuftige begrensninger.
c) Hvor mye tjener hun i løpet av en time dersom hun selger 5 bøker?
d) Hvor mange bøker må hun selge for å tjene 450 kroner i løpet av en time?

Presentasjonsoppgave

Når du skal øvelseskjøre, vil kjørelæreren din snakke mye med deg om bilens bremselengde. Du vil også få spørsmål om dette på teoriprøven.

Bremselengden til en bil er avhengig av to faktorer: bilens fart og hjulenes veigrep. Det er viktig å være klar over at slitte dekk eller våt asfalt gir dårligere veigrep.

En bils bremselengde (S) kan beskrives ved hjelp av formelen

$$S = \frac{v^2}{2 \cdot \mu \cdot g}$$

hvor

v = bilens fart, målt i meter per sekund. Se omgjøring mellom m/s og km/t nedenfor.

g = gravitasjonens påvirkningskraft ≈ 9,81 (på jorda).

μ = veigrepet (friksjonskoeffisienten). Denne endres etter forholdene. Se tabellen nedenfor.

Kjøreforhold	μ
Tørr asfalt	1,0
Våt asfalt	0,6
Snø	0,3
Is	0,15

Km/t		**m/s**
30	=	8,3
40	=	11,1
50	=	13,9
60	=	16,7
70	=	19,4
80	=	22,2
90	=	25,0
100	=	27,8

Bruk **formelen** som beskriver en bils bremselengde, og lag en presentasjon av hvordan bilens bremselengde endres etter hvert som både farten og veigrepet endres.

Du velger selv om du vil bruke CAS, GeoGebra eller ExCel.

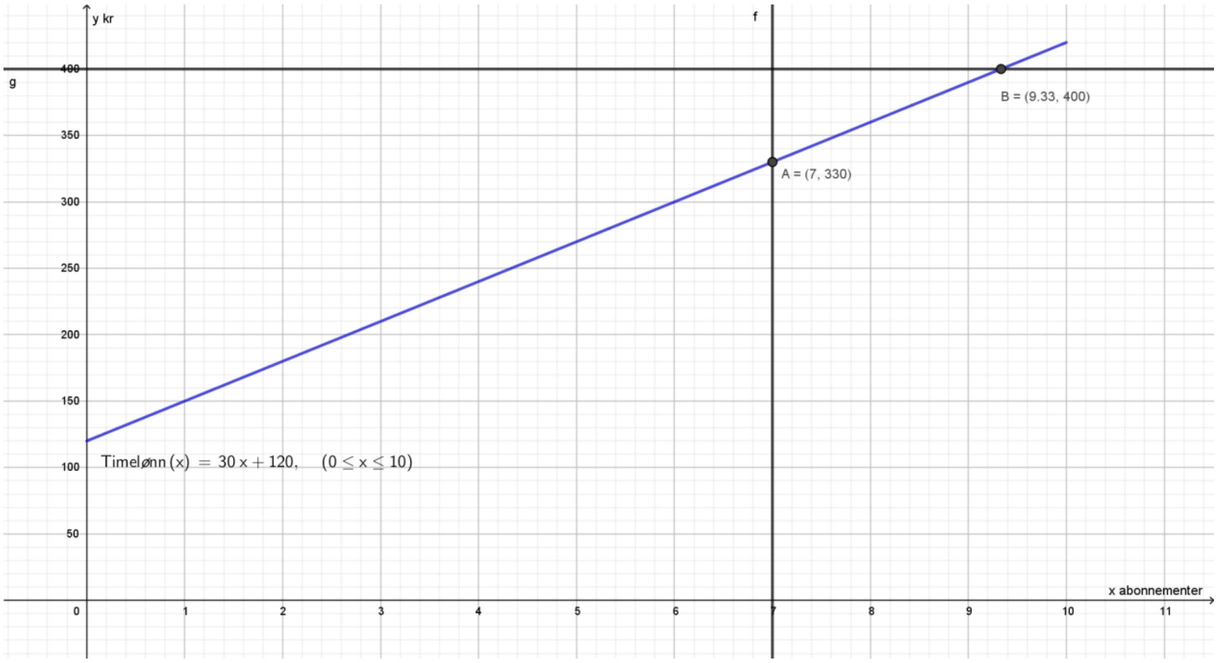
Løsningsforslag

Oppgave	Svar	Oppgave	Svar
1	a) $S = 2v + 2b$ b) $P = 3s + u$	**8**	a) 2944 W c) 1840 W
	c) $T = 600k + 17000$	**9**	a) 1,94 m^2 b) Økt vekt vil føre til økt
3	a) 23,6 m^2 b) 5,7 cm^2 c) 254 m^2		overflateareal. Nedgang i vekt vil føre
	d) 33,6 dm^3 e) 6 dm^3 f) 523 cm^3		til nedgang i overflateareal.
	g) 592 cm^2 h) 923 cm^2 i) 1809 cm^2		c) 162,6 cm
4	135 kroner	**10**	a) 6300 mL b) Høyere vekt betyr mer
5	10 kg		væske. c) 29,4 %
6	a) 5,3 m b) 4,7 cm c) 5,6 cm	**11**	a) 40 dråper/min b) Drypphastigheten
	d) 4,2 cm e) 1,7 dm f) 8,9 cm		halveres. c) 360 mL
7	a) 32°F, 100°C. Dette er temperaturene	**12**	a) $T = 30a + 120$ b) 330 kr c) 10
	hvor vann endrer form.	**13**	a) $T = 15b + 150$ b) 225 kr c) 20

	A	B	C	D
1	**Oppgave 12**			
2				
3	Antall salg	Lønn per salg	Fast timelønn	Timelønn
4	1	kr 30	kr 120	kr 150
5	2	kr 30	kr 120	kr 180
6	3	kr 30	kr 120	kr 210
7	4	kr 30	kr 120	kr 240
8	5	kr 30	kr 120	kr 270
9	6	kr 30	kr 120	kr 300
10	7	kr 30	kr 120	kr 330
11	8	kr 30	kr 120	kr 360
12	9	kr 30	kr 120	kr 390
13	10	kr 30	kr 120	kr 420

	A	B	C	D
1	**Oppgave 12**			
2				
3	Antall salg	Lønn per salg	Fast timelønn	Timelønn
4	1	30	120	=A4*B4+C4
5	2	30	120	=A5*B5+C5
6	3	30	120	=A6*B6+C6
7	4	30	120	=A7*B7+C7
8	5	30	120	=A8*B8+C8
9	6	30	120	=A9*B9+C9
10	7	30	120	=A10*B10+C10
11	8	30	120	=A11*B11+C11
12	9	30	120	=A12*B12+C12
13	10	30	120	=A13*B13+C13

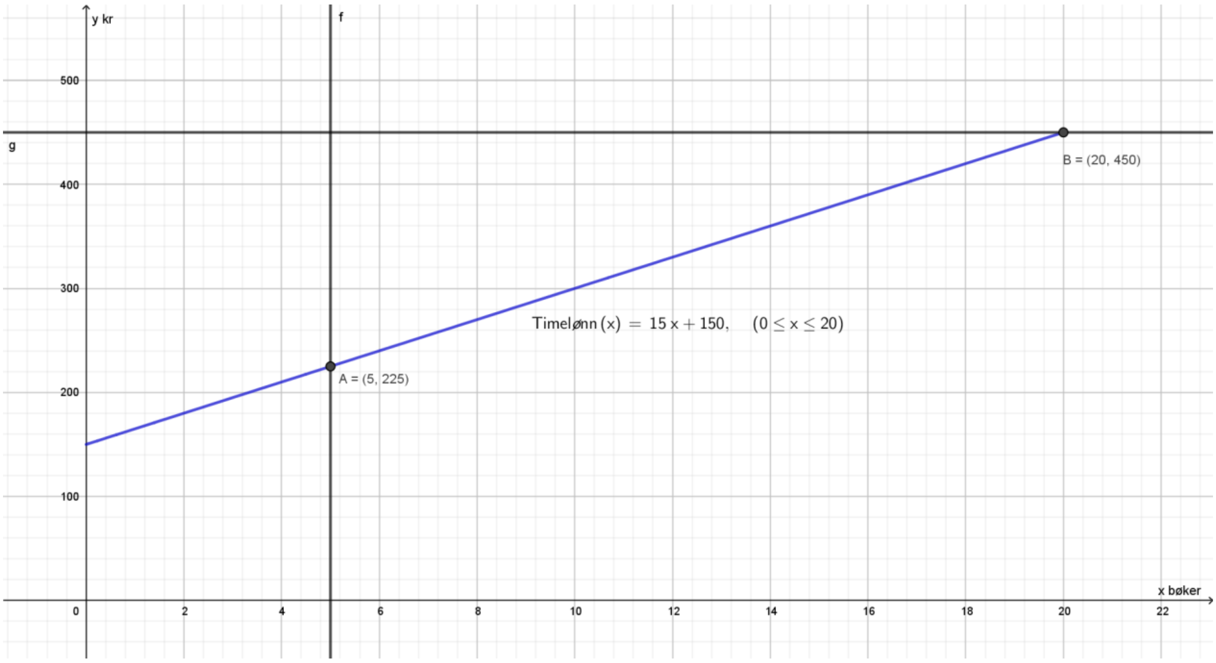
Oppgave 12



	A	B		C		D	
1	**Oppgave 13**						
2							
3	Antall salg	Lønn per salg		Fast timelønn		Timelønn	
4	1	kr	15	kr	150	kr	165
5	2	kr	15	kr	150	kr	180
6	3	kr	15	kr	150	kr	195
7	4	kr	15	kr	150	kr	210
8	5	kr	15	kr	150	kr	225
9	6	kr	15	kr	150	kr	240
10	7	kr	15	kr	150	kr	255
11	8	kr	15	kr	150	kr	270
12	9	kr	15	kr	150	kr	285
13	10	kr	15	kr	150	kr	300
14	11	kr	15	kr	150	kr	315
15	12	kr	15	kr	150	kr	330
16	13	kr	15	kr	150	kr	345
17	14	kr	15	kr	150	kr	360
18	15	kr	15	kr	150	kr	375
19	16	kr	15	kr	150	kr	390
20	17	kr	15	kr	150	kr	405
21	18	kr	15	kr	150	kr	420
22	19	kr	15	kr	150	kr	435
23	20	kr	15	kr	150	kr	450

	A	B	C	D
1	**Oppgave 13**			
2				
3	Antall salg	Lønn per salg	Fast timelønn	Timelønn
4	1	15	150	=A4*B4+C4
5	2	15	150	=A5*B5+C5
6	3	15	150	=A6*B6+C6
7	4	15	150	=A7*B7+C7
8	5	15	150	=A8*B8+C8
9	6	15	150	=A9*B9+C9
10	7	15	150	=A10*B10+C10
11	8	15	150	=A11*B11+C11
12	9	15	150	=A12*B12+C12
13	10	15	150	=A13*B13+C13
14	11	15	150	=A14*B14+C14
15	12	15	150	=A15*B15+C15
16	13	15	150	=A16*B16+C16
17	14	15	150	=A17*B17+C17
18	15	15	150	=A18*B18+C18
19	16	15	150	=A19*B19+C19
20	17	15	150	=A20*B20+C20
21	18	15	150	=A21*B21+C21
22	19	15	150	=A22*B22+C22
23	20	15	150	=A23*B23+C23

Oppgave 13



y kr
f
500
g
400
B = (20, 450)
300
Timelønn (x) = 15 x + 150, (0 ≤ x ≤ 20)
200
A = (5, 225)
100
x bøker
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22

Forhold

Målet for opplæringen er at eleven skal kunne:

- utforske, beskrive og bruke begrepene proporsjonalitet og omvendt proporsjonalitet
- tolke og bruke sammensatte måleenheter i praktiske sammenhenger, og velge egne måleenheter
- tolke og regne med rotuttrykk, potenser og tall på standardform

Forholdstall

I matematikk 1P får vi ofte bruk for å sammenligne to tall, og det er i hovedsak tre måter å sammenligne tall på:

- Vi kan avgjøre hvilket av tallene som har ***høyest verdi***. For eksempel har tallet **10** høyere verdi enn tallet **2**. Dette kan virke enkelt, men blir mer komplisert når man for eksempel skal sammenligne verdien av en brøk med et prosenttall.

- Vi kan finne ***forskjellen*** mellom to tall ved å ta det største minus det minste. Forskjellen mellom 10 og 2 er 8. Det betyr at 10 er 8 større enn 2.

- Vi kan finne ***forholdet*** mellom to tall ved å dividere det ene med det andre. Som regel dividerer vi det største med det minste. Forholdet mellom 10 og 2 er 5. Det vil si at 10 er 5 ganger større enn 2. Det betyr også at 2 er $\frac{1}{5}$ av 10. Forholdet mellom to tall kalles ***forholdstall***

På ungdomsskolen har du regnet med forholdstall i mange situasjoner:

- når noe skal forstørres eller forminskes
- målestokk på kart
- omgjøring fra m til cm, eller m^2 til cm^2
- omgjøring fra timer til minutter
- regning med valutakurser
- prosent og vekstfaktor
- formlike figurer

Oppgave 1

Finn **forholdet** mellom:

a) 100 og 25. Svar: 100 er ______ ganger større enn 25, mens 25 er ______ av 100.

b) 9 og 3. Svar: 9 er ______ ganger større enn 3, mens 3 er ______ av 9.

c) 200 og 25. Svar: 200 er ______ ganger større enn 25, mens 25 er ______ av 200.

d) 5 000 og 2. Svar: 5000 er ________ ganger større enn 2, mens 2 er ________av 5 000.

e) 6 og 4. Svar: 6 er ______ ganger større enn 4, mens 4 er ______ av 6.

f) 11 og 5. Svar: 11 er ________ ganger større enn 5, mens 5 er ________av 11

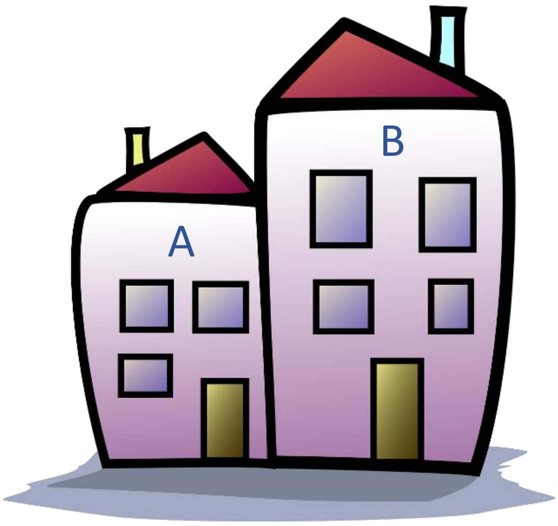
Observasjoner fra klasserommet

Finn tallene du trenger i klasserommet ditt.

a) Hvordan er forholdet mellom antall gutter og antall jenter?
b) Hvordan er forholdet mellom antall pulter og antall stoler?
c) Hvordan er forholdet mellom antall røde tusjer og antall sorte tusjer?
d) Finn noen andre forhold som kan være interessant å regne ut.

Praktisk regning med forholdstall

Ved praktisk bruk av **forholdstall** kan du enten måtte *finne* **forholdstallet** eller *bruke* **forholdstallet**. Nedenfor ser du verdivurderingen til to hus:



Verdivurdering hus A

2 600 000 kr

Verdivurdering hus B

4 160 000 kr

Regnestykket $\frac{4\ 160\ 000\ kr}{2\ 600\ 000\ kr}$ forteller oss at verdien til hus B er 1,6 ganger høyere enn verdien til hus A. Vi har nå funnet **forholdstallet** mellom verdien til hus A og B.

Anta forholdet mellom verdien til hus A og hus B forblir 1,6 i noen år fremover, og at verdien til hus A på et tidspunkt blir vurdert til 3 000 000 kr. Da vil verdien til hus B være:

$$3\ 000\ 000\ kr \cdot 1{,}6 = 4\ 800\ 000\ kr$$

Anta at på et annet tidspunkt vurderes verdien til hus B til å være 5 424 000 kr. Da vil verdien til hus A være:

$$5\ 424\ 000\ kr : 1{,}6 = 3\ 390\ 000\ kr$$

Du kan tenke at vi ***multipliserer*** med **forholdstallet** når vi ønsker et høyere svar og ***dividerer*** med **forholdstallet** når vi ønsker et lavere svar.

Oppgave 2

Forholdet mellom den store og den lille flaska er 2,5

a) Hvor stort er volumet til den lille flaska dersom volumet til den store er 2 liter?

b) Hvor stort er volumet til den store flaska dersom volumet til den lille er 1,5 liter?

Oppgave 3

Hva er forholdet mellom bilene nedenfor målt i vekt?

Vekt: 2 500 kg

Til venstre:
Tesla X

Til høyre:

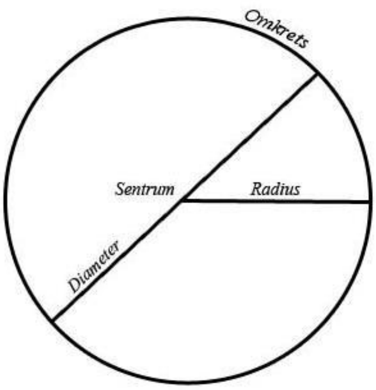
BMW i3

Vekt: 1 200 kg

Oppgave 4

Forholdet mellom diameteren og omkretsen i en sirkel kalles pi (π) og gis ofte tallverdien 3,14.

a) Diameteren til en tallerken er 20 cm. Hvor lang er omkretsen til denne sirkelen?
b) Omkretsen til en frisbee er 69,1 cm. Hvor lang er avstanden fra midten av frisbee-en og ut til kanten?
c) Omkretsen til et kakefat er 40 cm, og kakefatet måler 14 cm på tvers. Avgjør om kakefatet er en sirkel.



Læreren din kan vise deg hvordan du kan løse disse oppgavene ved hjelp av GeoGebra.

Oppgave 5

Det gylne snitt (φ) er et forholdstall som er mye brukt innenfor kunst og arkitektur, og er gitt verdien

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$$

Løs gjerne oppgavene nedenfor ved hjelp av GeoGebra.

a) Tenk deg at det skal bygges en hytte, og høyden på stuevinduet i forhold til hytteveggen skal samsvare med det gylne snitt. Hvor høyt må stuevinduet være dersom veggen er 233 cm?

b) Et kredittkort har lengde 86 cm og bredde 53 cm. Er kredittkortet konstruert etter det gylne snitt?

Ifølge nordnorsk vitensenter er noen av forholdene på en voksen menneskekropp tilnærmet lik det gylne snitt. De nevner følgende eksempler:

Høyden og høyden til navlen

Mål fra bakken opp til navlen, så deler du hele høyden din på høyden opp til navlen. Gyllent?

Navle og kne

Avstanden fra navle til bakken, mot avstanden fra kne til bakken.

Navle og Hode

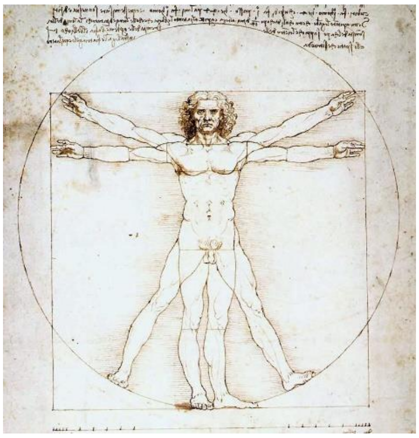
Avstanden fra navlen til toppen av hode, mot avstanden fra skulderen til toppen av hode.

Skulder og albue

Avstanden fra skulderen til fingertuppene, og fra albuen til fingertuppene. Tilnærmet gyldent?

Albue og hånd

Avstanden fra albuen og ut til fingertuppene, mot avstanden fra håndleddet og ut til fingertuppene.



c) Mål noen av avstandene ovenfor på din egen kropp, og avgjør om kroppen din er ferdig utvokst. Løs oppgaven både ved regning og ved hjelp av GeoGebra.

Proporsjonale størrelser

Du har kanskje opplevd at brusflasker selges i ulik størrelse, eller at du kan kjøpe rundstykker enkeltvis eller i pakker på 3?

Forretninger forsøker noen ganger å få oss kunder til å kjøpe mer av en vare enn vi i utgangspunktet hadde tenkt ved å gi oss kvantumsrabatt, som betyr at vi betaler mindre per enhet dersom vi kjøper flere av den. Enhet kan være antall, liter eller kg.

Dersom prisen per enhet er lik uansett hvor mange enheter vi kjøper er dette et eksempel på det vi kaller **proporsjonale størrelser**.

Proporsjonale størrelser er to størrelser x og y som har det samme forholdstallet uavhengig av antall. Dette kan avgjøres ved regning eller grafisk.

Ved regning skrives dette slik: $\frac{y}{x} = k$.

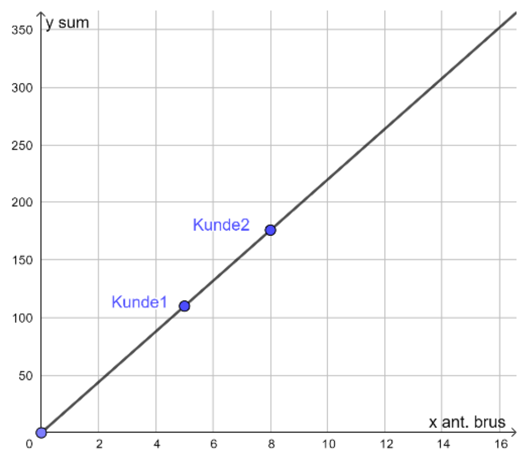
Grafisk kan vi sjekke om alle punkter ligger på en stråle med utgangspunkt i origo.

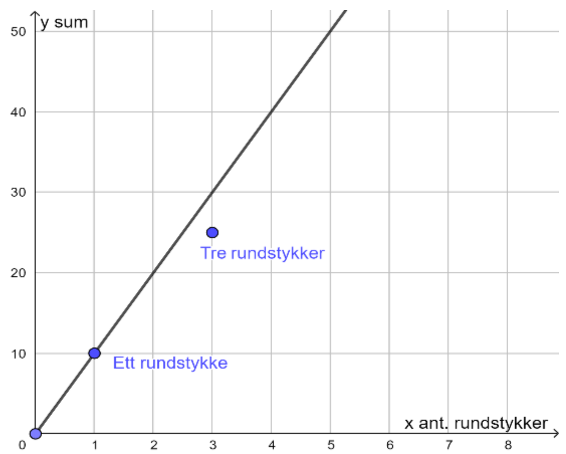
Anta at to personer går inn i en butikk for å kjøpe brus. Den ene kunden kjøper 5 brus og betaler 110 kr, mens den andre kjøper 8 brus og betaler 176 kr. Betaler begge kundene lik pris per brusflaske, eller sagt på en annen måte: er pris og brus **proporsjonale størrelser**?

Meny på Tveita selger rundstykker til 10 kr per stykk. Dersom vi kjøper 3 rundstykker betaler vi 25 kr til sammen. Er pris og rundstykker **proporsjonale størrelser?**

X	y	$\frac{y}{x}$
Antall brus	Sum	Pris per brus
5	110	22
8	176	22

x	y	$\frac{y}{x}$
Ant. rundstykker	Sum	Pris per rundstykke
1	10	10
3	25	8,33





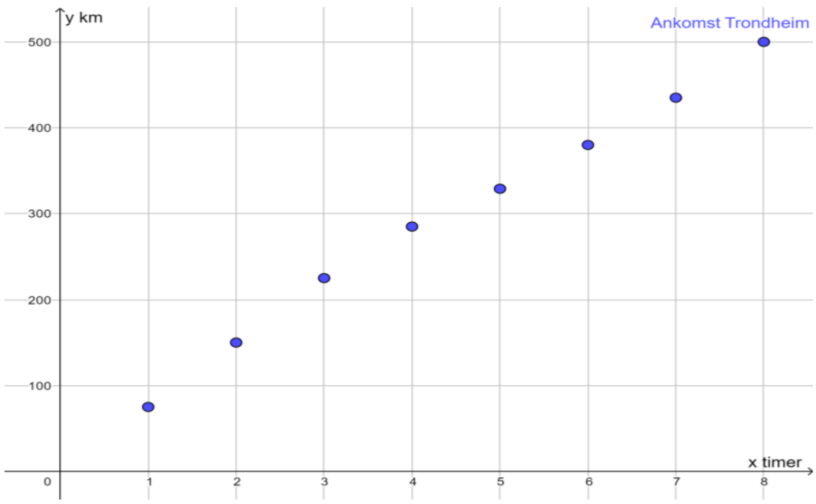
Både ved regning og grafisk ser vi at pris og antall brus er **proporsjonale størrelser**, mens pris og antall rundstykker ikke er det.

Oppgave 6

En familie kjører fra Oslo til Kristiansand. Etter 2 timer har de kjørt 12 mil, og etter 3 timer har de kjørt 18 mil.

a) Er tid og avstand proporsjonale størrelser så langt på turen? Løs oppgaven både ved regning og ved hjelp av GeoGebra.

En annen familie kjørte fra Oslo til Trondheim. Hver time registrerte de hvor langt de hadde kommet. Se grafikkbildet nedenfor:



b) Hvor lenge er timer og avstand proporsjonale størrelser?

Oppgave 7

Ove selger egg på torget. Han har laget en plakat som viser hvor mye eggene koster, se figuren til høyre. Undersøk om antall egg og pris er proporsjonale størrelser.

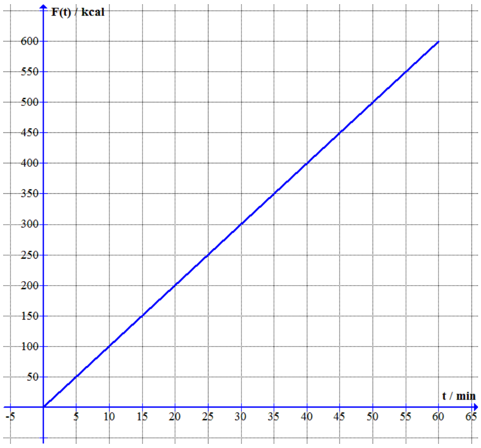
6 egg	10,50 kroner
10 egg	17,50 kroner
15 egg	24,00 kroner
30 egg	45,00 kroner

Oppgave 8

En pakke med to ruller toalettpapir koster 12 kr. En pakke med 8 ruller koster 38 kr, og 16 ruller koster 64 kr. Undersøk om prisen er proporsjonal med antall ruller.

Oppgave 9

Noman løper på en tredemølle. Grafen viser forbrenningen *F* i kilokalorier (kcal) som en funksjon av tida *t* i minutter.



Er *F* og *t* proporsjonale størrelser? Begrunn svaret på to måter.

Oppgave 10

Kathrine arbeider i en klesforretning som lørdagshjelp. Tabellen nedenfor viser hvor mange timer hun arbeidet og hvor mye hun tjente i løpet av fire lørdager.

t (timer)	5	8	7	6
L (kr)	600	960	840	720

a) Vis at lønna og antall arbeidstimer er proporsjonale størrelser.

b) Hvor mye tjener Kathrine hvis hun en lørdag arbeider 9,5 timer? Løs oppgaven både ved regning og digitalt, enten ved hjelp av ExCel, CAS eller GeoGebra.

En eksamensoppgave

En type hårspray selges i tre størrelser: Mini, Normal og Biggie.

Normal inneholder 400 mL og koster 160 kroner.

Mini inneholder 100 mL, og Biggie inneholder 600 mL.

Hvor mye ville Mini og Biggie kostet dersom pris og volum hadde vært proporsjonale størrelser?

Omvendt proporsjonale størrelser

Tenk at et beboerne i et lite borettslag med 6 familier skal kjøpe en ny trampoline, og at alle familiene som ønsker å benytte trampolina må være med på å betale for den. Jo flere som blir med på spleiselaget jo billigere blir det for hver enkelt familie. Prisen for trampolina er imidlertid den samme, uavhengig av hvor mange som ønsker å bruke den.

Dersom prisen per familie blir lavere jo flere som betaler, samtidig som prisen for trampolina forblir uendret, er dette et eksempel på det vi kaller **omvendt proporsjonale størrelser**.

Omvendt proporsjonale størrelser er to størrelser som varierer samtidig på en slik måte at

$$\frac{k}{x} = y$$

der *k* er et fast tall (en konstant).

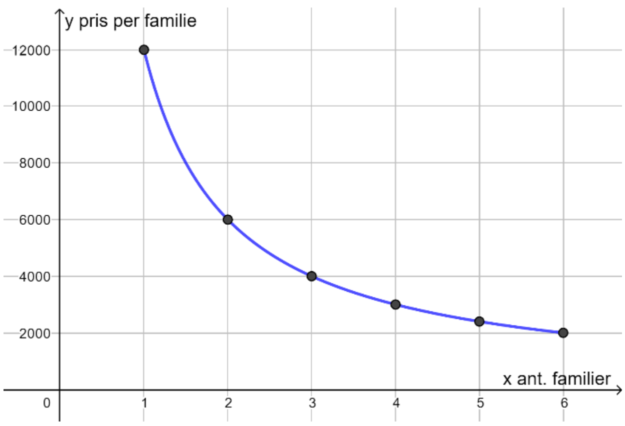
Dette kan også skrives som at $x \cdot y = k$

Vi kan teste om antall personer (*x*) og pris per familie (*y*) i eksempelet ovenfor er omvendt proporsjonale. Borettslaget finner en trampoline som koster kr 12 000 (*k*), og lager følgende oversikt:

Ant. familier	1	2	3	4	5	6
$\frac{k}{x} = y$	12 000	6 000	4 000	3 000	2 400	2 000
$x \cdot y = k$	12 000	12 000	12 000	12 000	12 000	12 000

Vi ser at *x* og *y* i dette eksempelet oppfyller kravene for å være omvendt proporsjonale størrelser.

Grafisk kan dette visualiseres slik:



Oppgave 11

En trinn med 50 elever har leid et lokale til en Halloween - fest.
Leien er 5 000 kroner.

a) Hva må hver elev betale hvis alle elevene deltar på festen?

Kall prisen per deltaker for y og antall deltakere for x.

b) Lag en formel som kan brukes til å regne y dersom det kommer x deltakere.

c) Bruk GeoGebra til å visualisere sammenhengen mellom antall deltakere og pris per deltaker. Finn noen interessante punkter.

d) Er x og y omvendt proporsjonale størrelser?

Oppgave 12

Tina betaler 400 kr for et dagskort i en alpinbakke.

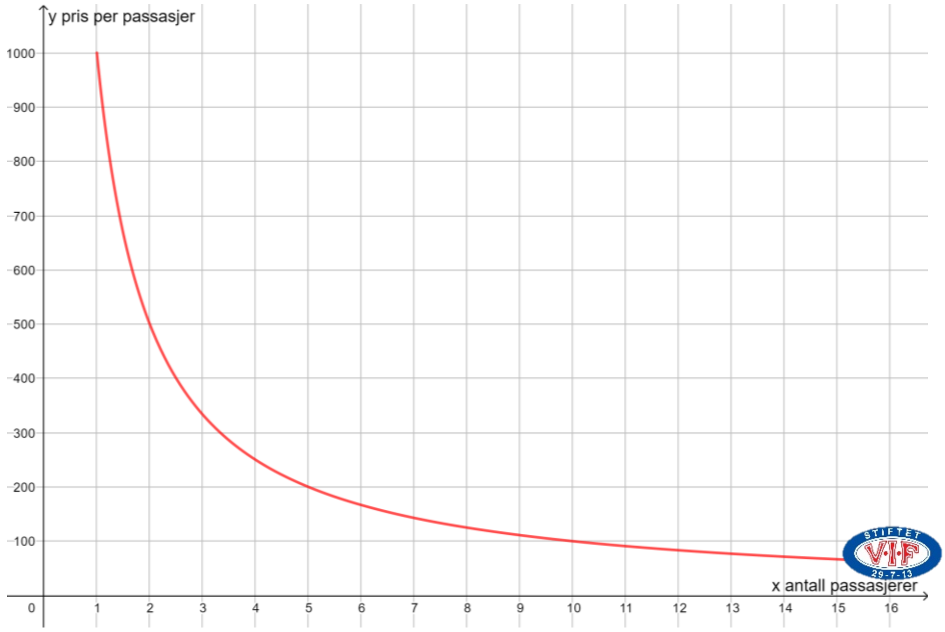
a) En dag kjører hun 10 turer. Hva blir prisen per tur?

b) Bruk GeoGebra til å visualisere sammenhengen mellom antall turer og pris per tur. Bruk fornuftig avgrensning.

c) Forklar hvorfor prisen per tur er omvendt proporsjonal med antall turer.

Oppgave 13

Et taxiselskap tilbyr minibuss med fast pris fra Oslo til Gardermoen. Prisen per avhenger av antall passasjerer, som vist nedenfor:



a) Forklar hvorfor sammenhengen mellom antall personer og pris per person er omvendt proporsjonale størrelser.
b) Hvor høy er selskapets fastpris for strekningen Oslo – Gardermoen?
c) Noen har satt et fint klistremerke over grafen, og det går derfor ikke an å lese av hva hver enkelt passasjer må betale dersom 16 personer blir med på turen. Finn dette ved regning eller ved hjelp av GeoGebra.

Oppgave 14

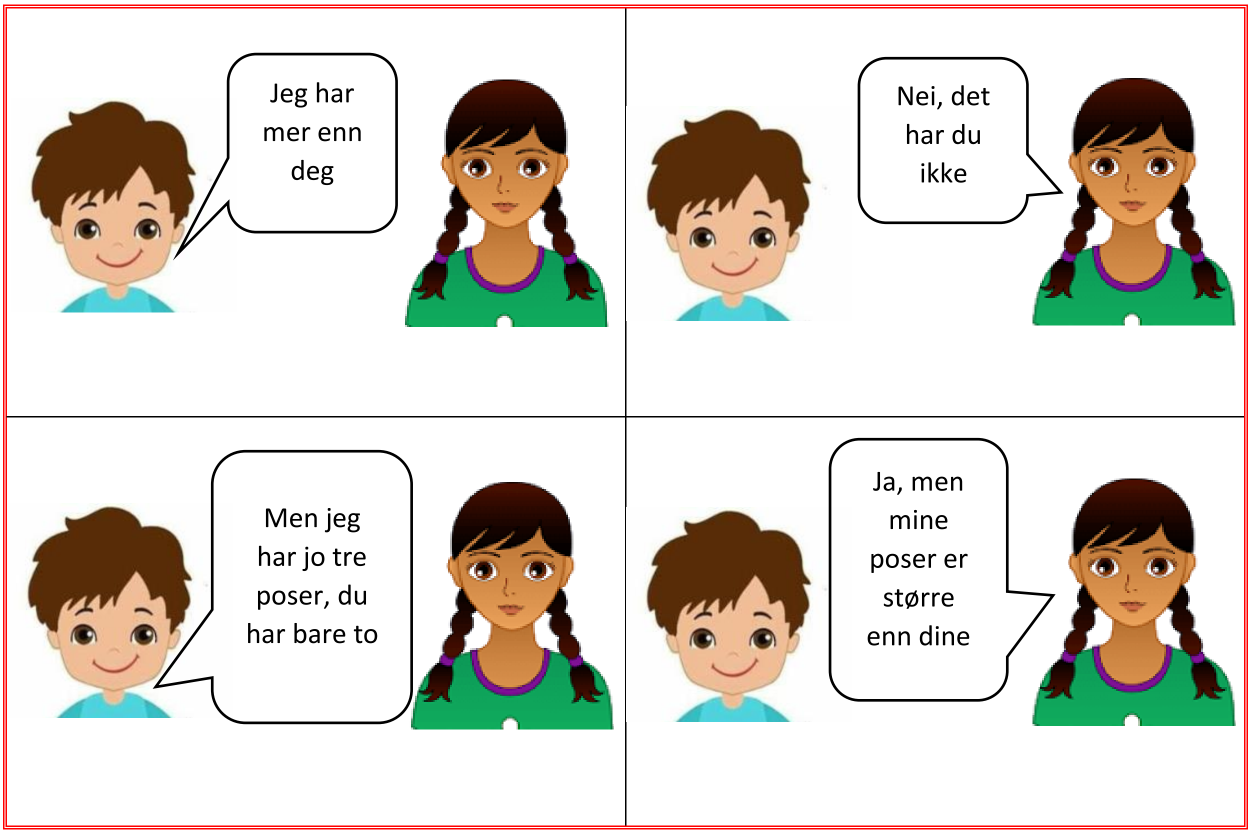
En vennegjeng skal leie en hytte og finner to tilbud. De er usikre på hvor mange som blir med, så de lager en tabell for prisen per person med ulikt antall deltakere. Fyll ut de tomme rutene i tabellen.

Antall personer	1	3		10
Pris per person			700 kr	420 kr

Antall personer	1		5	
Pris per person		2000 kr	800 kr	400 kr

I hvilken rute kan vi finne prisen for leie av hytta?

Enhet, prefiks og tierpotens



Samtalen i rutene ovenfor skal illustrere utfordringen ved å sammenligne mengder av ulik størrelse. Hvordan skal de avgjøre hvem som har mest når det de bruker til å sammenligne, i dette tilfellet poser, ikke er like store?

Når vi skal sammenligne mengder av ulik størrelse trenger vi en fast verdi eller en gitt størrelse. Dersom gutten og jenta i samtalen ovenfor hadde hatt like store poser ville det vært enklere å avgjøre hvem som har mest.

Dette kalles for måleenhet. Hvilken måleenhet vi bruker avhenger av hva vi skal måle. På neste side har vi presentert et utvalg av måleenheter, og hva de brukes til. Det finnes utallige måleenheter, og vi har ikke plass til alle. Vi har derfor valgt ut de måleenhetene vi tror du får mest bruk for.

Tabellen nedenfor viser et utvalg av standardiserte måleenheter. Det finnes mange, mange flere.

Når vi måler	bruker vi	som forkortes
Antall	Stykk	stk
Vekt	Gram	g
Lengde	Meter	m
Areal	Kvadratmeter	m^2
Volum	Liter eller kubikkmeter	L eller m^3
Penger	Kroner	kr
Tid	Sekund	sek eller s
Elektrisk effekt	Watt	W
Frekvens	Hertz	Hz
Energi i mat	Kalorier	cal
Informasjon i datamaskin	Byte	B
Temperatur	Grader Celsius eller Fahrenheit	°C eller °F
Avstander i universet	Astronomisk enhet	AU

For å beskrive størrelsen til en mengde forteller vi hvor mange vi har av måleenheten tilhørende den mengden. For eksempel viser gradestokken at det 6 °C på Hellerud en dag i november, lengden av en fotballbane er 90 m, eller avstanden fra jorda til sola er 1 AU.

Dersom størrelsen til en mengde enten er veldig stor eller veldig liten kan tallet foran måleenheten bli langt, og kan være vanskelig å både lese og uttale. Skal vi måle lengden til New York eller størrelsen til et atom vil tallet foran meter bli omtrent uleselig. I slike tilfeller bruker vi enten **et prefiks** eller en **tierpotens**.

Et prefiks er ofte et latinsk ord for et tall, mens en **tierpotens** forteller hvor mange nuller en dekadisk enhet inneholder.

Et prefiks eller **en tierpotens** erstatter et bestemt antall nuller slik at tallet blir enklere å forstå.

Eksempel på tierpotens:

$1\,000 = 10^3$

Når vi forteller hvor mange vi har av en tierpotens kalles dette å skrive et tall på standardform.

Å skrive et tall på standardform betyr å fortelle hvor mange vi har av en tierpotens

Eksempel på standardform:

$4\,000 = 4 \cdot 1\,000 = 4 \cdot 10^3$

Dette tallet skal være større enn 1, og mindre enn 10.

$12\,000 = 1{,}2 \cdot 10\,000 = 1{,}2 \cdot 10^4$

Oppgave 15

Skriv på standardform:

a) 8 000 = b) 30 000 = c) 4 000 000 =

d) 8 500 = e) 38 000 = f) 4 250 000 =

Oppgave 16

Skriv på standardform:

a) 0,07 = b) 0,0006 = c) 0,0000002 =

d) 0,075 = e) 0,00063 = f) 0,00000024 =

Dekadisk enhet	Tierpotens	Navn	Prefiks	Forkortes	
1 000 000 000 000	10^{12}	billion	Terra	T	
1 000 000 000	10^{9}	milliard	Giga	mrd.	G
1 000 000	10^{6}	million	Mega	mill.	M
1 000	10^{3}	tusen	kilo	k	
100	10^{2}	hundre	hekto	h	
10	10^{1}	ti	deka	dk	
1	10^{0}				
0,1	10^{-1}	tidel	desi	d	
0,01	10^{-2}	hundredel	centi	c	
0,001	10^{-3}	tusendel	milli	m	
0,000001	10^{-6}	milliondel	mikro	µ	
0,000000001	10^{-9}	milliarddel	nano	n	
0,000000000001	10^{-12}	billiondel	piko	p	

I tillegg bruker vi:

Mil = 10 km = 10 000 m

Tonn = 1 000 kg = 1 000 000 g

1 lysår = avstanden lyset tilbakelegger på ett år ≈ 9 500 000 000 000 km. (9,5*10^15 m)

Eksempel på praktisk bruk av prefiks og standardform

Jordens omkrets er beregnet til å være omtrent 40 000 000 meter. På en mer hensiktsmessig måte kan dette skrives som:
40 000 km, eller 4 000 mil, eller $4 \cdot 10^7$ m.

Rødt lys har en bølgelengde på omtrent 0,00000071 m. På en mer hensiktsmessig måte kan dette skrives som:
710 nanometer (710 nm) eller $7{,}1 \cdot 10^{-7}$ m.

Oppgave 17

Skriv størrelsene på en mer hensiktsmessig måte.

a) I en dL h-melk er det omtrent 0,0044 g natrium
b) En voksen blåhval kan veie opp mot 150 000 000 g
c) Størrelsen til et atom kan variere mellom 0,0000000001 m og 0,00000000005 m
d) Det lever omtrent 7 800 000 000 mennesker på jorda.
e) Man antar at vår galakse, Melkeveien, inneholder 300 000 000 000 stjerner
f) I 2020 kjøpte nordmenn omtrent 460 000 000 liter brus.

Oppgave 18

Finn egne eksempler på tall som har så høy verdi eller lav verdi at det er hensiktsmessig å skrive dem på standardform.

Skriv det du har funnet her:

Regneregler ved regning av tall på standardform

Regel	Eksempel
$10^x \cdot 10^y = 10^{x+y}$	$10^3 \cdot 10^4 = 10^{3+4} = 10^7$
$10^x : 10^y = 10^{x-y}$	$10^5 : 10^2 = 10^{5-2} = 10^3$
$\frac{10^x}{10^y} = 10^{x-y}$	$\frac{10^5}{10^2} = 10^{5-2} = 10^3$
$a \cdot 10^x \cdot b \cdot 10^y = a \cdot b \cdot 10^{x+y}$	$2 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^5 = 12 \cdot 10^8 = 1{,}2 \cdot 10 \cdot 10^8 = 1{,}2 \cdot 10^9$

Oppgave 19

Løs oppgavene ovenfor nedenfor ved regning og ved hjelp av CAS.

Skriv på standardform:

a) $10^3 \cdot 10^6 =$

b) $10 \cdot 10^3 =$

c) $10^4 \cdot 10^{-2} =$

d) $10^5 : 10^2 =$

e) $\frac{10^6}{10^2} =$

f) $10^3 : 10^5 =$

Hvilken metode liker du best? Velg den metoden du liker best når du løser de neste oppgavene.

Oppgave 20

Skriv på standardform:

a) $2 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^5 =$

b) $4 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^3 =$

c) $7 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^5 =$

d) $6 \cdot 10^4 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-2} =$

e) $\frac{6 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^2} =$

f) $\frac{8 \cdot 10^6}{4 \cdot 10^{-2}} =$

g) $9 \cdot 10^2 : (2 \cdot 10^5) =$

h) $2 \cdot 10^6 : (4 \cdot 10^2) =$

Eksempler på praktisk regning med tall på standardform

Det er anslagsvis 300 000 000 000 stjerner i Melkeveien. En teori sier at hver stjerne i solsystemet i gjennomsnitt har 3,5 planeter i omløp. Dersom det stemmer vil antall planeter i Melkeveien være:

$3,5 \cdot 3{\cdot}10^{11} = 10,5{\cdot}10^{11} = 1,05{\cdot}10^{12}$

Det lever omtrent 7 800 000 000 mennesker på jorda. Anta at gjennomsnittsvekten for en person er 40 kg. Jordas befolkning veier dermed:

$4{\cdot}10$ kg $\cdot\ 7,8{\cdot}10^{9} = 4{\cdot}7,8 \cdot 10{\cdot}10^{9}$ kg $= 31,2 \cdot 10^{10}$ kg $= 3,12{\cdot}10^{11}$ kg

I 2015 måtte myndighetene i Paris fjerne alle hengelåsene som var hengt på brua Pont des Arts. Til sammen ble 45 tonn med hengelåser fjernet.

Dersom vi går ut fra at hver hengelås veier 50 g, ble så mange hengelåser fjernet:

$\frac{45\text{ tonn}}{50\text{ g per hengelås}} = \frac{45 \cdot 10^{6}\ g}{5 \cdot 10\text{ g per hengelås}} = \frac{45}{5} \cdot \frac{10^{6}}{10} = 9{\cdot}10^{5}$ hengelåser

Oppgave 21

Det er 5,3 millioner innbygger i Norge. I gjennomsnitt kaster hver innbygger 180 plastposer hvert år. Normal tykkelse på plasten i en pose er 0,035 mm.

Tenk deg at vi legger alle disse plastposene oppå hverandre i en stabel. Omtrent hvor høy ville stabelen blitt?

Oppgave 22

Anta at det drikkes 1 920 000 L kaffe i Norge hver dag, og at én kopp rommer 1,5 dL.

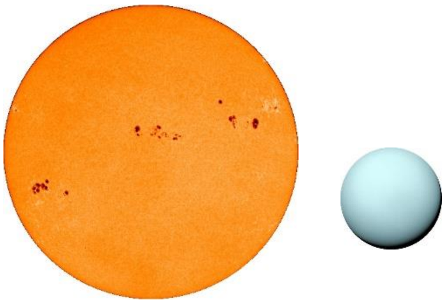
Hvor mange kopper drikkes det da i Norge hver dag?

Oppgave 23

I en kjøkkensvamp er det 40 milliarder bakterier per kubikkcentimeter. Svampen har et volum på 150 cm^3.

Hvor mange bakterier er det i hele svampen?

Oppgave 24



Solens volum er beregnet til å være omtrent $1,4 \times 10^{18}$ km³. Planeten Uranus, som er solsystemets nest største planet, har et volum på omtrent $7 \cdot 10^{13}$ km³.

Hvor mange ganger større er Solen enn Uranus?

En eksamensoppgave

En dag i juni 2020 var verdien av oljefondet $1,0417 \cdot 10^{13}$ kroner.

Samme dag var det $5,372 \cdot 10^6$ innbyggere i Norge.

Tenk deg at pengene i oljefondet ble delt likt mellom alle innbyggerne i Norge denne dagen.

Hvor mange kroner ville det da blitt til hver?

Eksempler på praktisk regning med prefiks

En trener skal blande saft til fotballaget sitt, som består av 25 spillere.

Treneren beregner 2 dL ublandet saft til hver spiller. Til sammen trenger treneren:

25 · 2 dL saft = 50 dL saft = 5 L saft.

Et voksent menneske bør innta 30 g kostfiber hver dag.

1 (grov) brødskive inneholder 2,5 g kostfiber. For å dekke sitt dagsbehov må et voksent menneske spise:

$\frac{30\ g}{2{,}5\ g}$ = 12 brødskiver

På en butikk koster 400 gram kjøttdeig 49 kroner. Prisen per kilogram, som ofte uttales pris per kilo blir da:

$\frac{49\ kr}{400\ g} \cdot 1000\ g$ = 122,50 kr/kg

En eksamensoppgave

300 g grillgrønnsaker koster 39 kroner.

Bestem prisen per kilogram.

En eksamensoppgave

En kopp med 220 mL cappuccino koster 22 kroner.

Hvor mye koster cappuccinoen per liter?

Oppgave 25

På matprat.no finner vi følgende oppskrift på køfte til 2 personer:

Ingredienser	2 personer	6 personer	9 personer
Kjøttdeig av lam	400 g		
Løk	0,5 stk		
Hvitløk	1 båt		
Hakket koriander	2 ss		
Paprikapulver	0,5 ts		
Spisskummen	0,5 ts		
Kajennepepper	0,25 ts		
Salt	0,5 ts		
Kvernet pepper	0,25 ts		

a) En familie skulle lage køfte til 6 personer. Regn ut hvor mye de måtte bruke av hver ingrediens.

b) En annen familie skulle lage køfte til 9 perosner. Hvor mye måtte denne familien bruke av hver ingrediens?

c) En tredje familie hadde kjøpt 2,5 kg kjøttdeig av lam. Til hvor mange personer kunne denne familien lage køfte?

Oppgave 26

100 g Tine appelsinjuice har følgende næringsinnhold

Data	Mengde	Enhet
KJ	188	kilojoule
Kcal	44.9	kalorier
Protein	0.7	gram
Karbo	9.1	gram
Sukker	9.1	gram
Kostfiber	1	gram

I tillegg inneholder 100 g Tine appelsinjuice 20 mg C-vitaminer, som er 25 % av anbefalt daglig inntak av C-vitaminer for et voksent menneske.

Ett glass juice regnes som 2 dL som er omtrent 200 g juice.

a) Hvor mange glass juice må et voksent menneske drikke dersom det ønsker å få dekket det daglige behovet for C-vitaminer gjennom å drikke juice?

På helsedirektoratet.no kan vi lese følgende om inntak av sukker per dag:

> *Det anbefales at inntaket av sukker begrenses til 60 – 70 gram for menn og 50 – 55 gram for kvinner.*

b) Hva utgjør svaret du fikk i a) for den anbefalte øvre grensen for daglig inntak av sukker?

c) Finn næringsinnholdet til en annen drikke, og gjør samme beregning for den drikken.

En eksamensoppgave

Amalie skal lage appelsinsyltetøy og vil følge oppskriften til høyre.

Hun har et målebeger. Det viser at 1 L sukker har masse 0,8 kg.

Amalie skal bruke 26 kg appelsiner.
En pose sukker inneholder 1 kg.

Hvor mange poser sukker må hun minst kjøpe?

APPELSINSYLTETØY

1 kg appelsiner

1 sitron

1 grapefrukt

5 dL sukker

5 dL vann

Krysstabell – for å systematisere opplysningene

Når du skal løse oppgavene nedenfor kan det være lurt å lage en oversikt over opplysningene gitt i oppgaven. Til dette kan du bruke en krysstabell.

Rammen til en krysstabell kan være slik:

	Forhold	Mengde
Det som		
sammenlignes		

Valuta – veksling mellom norske og utenlandske penger

Skal du bruker penger i et annet land enn Norge må du bruke lokal valuta. Forholdet mellom norske kroner (NOK) og utenlandske penger kalles **valutakurs**.

Oppgave 27

Trine kjøpte en kjole i Spania, og hun betalte med kort.

Det ble trukket 719,67 kroner fra kontoen hennes.

a) Hva var kursen på euro (€) den dagen?

	Valutakurs	Pris
Euro	1	69
Nok		719,67

I tillegg kjøpte hun et par sko som kostet 28 euro.

b) Hvor mye utgjorde prisen på skoene i norske kroner?

	Valutakurs	Pris
Euro	1	28
Nok		

Oppgave 28

En tilfeldig dag i 2021 var kursen på USD (amerikanske dollar) 8,42 NOK.

a) Hvor mye dollar fikk man for 300 NOK denne dagen?

	Valutakurs	Mengde
Dollar	1	
Nok	8,42	

b) Hvor mange norske kroner man betale for en vare som kostet 149 USD?

	Valutakurs	Pris
	1	149

c) Dagen etter var prisen på en vare 199 USD. Den samme varen kostet 1719 NOK. Hva var kursen på USD denne dagen?

	Valutakurs	Pris

Oppgave 29

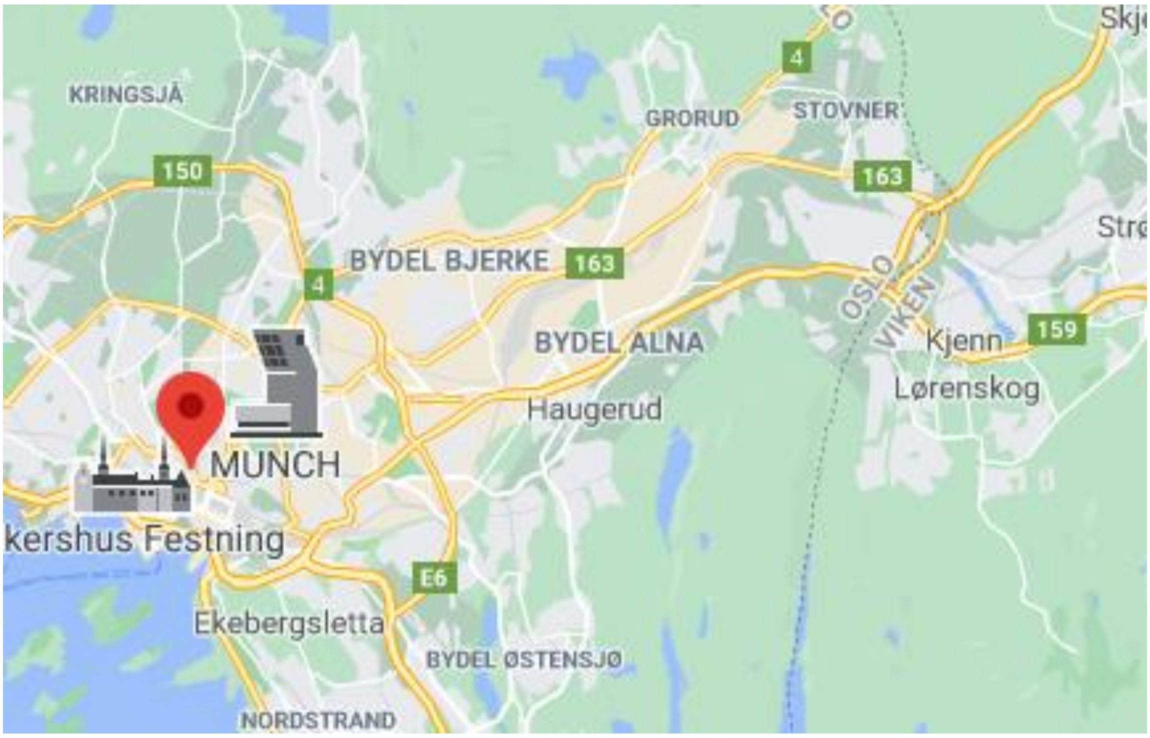
Vekslingskursen mellom norske og svenske kroner (SEK) oppgis i hvor mange NOK du må betale for 100 SEK. En dag var 100 SEK = 102 NOK.

Hvor mange norske kroner måtte du betale for en genser kostet 799 SEK?

	100	
	102	

Målestokk – regning mellom kart og virkelighet

Et kart er et forminsket bilde av virkeligheten som kan brukes til å beregne avstanden mellom to steder i virkeligheten. Forholdet mellom kart og virkelighet kalles **målestokk**.



Oppgave 30

Et kart over Oslo har målestokk 1 : 50 000

a) På kartet er det 12 cm mellom Hellerud vgs og Oslo S. Hvor lang er avstanden mellom disse stedene i virkeligheten?

Hellerud – Oslo S	Målestokk	Avstand
Kart	1	12 cm
Virkelighet	50 000	

b) Det er 2,9 km mellom Hellerud vgs og Lindeberg. Hvor lang er avstanden mellom disse stedene på kartet?

Kart	1	
Virkelighet	50 000	

Oppgave 31

Her ser du et kart over Norge (med de gamle fylkesnavnene).

I luftlinje er avstanden mellom Oslo og Trondheim 392 km.

a) Hvilken målestokk har dette kartet? Gjør en hensiktsmessig avrunding.

Oslo - Trondheim	Målestokk	Avstand
Kart		
Virkelighet		

b) Bruk kartet og målestokken du regnet i a) til å finne avstanden mellom Oslo og Bergen. Du kan kontrollere svaret ditt ved å søke opp avstanden på nettet.

Oslo - Bergen	Målestokk	Avstand
Kart		
Virkelighet		

På nettet kan vi lese at det er ca. 1 700 km fra Lindesnes til Nordkapp.

c) Stemmer dette med kartet ovenfor?

	Målestokk	Avstand

Tid – regning mellom to tallsystem

Mange av tidsenhetene vi bruker er bygd opp i 6-tallsystemet. For eksempel er det:

- $6 \cdot 10$ minutter i en time
- $6 \cdot 4$ timer i et døgn
- $6 \cdot 2$ måneder i et år
- $6 \cdot 61$ dager i et år (omtrent)

Dersom vi skal utføre regning med ulike enheter, må enhetene være bygd opp i det samme tallsystemet. Vi må derfor beherske å gjøre tidsenhetene om til 10-tallsystemet.

Alle tidsenheter kan gjøres om til 10-tallsystemet, men vi skal konsentrere oss om å gjøre minutter om til **desimaltimer** (som forteller hvor stor del av en time minuttene utgjør). Dette trenger vi når vi senere skal regne hastighet.

Oppgave 32

a) Hvor stor del av en time utgjør 45 minutter?

	Forhold	Antall
Minutt	60	45
Time	1	

b) Hvor stor del av en time utgjør 24 minutter?

	Forhold	Antall
Minutt	60	
Time	1	

c) Hvor mange minutter er 0,6 timer?

	Forhold	Antall
Minutt	60	
Time	1	0,6

Oppgave 33

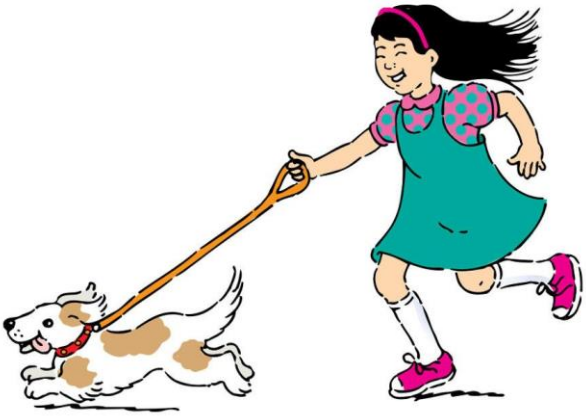
Det er kun minuttene vi omgjør til desimaltimer (hele timer er hele timer uavhengig av tallsystem).

a) Skriv 2 timer og 45 minutter som desimaltimer

	Forhold	Antall
Minutt	60	45
Time	1	

b) Skriv 1,8 timer som timer og minutter

	Forhold	Antall
Minutt	60	
Time	1	0,8



En hundeeier går tur med hunden sin. Turen starter kl. 12.45 og varer i 1,4 timer.

c) Hvor mye hadde klokka blitt da turen var over?

	Forhold	Antall
Time	1	
Minutt		

Fart – regning med sammensatte enheter

Om vi ønsker å angi raskt et objekt beveger seg må vi både måle **lengden** objektet beveger seg og hvor lang **tid** objektet bruker på denne lengden.

Lengdeenheten vi bruker er som regel **km** eller **m**, og tidsenheten er som regel **time** eller **sekund**.

Når vi skal beskrive farten til et objekt må vi utføre regnestykket

$$\frac{lengde}{tid}$$

Dersom vi har målt lengden i **km** og tid i **time** blir fartsenheten **km/t** (km per time).
Dersom vi har målt lengden i **m** og tid i **sekunder** blir fartsenheten **m/s** (meter per sekund).

Vi kan regne mellom **km/t** og **m/s** med forholdstallet 3,6. Hvorfor?

$$\frac{km}{time} = \frac{1\ 000\ m}{3\ 600\ sek} = \frac{1\ m}{3{,}6\ sek}$$

Det betyr at dersom en bil kjører i 50 km/t kjører den

$$\frac{50}{3{,}6} \approx 14 \text{ m/s}$$

Det betyr i tillegg at vindstyrke som måles til 8 m/s også kan beskrives som

$$8 \cdot 3{,}6 \approx 29 \text{ km/t}$$

Oppgave 34

Usain Bolt innehar verdensrekorden på 100 meter med tiden 9,58.

a) Hvor høy var gjennomsnittsfarten på dette løpet målt i **m/s**?
b) Hvor høy var gjennomsnittsfarten på dette løpet målt i **km/t**?

	Forhold	Fart
m/s	1	
km/t	3,6	

Oppgave 35

Avstanden mellom Oslo og Trondheim er 392 km. Flytiden mellom disse byene er 45 minutter.

a) Hvor høy er gjennomsnittsfarten til flyet på denne turen?

	Forhold	Antall
Minutt	60	
Time	1	

Avstanden mellom Oslo og Tromsø er 1150 km. På en slik tur er gjennomsnittsfarten ca. 690 km/t.

b) Hvor lang tid vil flyturen være på denne strekningen? Angi svaret på formen timer og minutter

	Forhold	Antall
Minutt	60	
Time	1	

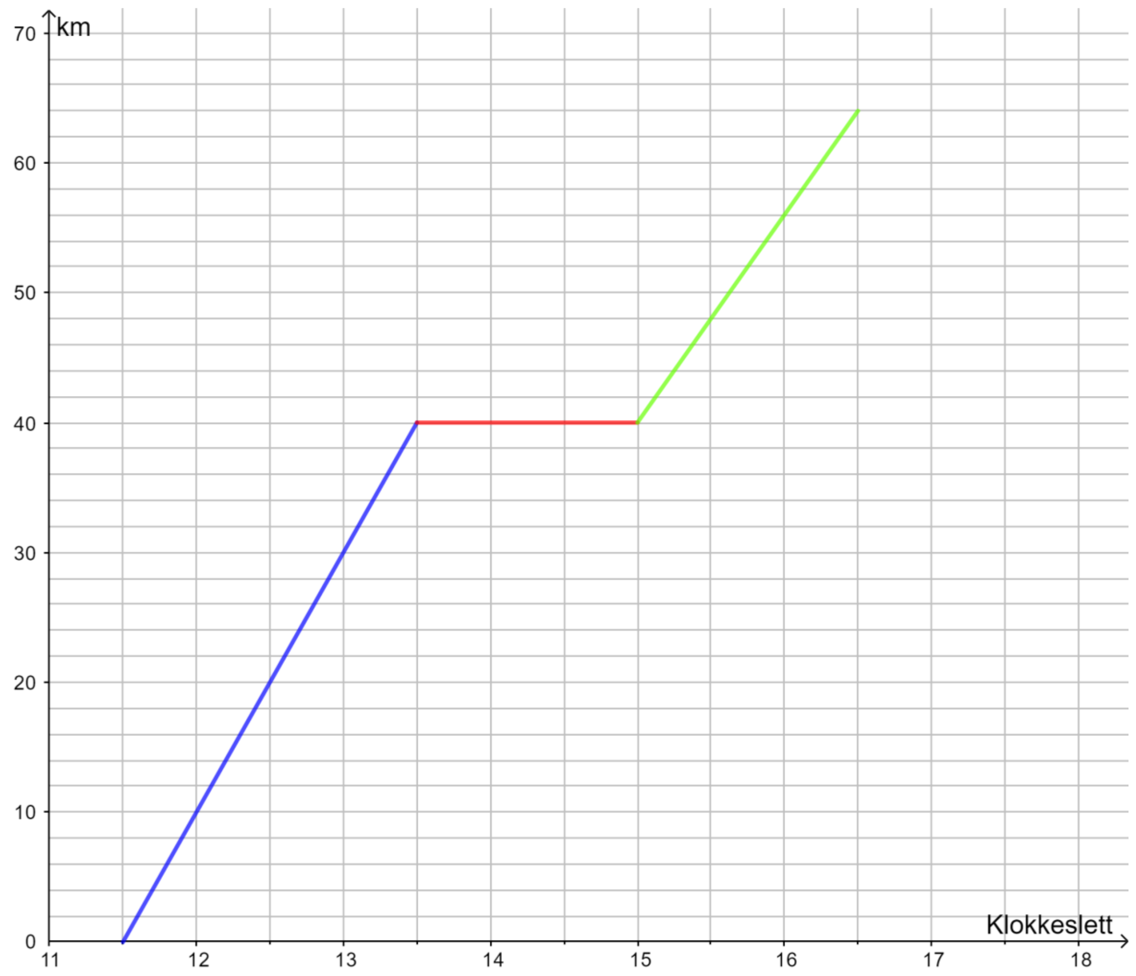
Marsjfarten til en Boeing 767 er på 851 km/t.

c) Hvor langt kommer et slikt fly på 2 timer og 30 minutter?

Oppgave 36

Stian syklet hjem fra bestemoren sin. På veien hjem stoppet han ved et vann for å bade og spise lunsj.

Stian visualiserte sykkelturen sin slik:



Gjør nødvendige beregninger, og lag en beskrivelse av farten Stian holdt på sykkelturen.

Oppgave 37

En buss kjører fra Oslo bussterminal til Kristiansand, med avgang kl. 12.10. Kjørelengden er 320 km, og bussen holder en gjennomsnittsfart (inkludert pauser) på 68 km/t.

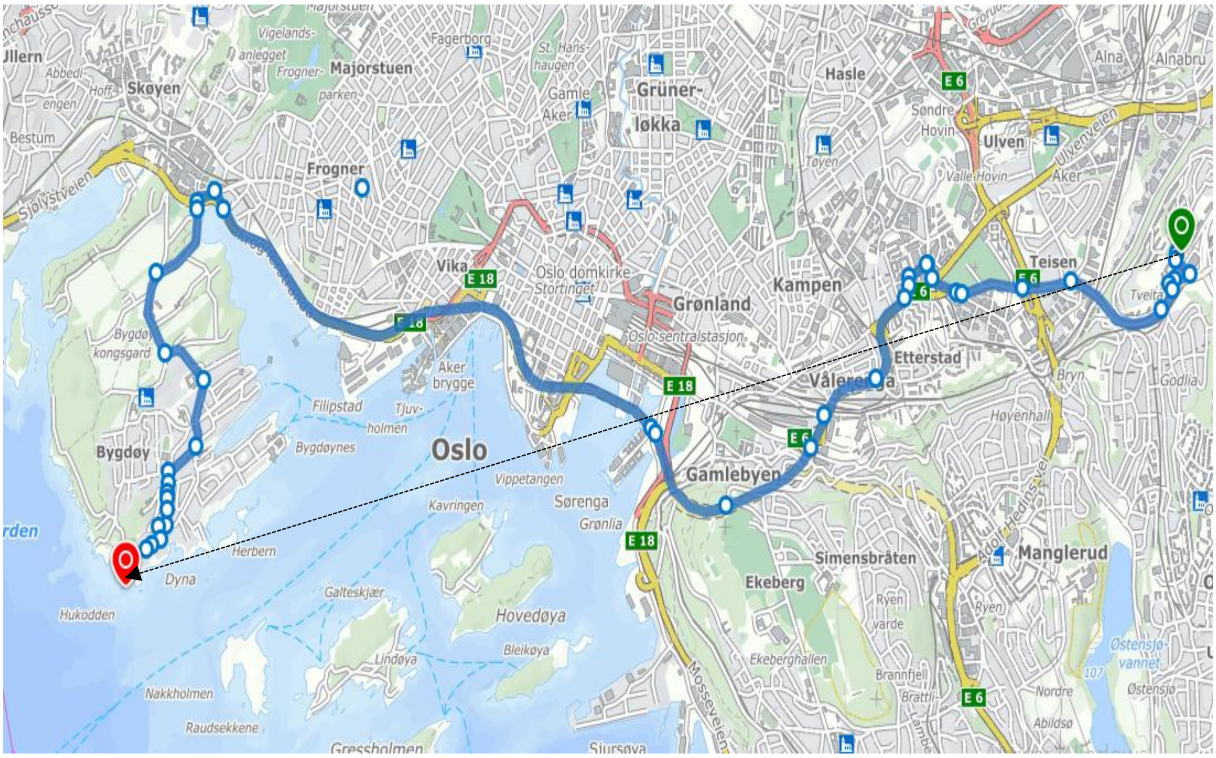
Når ankommer bussen Kristiansand?

Lag gjerne en tabell i kladdeboka di.

Presentasjonsoppgave

En av miljøarbeiderne på Hellerud vgs. ønsker å ta med en gruppe elever på en sykkeltur til Huk (strand).

Miljøarbeideren finner et kart over Oslo med målestokk 1 : 75 000, og måler avstanden i luftlinje (den sorte linja) mellom Hellerud vgs. og Huk til å være 20 cm. Se kartet nedenfor:



Miljøarbeideren antar at de kan sykle med en gjennomsnittsfart på 15 km/t, og ønsker at de skal være fremme kl. 10.00. Den blå linja i kartet angir veien de skal sykle.

Gjør en vurdering av når de bør dra fra Hellerud vgs. for å være på Huk kl. 10.00.

Løsningsforslag

Oppgave 1

a) 100 er 4 ganger større enn 25, mens 25 er $\frac{1}{4}$ av 100.

b) 9 er 3 ganger større enn 3, mens 3 er $\frac{1}{3}$ av 9.

c) 200 er 8 ganger større enn 25, mens 25 er $\frac{1}{8}$ av 200.

d) 5000 er 2500 ganger større enn 2, mens 2 er $\frac{1}{2500}$ av 5 000.

e) 6 er 1,5 ganger større enn 4, mens 4 er $\frac{2}{3}$ av 6.

f) 11 og 5. Svar: 11 er 2,2 ganger større enn 5, mens 5 er $\frac{5}{11}$ av 11

Oppgave	Svar
2	a) 5L b) 0,6L
3	Forholdet er tilnærmet lik 2,1
4	a) 62,8 cm b) 22 cm c) Nei.
5	a) 144 cm b) Ja (omtrent)
6	a) Ja b) Tid og avstand er proporsjonale størrelser frem til de har kjørt 3 timer
7	Nei, pris per egg blir billigere jo flere egg som kjøpes
8	Nei, pris per rull blir billigere jo flere ruller som kjøpes
9	Ja.
10	a) Timelønna er alltid 120 kr b) 1 140 kroner
11	a) 100 kr. b) $y = \frac{5\,000}{x}$ d) Ja.
12	a) 40 kr c) Fordi pris per tur blir lavere jo flere turer hun kjører.
13	a) Jo flere passasjerer jo lavere pris per person. b) 1 000 kr c) 62,50 kr
15	a) $8 \cdot 10^3$ b) $3 \cdot 10^4$ c) $4 \cdot 10^6$ d) $8{,}5 \cdot 10^3$ e) $3,8 \cdot 10^4$ f) $4{,}25 \cdot 10^6$

Oppgave	Svar
16	a) $7 \cdot 10^{-2}$ b) $6 \cdot 10^{-4}$ c) $2 \cdot 10^{-7}$ d) $7{,}5 \cdot 10^{-2}$ e) $6{,}3 \cdot 10^{-4}$ f) $2{,}4 \cdot 10^{-7}$
17	a) $4{,}4 \cdot 10^{-3}$ g eller 4,4 mg b) $1{,}5 \cdot 10^{8}$ g eller 150 tonn c) 10^{-10} til $5 \cdot 10^{-10}$ eller 0,1 nm til 0,5 nm d) $7{,}8 \cdot 10^{9}$ eller 7,8 mrd e) $3 \cdot 10^{11}$ eller 300 mrd f) $4{,}6 \cdot 10^{8}$ L eller 460 millioner L
19	a) 10^9 b) 10^4 c) 10^2 d) 10^3 e) 10^3 f) 10^{-2}
20	a) $6 \cdot 10^8$ b) $2 \cdot 10^7$ c) $4{,}2 \cdot 10^9$ d) $1{,}5 \cdot 10^3$ e) $3 \cdot 10^3$ f) $2 \cdot 10^8$ g) $4{,}5 \cdot 10^{-3}$ h) $5 \cdot 10^3$
21	$\approx 6{,}7 \cdot 10^7$ meter = 67 000 km
22	$\approx 1{,}3 \cdot 10^7$ kopper = 13 mill. kopper
23	$6 \cdot 10^{13}$ bakterier = 60 billioner bakt.
24	$2 \cdot 10^4$ = 20 000 ganger større
25	c) 12 personer
26	a) 2 glass b) M ≈ 50 %, K ≈ 70 %

Oppgave	Svar	Oppgave	Svar
33	a) 2,75 timer b) 1 time og 48 min	**35**	a) 522 km/t b) 1t 40min c) 2 127 km
	c) 14.09	**37**	16.52

Oppgave 14

Antall personer	1 Pris for leie	3	6	10
Pris per person	4 200 kr	1 400 kr	700 kr	420 kr

Antall personer	1 Pris for leie	2	5	10
Pris per person	4 000	2000 kr	800 kr	400 kr

Oppgave 27

	Valutakurs	Pris
Euro	1	69
Nok	10,43	719,67

	Valutakurs	Pris
Euro	1	28
Nok	10,43	292

Oppgave 28

	Valutakurs	Mengde
Dollar	1	35,63
Nok	8,42	300

	Valutakurs	Pris
Dollar	1	149
NOK	8,42	1 254,58

	Valutakurs	Pris
NOK	8,64	1 719
Dollar	1	199

Oppgave 29

	Kurs	Pris
SEK	100	799
NOK	102	815

Oppgave 30

Hellerud – Oslo S	Målestokk	Avstand
Kart	1	12 cm
Virkelighet	50 000	6 km

	Målestokk	Avstand
Kart	1	5,8 cm
Virkelighet	50 000	2,9 km

Oppgave 32

	Forhold	Antall
Minutt	60	45
Time	1	0,75

	Forhold	Antall
Minutt	60	24
Time	1	0,4

	Forhold	Antall
Minutt	60	36
Time	1	0,6

Oppgave 33

	Forhold	Antall
Minutt	60	45
Time	1	0,75

	Forhold	Antall
Minutt	60	48
Time	1	0,8

	Forhold	Antall
Time	1	0,4
Minutt	60	24

Oppgave 34

	Forhold	Fart
m/s	3,6	10,44
km/t	1	≈ 38

Oppgave 35

	Forhold	Antall
Minutt	60	45
Time	1	0,75

	Forhold	Antall
Minutt	60	40,2
Time	1	0,67

Eksamensoppgave side 66

Løsning 1

$$\frac{160}{4} = 40$$

Mini ville kostet 40 kr.

$$40 \cdot 6 = 240$$

Biggie ville kostet 240 kroner.

Løsning 2

1 $\frac{160}{400}$

$\approx$ **0.4**

2 $0.4 \cdot 100$

$\rightarrow$ **40**

3 $0.4 \cdot 600$

$\rightarrow$ **240**

Mini ville kostet 40 kroner.
Biggie ville kostet 240 kroner.

Eksamensoppgave side 76

Løsning 1

1 $\frac{1.0417 \cdot 10^{13}}{5.372 \cdot 10^{6}}$

$\approx$ **1939128.82**

Det ville blitt 1,939· 10^6 kroner til hver.

Løsning 2

$1,0417 \cdot 10^{13} = \underline{10,417 \cdot 10^{12}}$

$\frac{10^{12}}{10^{6}} = \underline{10^{6}}$

$\frac{10,417}{5,372} \approx \underline{1,939}$

Det ville blitt 1,939· 10^6 kroner til hver.

Eksamensoppgave side 77

Løsning 1

$1 \text{ kg} = 3 \cdot 300 \text{ g} + 100 \text{ g}$

$3 \cdot 39 + \frac{1}{3} \cdot 39 = \underline{130}$

1kg grillgrønnsaker koster 130 kroner.

Løsning 2

Jeg finner først ut hvor mye 1 gram koster:

$\frac{39,00}{300} = \underline{0,13}$

$0,13 \cdot 1000 = \underline{130}$

$1000 \text{ g} = 1 \text{ kg}$

1 kg grillgrønnsaker koster 130 kroner.

Eksamensoppgave side 77

Løsning 1

60 % av 1000 er 600

$2 \cdot 600 = \underline{1200}$

Pernille får i seg 1200 mg = 1,2 g

Løsning 2

1 $0.6 \cdot 1000 \cdot 2$

$\rightarrow$ **1200**

Pernille får i seg 1200 mg = 1,2 g

Eksamensoppgave 79

Løsning 1

I oppskriften står det at Amalie trenger 5 dL sukker til 1 kg appelsiner.
Amalie skal bruke 26 kg appelsiner.

$26 \cdot 5 = 130$

Amalie trenger 130 dL sukker.
130 dL = 13 L

1 L sukker har masse 0,8 kg.

$13 \cdot 0{,}8 = 10{,}4$

Amalie må minst kjøpe 11 poser med sukker.

Løsning 2

1 L sukker har masse 0,8 kg
5 dL sukker har masse 0,4 kg

Appelsiner (kg)	Sukker (kg)
1	0,4
26	x

1 $\frac{1}{26} = \frac{0.4}{x}$

NLøs: $\{x = 10.4\}$

Amalie må kjøpe minst 11 poser med sukker.

Sammenheng og utvikling

Målet for opplæringen er at eleven skal kunne:

- tolke og bruke funksjoner i matematisk modellering og problemløsing
- planlegge, utføre og presentere selvstendig arbeid knyttet til modellering og funksjoner innenfor samfunnsfaglige tema
- bruke digitale verktøy i utforsking og problemløsing knyttet til egenskaper ved funksjoner, og diskutere løsningene
- modellere situasjoner knyttet til tema fra samfunnsliv og arbeidsliv, presentere og argumentere for resultatene og for når modellene er gyldige

Sammenheng mellom størrelser

I dette kapittelet vil vi bruke en del begreper som det er viktig at du forstår. Disse begrepene er markert med **fet skrift**, og du må be om forklaring dersom du leser et begrep som du ikke husker hva betyr.

Størrelse er et slikt begrep. Med **størrelse** mener vi noe som kan beskrives ved hjelp av tall, og eksempel på en **størrelse** kan være:

- Befolkning
- Penger
- Vekt
- Alder
- Avstand
- Volum

Dersom to **størrelser** henger sammen, kan vi beskrive denne **sammenhengen** ved hjelp av **funksjoner** eller **modeller**.

$$\boldsymbol{Funksjoner}\ og\ \boldsymbol{modeller}\ beskriver\ \boldsymbol{sammenhengen}\ mellom\ to\ \boldsymbol{størrelser}$$

For å beskrive **sammenhengen** mellom to **størrelser**, kan vi bruke:

- **Tekst**
- **Tabell**
- **Funksjonsuttrykk, modell eller formel**
- **Graf**

I teoretisk matematikk er det vanlig å erstatte **størrelsene** med bokstavene x og y.

For at en **sammenheng** skal kunne beskrives ved hjelp av **funksjoner**, er det et krav om at **endring** i **verdien** til **størrelse** x fører til en **endring** i **verdien** til **størrelse** y.

Dersom dette er tilfelle, sier vi at y er en funksjon av x.

$$y\ er\ en\ \boldsymbol{funksjon}\ av\ x\ dersom\ \boldsymbol{endring}\ i\ x\ fører\ til\ \boldsymbol{endring}\ i\ y$$

Det er denne **endringen** vi kaller **utvikling**; hva skjer med y når x øker?

Punkt

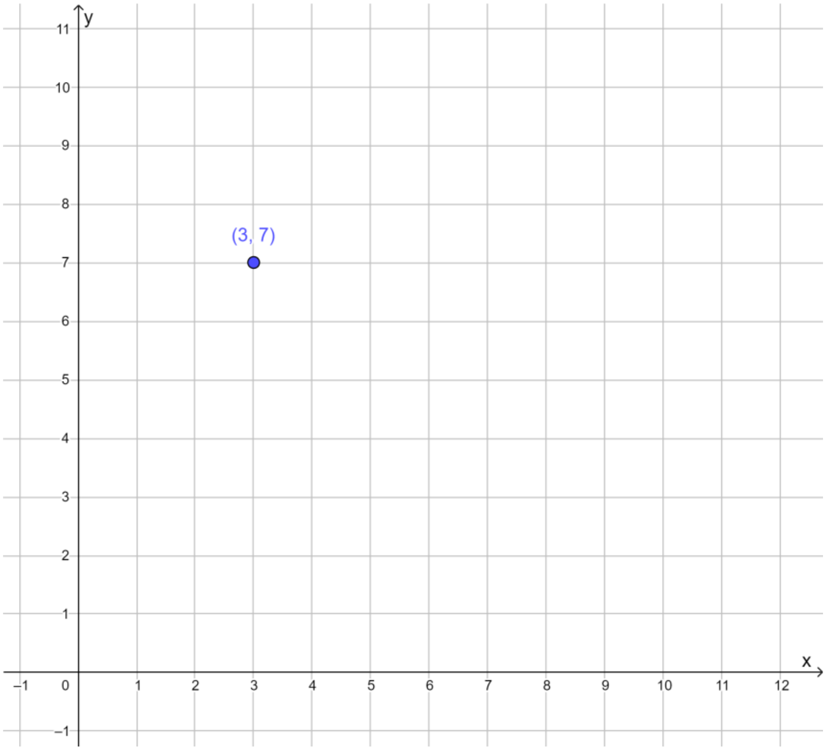
Et **punkt** består av en x- **verdi** og en y- **verdi**. Et **punkt** brukes til å beskrive **tilhørende** x- og y- **verdier**, og skrives på følgende måte:

$$(x, y)$$

Vi skiller x- **verdien** og y- **verdien** ved hjelp av et komma, og vi skriver punktet i en parentes slik at det ikke skal feiltolkes som et desimaltall.

Som et eksempel vil skrivemåten $(3,7)$ fortelle at:

- det er et punkt, fordi det står skrevet i en parentes
- når x-**verdien** er 3, er y-**verdien** 7



Du vil møte tre ulike innfallsvinkler angående **punkter**:

- når du får oppgitt både x- og y- **verdien**
- når du får oppgitt den ene **verdien**, og skal finne den andre **verdien**
- når du ikke får oppgitt noen av **verdiene**, og skal finne begge.

Når du får oppgitt begge verdiene

I 1P blir **punkter** ofte presentert i en **tabell**. I **tabellen** vil x- **verdiene** stå i øverste rad, mens y- **verdiene** står i raden under. En kombinasjon av en x- **verdi** med en **tilhørende** y- **verdi** utgjør et **punkt**.

Tabellen

x	4	7	10
y	9	15	24

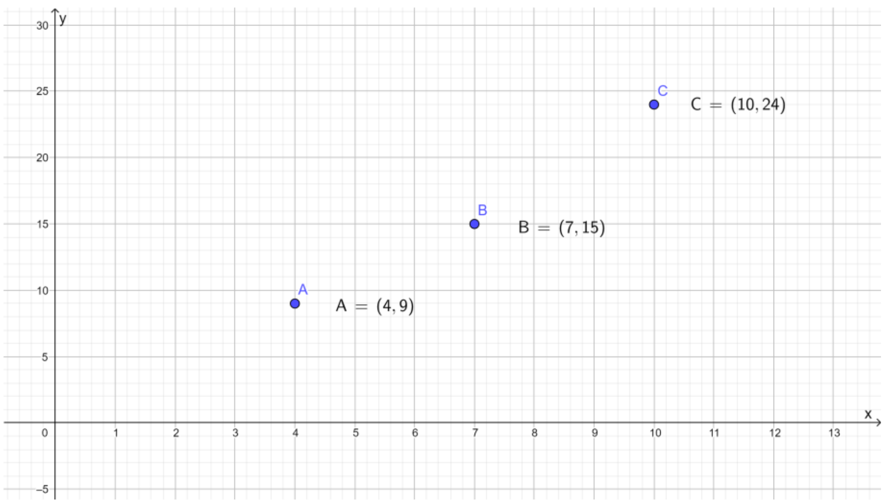
gir **punktene** (4,9), (7,15) og (10,24).

På neste side ser du hvordan du kan finne **punktene** i GeoGebra.

Fremgangsmåte:

1. Skriv **punktene** inn i inntastingsfeltet. Bruk parentes.
2. Trekk i **aksene** slik at alle punktene synes.
3. Sett navn på **aksene**

Du skal ende med et grafikkfelt som likner på dette:



Legg merke til at vi:

- Sprer punktene utover grafikkfeltet

- Kun viser positive x- **verdier**

- Viser **verdien** til hvert punkt

Oppgave 1

I tabellen nedenfor finner du **tilhørende** x- og y- **verdier**.

x	3	6	16
y	128	231	659

Skriv **punktene** inn i GeoGebra. Lag et oversiktlig grafikkfelt. Husk å sette navn på **aksene**.

Når du får oppgitt den ene verdien

Når du skal finne **tilhørende** x- og y- **verdier**, har du som regel først laget en **graf**. Derfor kommer vi tilbake til dette senere i kapittelet. Her nøyer vi oss med å beskrive metodene for hvordan dette gjøres.

<u>Metode som fungerer uansett</u>

1. Skriv inn den oppgitte x- eller y- **verdien**. Skriv det på formen $x =$ eller $y =$.
   GeoGebra vil da lage en linje fra den **verdien** du skrev inn.
2. Velg «Skjæring mellom to objekt». Trykk der linja krysser **grafen**.
3. Få frem **punktets verdi.**

<u>Metode som fungerer når x- **verdien** er oppgitt</u>

Vi kan få GeoGebra til å finne **funksjonsverdien** til en x- **verdi,** ved å skrive

$$(x - \boldsymbol{verdi}, navnet\ \text{på}\ \boldsymbol{funksjonen}(x - \boldsymbol{verdi}))$$

Den første **funksjonen** som skrives inn i GeoGebra, gis automatisk navnet $\boldsymbol{f}$**.** Dersom vi ønsker å finne **funksjonsverdien** når $x = 3$, kan vi skrive følgende **punkt**:

$$(3, f(3))$$

GeoGebra vil da lage et **punkt** på grafen der x er 3 og y er **funksjonsverdien** når x er 3.

Når ingen av verdiene er oppgitt

Når du har laget en **graf** kan du bli bedt om å finne

- Høyest og lavest **funksjonsverdi**
- x- **verdien** der **grafen** skjærer x- **aksen**
- y- **verdien** der **grafen** skjærer y- **aksen**

Høyest og lavest **funksjonsverdi** kan du finne ved hjelp av «Ekstremalpunkt». Dersom høyest eller lavest **funksjonsverdi** finnes i et av **grafens** endepunkter, kan du finne **verdien** ved hjelp av «Punkt på objekt».

Du kan finne x- og y- **verdien** der **grafen skjærer aksene** ved å bruke «Skjæring mellom to objekt», og trykke i **skjæringspunktet** mellom **grafen** og **aksen**.

Vi kommer tilbake til dette senere i kapittelet.

Utvikling beskrevet med ulike typer modeller

Når vi skal beskrive **utviklingen** i y- **verdier** når x øker, kan vi beskrive dette ved hjelp av forskjellige typer **modeller**.

Nedenfor finner du en beskrivelse over de fire **modellene** som er pensum for dette kurset.

Modell	Funksjonsuttrykk	Beskriver
Lineær	$y = ax + b$	Endring med et fast tall
Eksponentiell	$y = a \cdot b^x$	Endring med en fast prosent
Potens	$y = a \cdot x^b$	
Polynom	Den høyeste eksponenten avgjør graden.	Den eneste **modellen** hvor endring i y- **verdi** kan være både positiv og negativ.
2. grad	$y = ax^2 + bx + c$	
3. grad	$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$	
4. grad	$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$	

Det skal komme klart frem i oppgaven hvilken **modell** du skal velge. Dette kan enten opplyses ved navn, **funksjonsuttrykk** eller en beskrivelse av **utviklingen.**

Felles for alle **modellene** er at de beskriver en **utvikling** med tre ulike innfallsvinkler:

- En nøyaktig representasjon utfra **punkter**
- En tilnærmet representasjon utfra **punkter**
- Utfra et **funksjonsuttrykk**

Dersom **utviklingen** er beskrevet gjennom et **funksjonsuttrykk**, er **funksjonen** som regel avgrenset til å være **gyldig** for en viss mengde x- **verdier.** Dette kalles **definisjonsmengden** for **funksjonen**, og skrives slik inn i GeoGebra:

$$funksjonsuttrykk, start \leq x \leq slutt$$

Dersom **utviklingen** er beskrevet gjennom **punkter**, må du skrive **punktene** inn i regnearket til GeoGebra. Deretter må du gjennomføre en regresjonsanalyse for å få frem den **modellen** du ønsker. I slike tilfeller blir du ofte bedt om å vurdere **modellens gyldighetsområde**.

Lineær utvikling: $y = ax + b$

Dersom y **endres** *fra* et startpunkt *med* et fast tall for hver gang x øker med 1, sier vi at **utviklingen** er **lineær**. Både startpunktet og det faste tallet har en praktisk betydning, og du vil bli bedt om å kommentere begge.

Lineær utvikling utfra punkter

Tenk deg at en lærer gjorde følgende demonstrasjon foran elevene sine:

Læreren hadde med seg en pappkopp, en bunke med 30 identiske terninger og en vekt. Læreren nullstilte vekta og plasserte deretter pappkoppen på vekta.

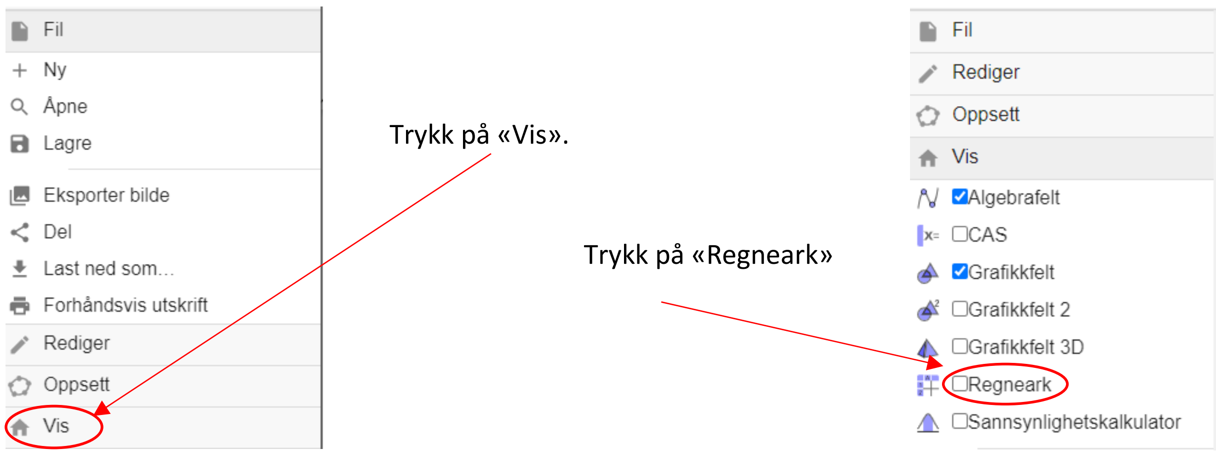
Læreren la et ulikt antall terninger i koppen, og noterte den samlede vekten av terninger + koppen i **tabellen** nedenfor.

Utstyr:	Antall terninger (x)	Samlet vekt i gram (y)
	1	17
	4	32
	7	47
	10	62

Klarer du utfra **tabellen** å finne ut vekten til pappkoppen, og vekten av hver enkelt terning?

Det kan godt hende du allerede har funnet svaret på spørsmålet ovenfor. Likevel skal vi vise hvordan du kan bruke GeoGebra til å finne denne informasjonen.

Steg 1 – åpne regnearket i GeoGebra



Steg 2 – skriv inn punktene fra tabellen

	A	B
1	1	17
2	4	32
3	7	47
4	10	62

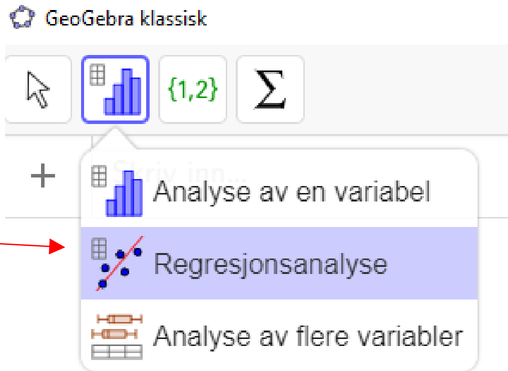
Vi skriver x- **verdiene** i A-kolonnen, og y-**verdiene** i B-kolonnen

Steg 3 – marker punktene og lag en regresjonsanalyse

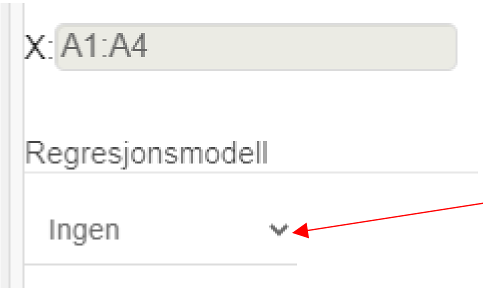
	A	B
1	1	17
2	4	32
3	7	47
4	10	62
5		

Marker tallene

Trykk på «Regresjonsanalyse

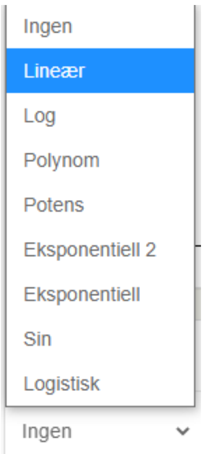


Steg 4 – velg riktig modell

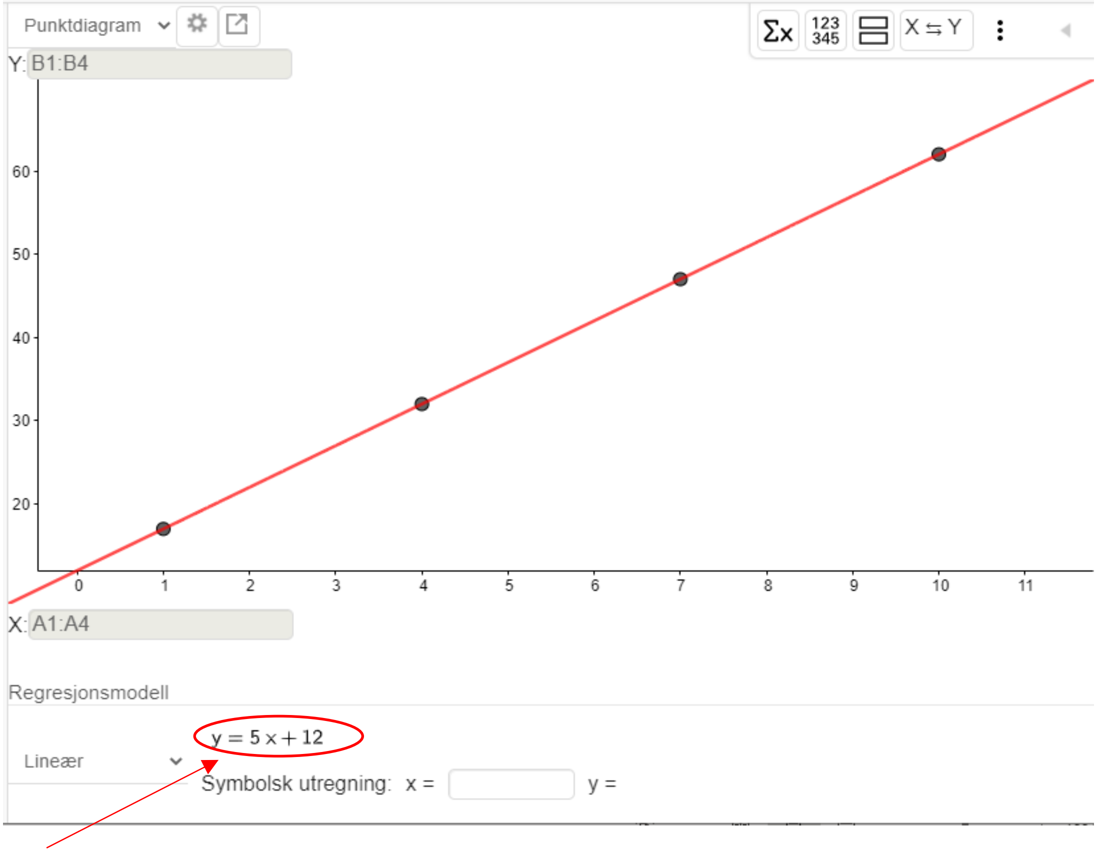


Trykk på denne pila

Velg «Lineær»



Dermed får du opp dette bildet:



Her er **modellen**, eller **funksjonsuttrykket**, som skal hjelpe oss til å finne informasjonen som ble etterspurt. Hva betyr så dette **funksjonsuttrykket**?

Vi har følgende **sammenheng** mellom antall terninger + koppen, og den samlede vekten:

$$samlet\ vekt = vekt\ per\ terning\ \cdot antall\ terninger + koppens\ vekt$$

I tabellen på side 103 har vi definert y som samlet vekt, og x som antall terninger. Vi kan derfor beskrive **sammenhengen** mellom antall terninger +koppen, og den samlede vekten slik:

$$y = vekt\ per\ terning\ \cdot x + koppens\ vekt$$

Regresjonsanalysen i GeoGebra ga oss følgende **modell** på formen $y = ax + b$:

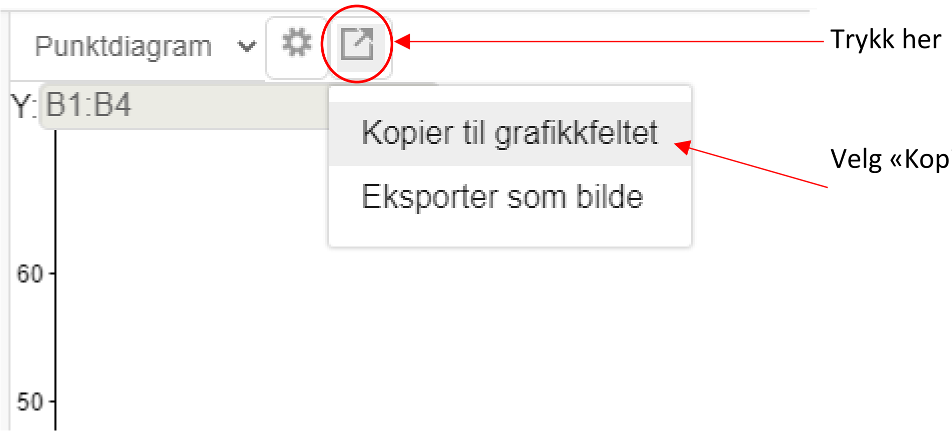
$$y = 5x + 12$$

Dette betyr at hver terning veier 5 gram, mens koppen veier 12 gram.

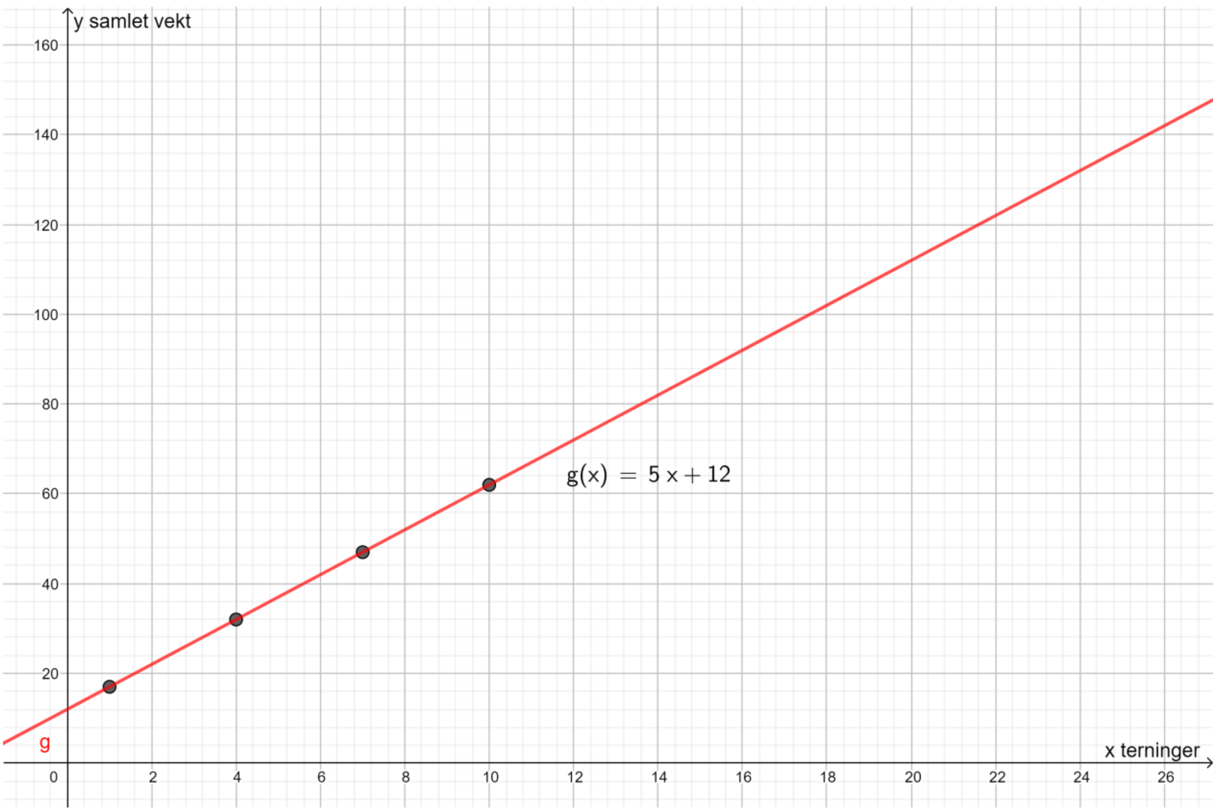
Dermed kan vi si at den samlede vekten starter på 12 gram, og øker med 5 gram for hver terning.

12 er **funksjonens** startpunkt. Dette kalles **funksjonens konstantledd**, og forkortes b
5 er **funksjonens endringsverdi**. Dette kalles **funksjonens stigningstall**, og forkortes a

Hvordan finne konstantledd og stigningstall i GeoGebra



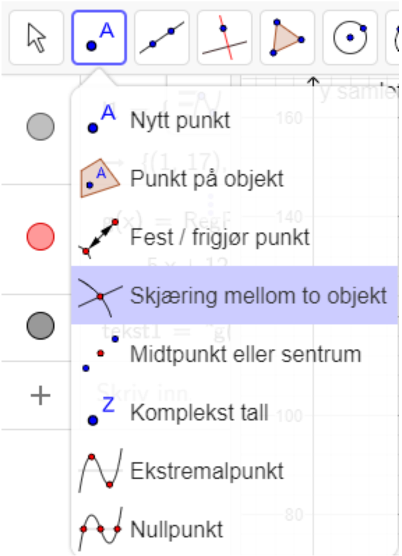
Du kan lukke regresjonsanalysen, og fjerne regnearket. Med justeringer av x- og y- **aksene**, kan grafikkfeltet se slik ut:

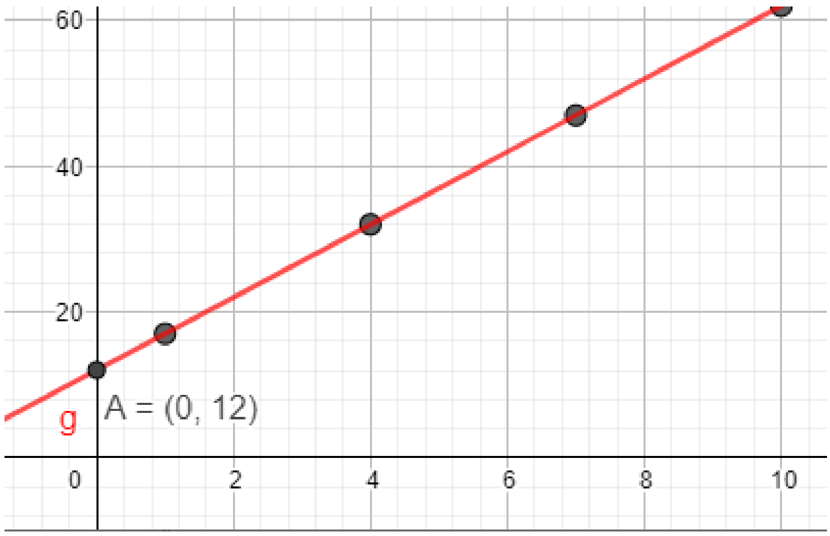


Den røde linja kalles en **graf**. **Grafen** viser **utviklingen** i y- **verdier** når **x** øker, og brukes til å finne **tilhørende** x- og y- **verdier**.

Legg merke til at vi har skrevet navn på **aksene**, og trukket **funksjonsuttrykket** inn i grafikkfeltet.

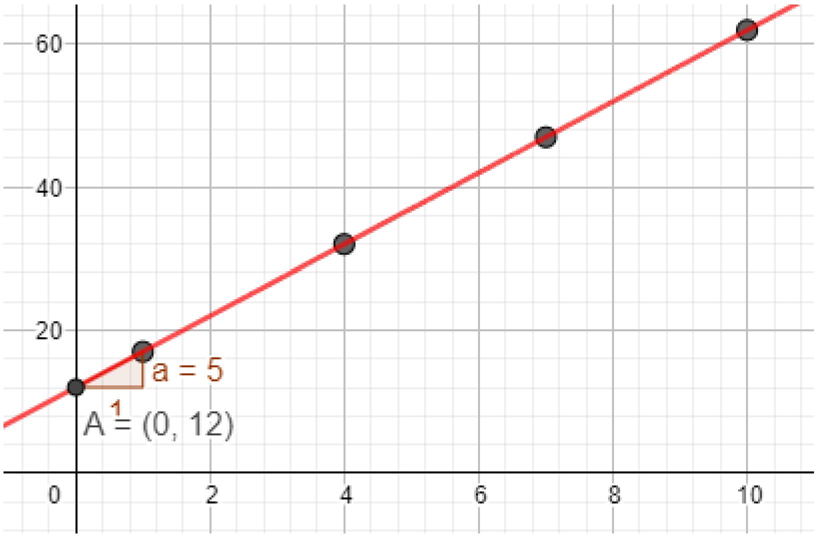
Vi finner **funksjonens konstantledd** der **grafen** krysser y- **aksen**. Velg «Skjæring mellom to objekt, og trykk der **grafen** krysser y- **aksen:**





Punktet A forteller oss at når antall terninger er 0, vil den samlede vekta være 12.

Vi finner **stigningstallet** til en rett linje ved å be GeoGebra analysere stigningen til **grafen**. Velg «Stigning», og trykk på **grafen**.

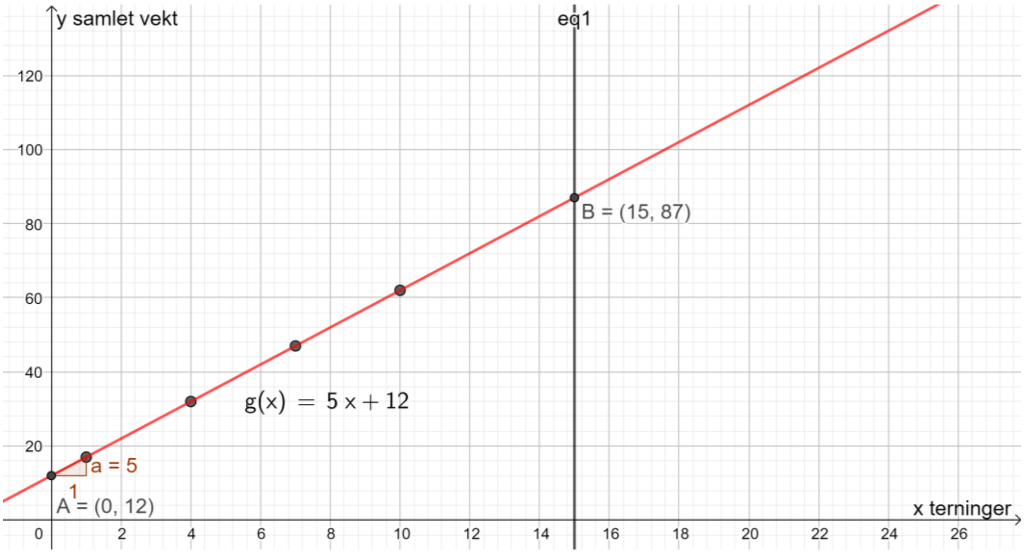


Stigningstallet a forteller oss at y øker med 5 hver gang x øker med 1.

Hvordan finne tilhørende x- og y- verdier?

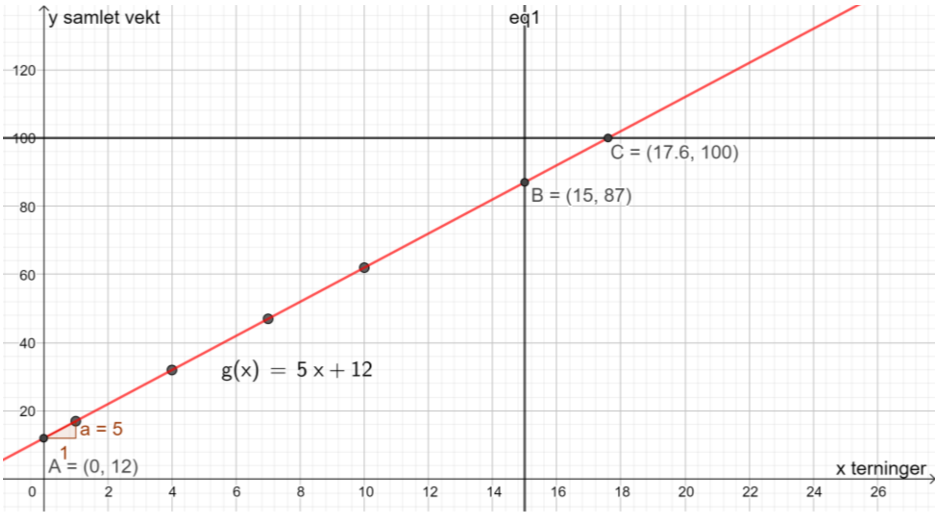
Vi kan nå bruke **grafen** til å finne **tilhørende** x- og y- **verdier**.

Tenk deg at vi ønsker å finne den samlede vekten dersom vi legger 15 terninger i koppen. Dette betyr at vi skal finne den **tilhørende** y- **verdien** når x = 15. I inntastingsfeltet må vi skrive at $x = 15$, og bruke «Skjæring mellom to objekt».



Punkt B forteller at samlet vekt med 15 terninger vil veie 87 gram.
Fremgangsmåte: skrev x = 15, brukte «Skjæring mellom to objekt»

Dersom vi ønsker å finne ut hvor mange terninger vi må legges i koppen for at den samlede vekten skal overstige 100 gram, må vi finne den **tilhørende** x- **verdien** når $y = 100$. I inntastingsfeltet må vi skrive $y = 100$, og bruke «Skjæring mellom to objekt».



En tolkning av **punkt** C forteller oss at vi må legge 18 terninger i koppen for at den samlede vekten skal overstige 100 gram.
Fremgangsmåte: skrev $y = 100$, brukte «Skjæring mellom to objekt».

Modellens gyldighetsområde

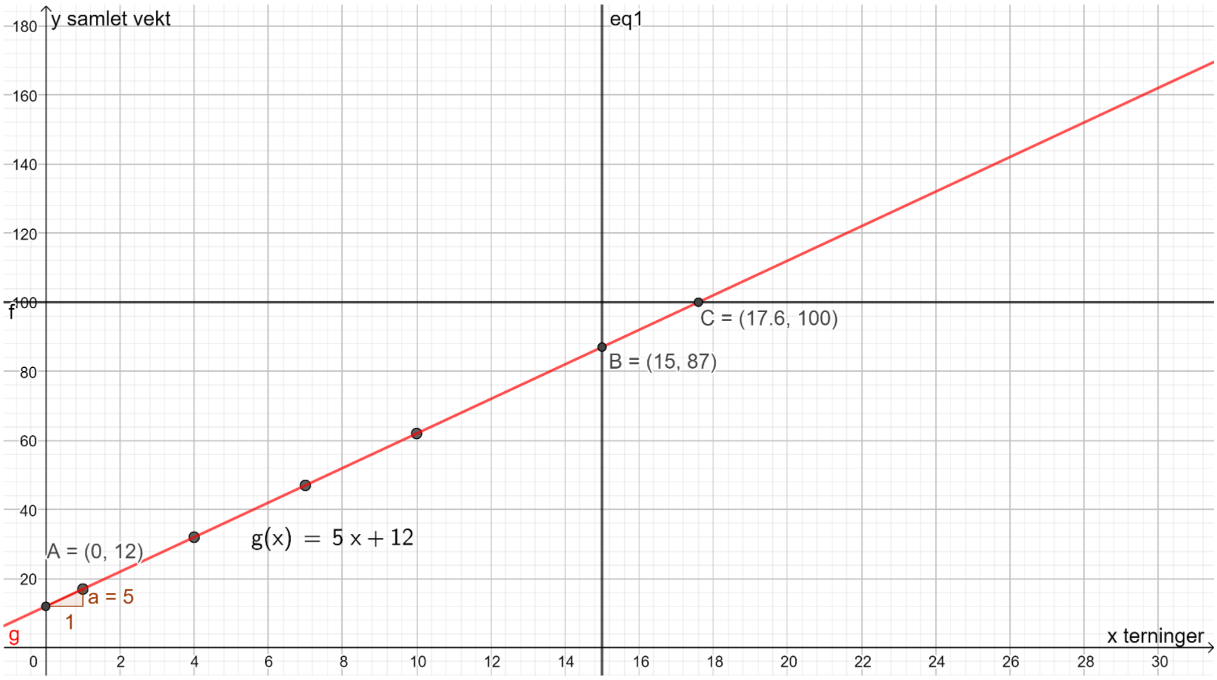
Ytterst få **modeller** brukt i praktiske situasjoner er **gyldige** for alle x- **verdier.** Kanskje er det noen begrensninger som gjør at **modellen** har en nedre eller øvre grense. Kanskje er det slik at **modellen** bli mer usikker etter hvert som x- **verdiene øker**.

I noen oppgaver er begrensningene oppgitt. I noen oppgaver skal du vurdere **modellen** opp mot et reelt **punkt**. I noen oppgaver må du gjøre selvstendige vurderinger.

I eksempelet med læreren som måler den samlede vekten av terninger pluss en kopp, står det innledningsvis at læreren har med en bunke på 30 identiske terninger. Det betyr at **modellen** vi har funnet har en øvre grense på 30. Det er i tillegg ikke mulig å legge på et negativt antall terninger. Dermed blir den nedre grensen 0.

Dette betyr at **modellen** er **gyldig** for x- **verdier** fra og med 0, og til og med 30.

I det endelige grafikkfeltet bør du vise **grafen** for hele **gyldighetsområdet.**



Oppgave 2

En lærer har med seg en eske med 20 identiske penner, en kopp og en vekt. Læreren plasserer koppen på vekta, og måler den samlede vekten av noen penner og koppen. Resultatet fra målingen finner du i tabellen nedenfor:

Antall penner	4	9	12
Gram samlet vekt	230	330	390

Bruk tallene i tabellen til å lage en lineær modell som beskriver sammenhengen mellom antall penner og den samlede vekten.

Hva i oppgaveteksten er det som avgjør at dette er en lineær modell? Hva vil du si er gyldighetsområdet til denne modellen?

Bruk modellen du laget til å finne:

- Hvor mye hver penn veier
- Hvor mye koppen veier
- Den samlede vekten til 7 penner
- Om det er mulig at den samlede vekten overstiger 600 gram

Oppgave 3

En nyåpnet videregående skole presenterte følgende elevtall for to utvalgte år etter oppstart:

År etter oppstart	1	3
Elevtall	620	650

Skolens ledelse antar at utviklingen i skolens elevtall kan beskrives med en lineær modell, som er gyldig i noen år fremover.

Bruk tallene i tabellen til å lage en modell som kan brukes til å beskrive utviklingen i skolens elevtall. Hva forteller modellen om antall elever ved skolens oppstart, og den årlige økningen i skolens elevtall?

Etter 10 år var skolens elevtall 750. Vurder modellens gyldighetsområde, utfra denne opplysningen.

Oppgave 4

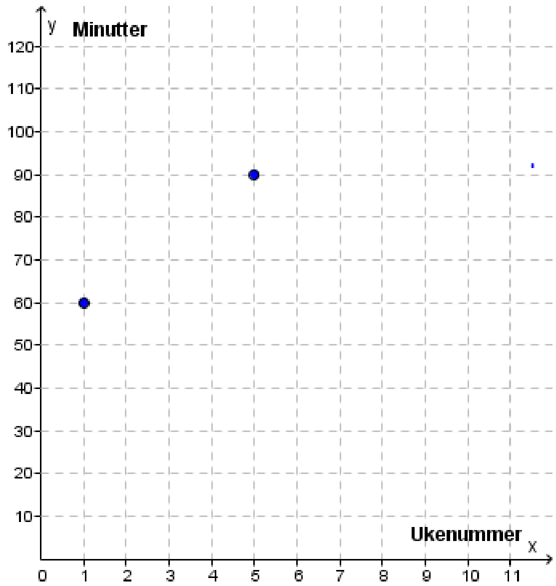
I dag er det 280 kaniner innenfor et avgrenset område. Anta at en sykdom brer seg blant kaninene, og at det om 20 måneder bare vil være 40 kaniner igjen i området.

Bruk informasjonen i teksten ovenfor til å lage en modell som viser hvor mange kaniner det vil være om x måneder dersom antallet avtar lineært.

Hva forteller modellen om den månedlige nedgangen i antall kaniner?

Vurder modellens gyldighetsområde.

Oppgave 5



I koordinatsystemet ovenfor har Liv markert hvor mange minutter hun trente i uke 1 og i uke 5. Liv har som mål at antall minutter hun trener, skal øke lineært for hver uke.

a) Bestem en modell som Liv kan bruke for å regne ut hvor mange minutter hun må øke treningen med hver uke framover for å nå dette målet.

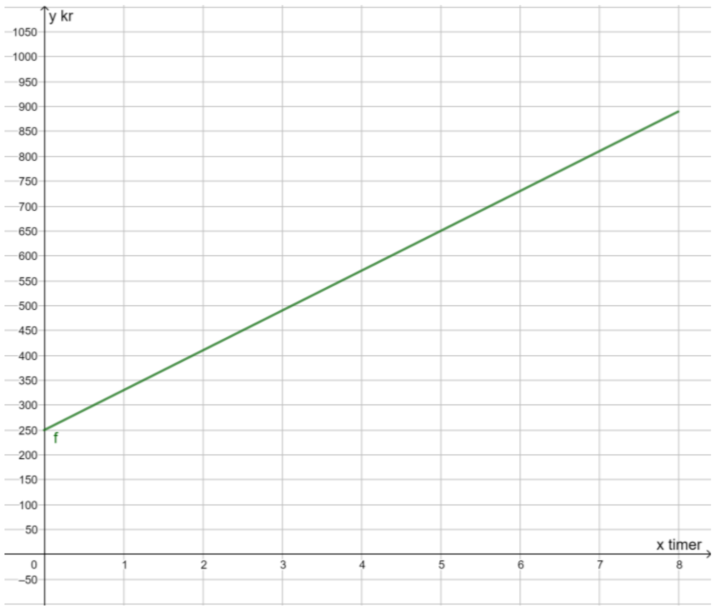
b) Hvor mange minutter må hun trene i uke 40 ifølge denne modellen?

c) Vurder modellens gyldighetsområde.

Oppgave 6

En ungdom har sittet barnevakt som deltidsjobb. Lønna beregnes ut fra et fast beløp for oppmøte, og et fast beløp for hver time ungdommen sitter barnevakt.

Grafen nedenfor viser sammenhengen mellom antall timer ungdommen sitter barnevakt, og hvor mye ungdommen får i lønn.



Velg to punkter fra grafen, og lag en modell som viser sammenhengen mellom antall timer og lønn.

Hvilken informasjon gir modellen?

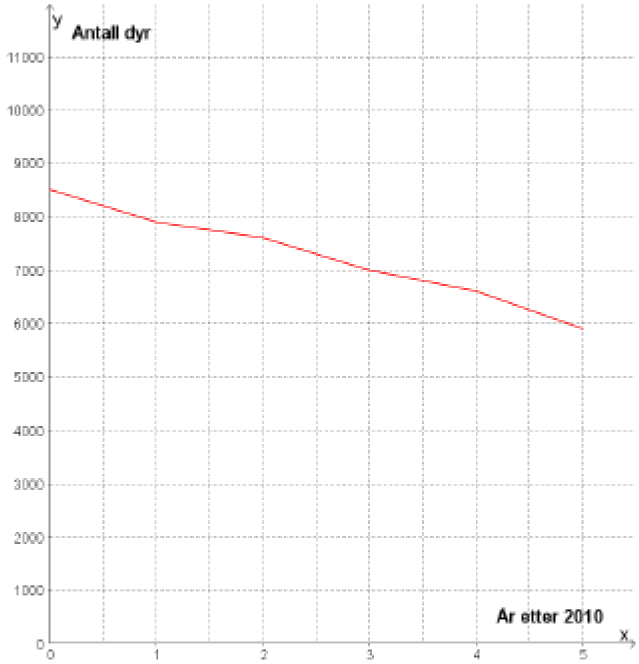
Er antall timer og lønn proporsjonale størrelser?

Oppgave 7

I 2021 er verdien av en leilighet 1 200 000 kroner.
Familien som eier antar at verdien vil stige med 80 000 kroner hvert år.

Lag en modell som viser verdien $f(x)$ kr til leiligheten *x* år etter 2021 dersom det går slik familien antar.

Oppgave 8



Linjediagrammet til venstre viser hvordan antall dyr av en art har avtatt innenfor et bestemt område i perioden 2010–2015.

Lag en lineær funksjon som tilnærmet beskriver utviklingen.

Bruk modellen og grafen du laget til å finne interessant informasjon angående utviklingen i antall dyr innenfor dette området.

Presentasjonsoppgave

Det blir stadig vanskeligere for ungdom å skaffe seg arbeid. Andelen ungdom med deltidsjobb har sunket jevnt siden år 2000, og det er foreløpig ingen tegn til at utviklingen endres.

Tabellen nedenfor viser andelen av 17 år gamle gutter og jenter som har deltidsjobb i noen utvalgte år.

År	2000	2005	2010	2015
Andel jenter	74	63,9	64,6	55,9
Andel gutter	73,9	61	56,2	48,5

Kilde: https://www.ssb.no

Bruk informasjonen i tabellen, og lag en modell for hvert av kjønnene som viser en jevn utvikling i andelen jenter og gutter som har deltidsjobb.

Hva forteller modellene om nedgangen i andelen ungdom som har deltidsjobb? Hvilket gyldighetsområde har modellene?

Lineær utvikling utfra funksjonsuttrykk

Tenk deg at en pakke kjøttdeig tas ut av fryseren, og legges på kjøkkenbenken.

Funksjonsuttrykket

$$T(x) = 2{,}5x - 18$$

kan brukes til å beregne kjøttdeigens temperatur $T(x)$ grader °C etter x timer på kjøkkenbenken.

Hvilken informasjon gir dette **funksjonsuttrykket**, og hva kan vi bruke **funksjonsuttrykket** til?

$$T(x) = 2{,}5x - 18$$

Først må vi skjønne symbolene x og $T(x)$.

x står for antall timer som har gått siden kjøttdeigen ble tatt ut, og x er den eneste **variabelen** vi kan bruke når vi skal løse funksjonsoppgaver i GeoGebra. Hvis ikke kunne vi brukt **variabelen** t for timer.

$T(x)$ uttales «T av x», og måler kjøttdeigens temperatur. Skrivemåten forteller at temperaturen er en **funksjon** av **variabelen** x, som betyr at temperaturen **endres** etter hvert som x øker.

Hva betyr tallene i **funksjonsuttrykket**?

Leddet som står alene er **funksjonens konstantledd**. I dette tilfellet forteller **konstantleddet** at kjøttdeigens temperatur er -18°C når den tas ut av fryseren.

Tallet foran **variabelen** x er **funksjonens stigningstall**. I dette tilfellet forteller **stigningstallet** at temperaturen stiger med 2,5 per time.

Hva kan vi bruke **funksjonsuttrykket** til?

Dersom vi tegner **grafen** til **funksjonsuttrykket** inn i GeoGebra, kan vi bruke **grafen** til å finne **tilhørende** x- og y- **verdier**.

Vi kan for eksempel finne ut hvor lang tid det tar før kjøttet har tint, eller hvilken temperatur kjøttet har etter 12 timer.

Tegne grafen for en definisjonsmengde

Definisjonsmengden er på mange måter det samme som **gyldighetsområde**.

Anta at kjøttdeigen når romtemperatur etter 16 timer. Det betyr at **definisjonsmengden** til **funksjonsuttrykket** er fra 0 til 16.

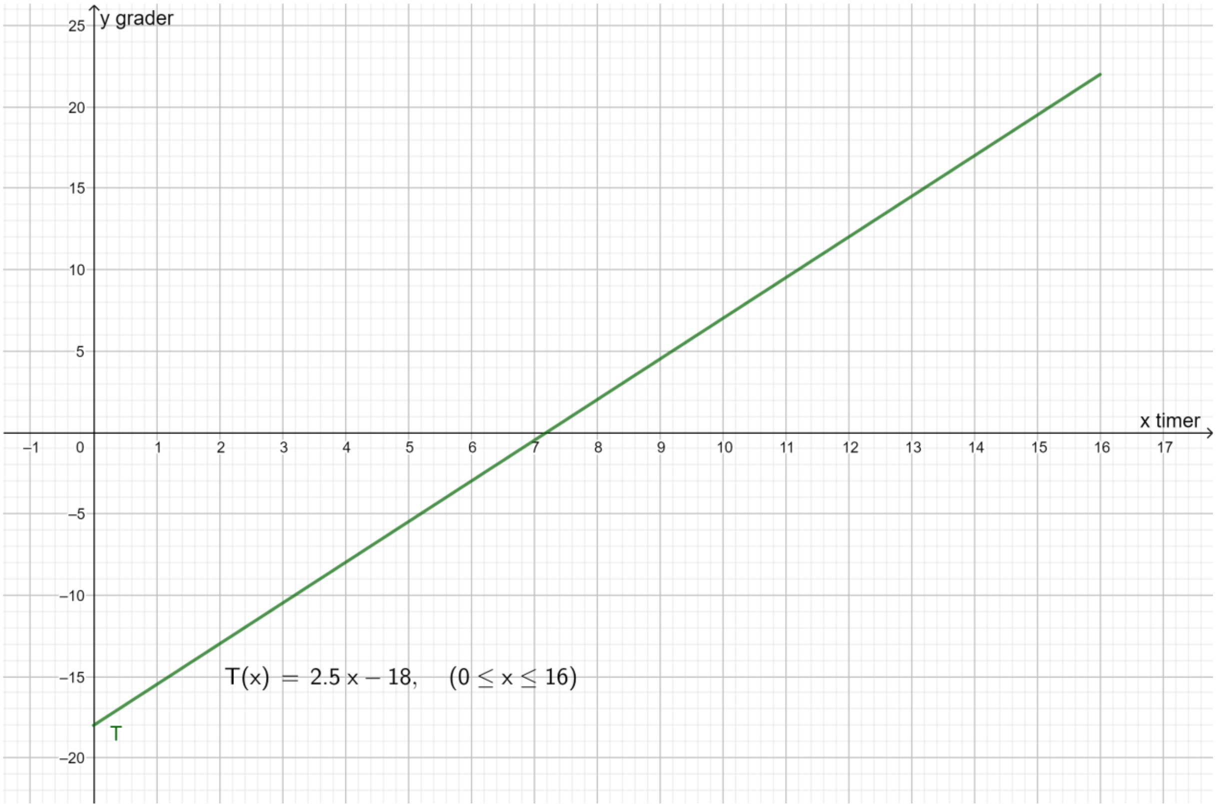
Dette kan også skrives slik:

$$0 \le x \le 16$$

Ofte blir **funksjonsuttrykket** og **definisjonsmengden** skrevet sammen slik:

$$T(x) = 2{,}5x - 18 \quad , \quad 0 \leq x \leq 16$$

Det er også slik vi skriver det inn i GeoGebra. Etter justeringer av x- og y- **aksen**, skal du få et grafikkfelt som likner på dette:



Husk å sette navn på **aksene**, og å trekke inn **funksjonsuttrykket**.

Vi kan nå finne **tilhørende** x- og y- **verdier**.

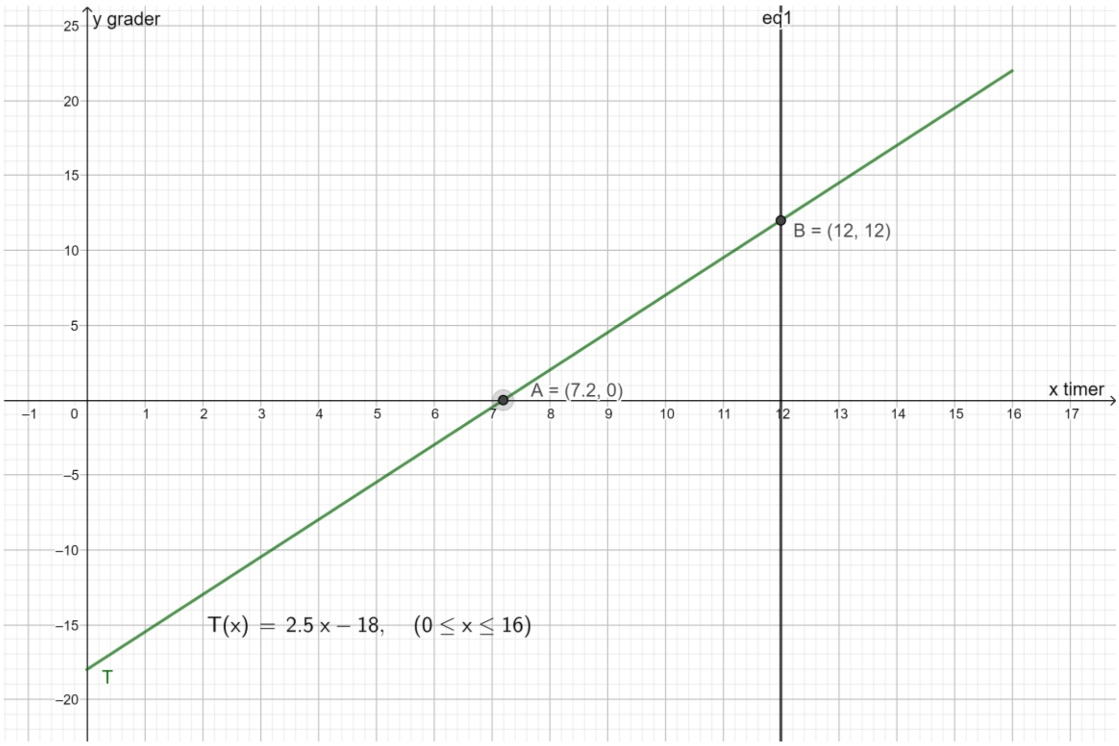
Skjæring mellom to objekt.

Hvor lang tid vil det ta før kjøttdeigen har tint. Hvilken temperatur har kjøttdeigen etter 12 timer?

Kjøttet har tint når det passerer 0℃. Dette finner vi ved å bruke «Skjæring mellom to objekt» og trykke der **grafen** skjærer x- **aksen**.

For å finne kjøttdeigens temperatur etter 12 timer må vi tenke at vii finner 12 timer på x- **aksen**. Derfor må vi skrive $x = 12$, og bruke «Skjæring mellom to objekt» der linja fra $x = 12$ skjærer **grafen**. Alternativt kan vi skrive (12,T(12)).

Dermed får vi disse **punktene** som vi må tolke:



Svar:

Kjøttdeigen tiner etter 7,2 timer. Fremgangsmåte: brukte «Skjæring mellom to objekt».

Etter 12 timer holder kjøttdeigen 12℃. Fremgangsmåte: skrev $x = 12$, brukte «Skjæring mellom to objekt».

Vurdere gyldighetsområde

Dersom **funksjonsuttrykket** ikke er avgrenset, må du selv vurdere **funksjonens gyldighetsområde**. Dette handler som regel om å tenke seg frem til fornuftige avgrensninger.

Oppgave 9

Mathias ønsker å spare til en reise. Han oppretter et fast månedlig trekk inn på en sparekonto, hvor det allerede står et beløp.

Funksjonsuttrykket

$$S(x) = 500x + 4500 \quad , \quad 0 \leq x \leq 12$$

kan brukes til å regne ut hvor mye han har på sparekontoen $S(x)$ kr når han har spart i x måneder.

Bruk informasjonen ovenfor til å vise at du kan:

- Tegne en avgrenset graf i GeoGebra
- Sette navn på x- og y- aksen
- Gi en praktisk tolkning av en funksjons stigningstall og konstantledd
- Finne tilhørende x- og y- verdier

Alle svar skal skrives i Word, og skal forklares med fremgangsmåte.

Oppgave 10

En del kommuner i Distrikts-Norge opplever en jevn nedgang i innbyggertallet.

Funksjonen

$$K(x) = -150x + 3800 \quad , \quad 0 \leq x \leq 10$$

kan brukes til å beregne innbyggertallet $K(x)$ i en kommune x år etter 2021.

Bruk informasjonen ovenfor til å vise at du kan:

- Tegne en avgrenset graf i GeoGebra
- Sette navn på x- og y- aksen
- Gi en praktisk tolkning av en funksjons stigningstall og konstantledd
- Finne tilhørende x- og y- verdier

Alle svar skal skrives i Word, og skal forklares med fremgangsmåte.

Oppgave 11

Tenk deg at du har en fulladet telefon, og at batteriprosenten synker med fast antall prosentpoeng per time ved normal bruk og temperatur. Fuksjonen B gitt ved

$$B(x) = -5x + 100$$

er en modell som viser batteriprosenten $B(x)$ til telefonen, x timer etter at telefonen var fulladet. Bruk informasjonen ovenfor til å vise at du kan:

- Tegne en graf i GeoGebra, og vurdere gyldighetsområdet til en modell
- Sette navn på x- og y- aksen
- Gi en praktisk tolkning av en funksjons stigningstall og konstantledd
- Finne tilhørende x- og y- verdier

Alle svar skal skrives i Word, og skal forklares med fremgangsmåte.

Oppgave 12

21. februar 2020 ble Covid-19 for første gang påvist hos en pasient i Norge. Etter dette steg antall smittede i et relativ raskt tempo.

Dersom vi antar at utviklingen i antall smittede nordmenn økte jevnt i perioden som fulgte, kan antall smittede nordmenn $S(x)$ beregnes ut fra modellen

$$S(x) = 97x$$

hvor x er antall dager etter 20. februar 2020.

22. mars var det registrert 2902 smittede nordmenn. 30. mars hadde dette tallet steget til 4898.

Bruk informasjonen ovenfor til å vise at du kan:

- Tegne en graf i GeoGebra, og vurdere gyldighetsområdet til en modell
- Sette navn på x- og y- aksen
- Gi en praktisk tolkning av en funksjons stigningstall og konstantledd
- Finne tilhørende x- og y- verdier
- Avgjøre om to størrelser er proporsjonale

Alle svar skal skrives i Word, og skal forklares med fremgangsmåte.

En eksamensoppgave

Jacob er selger.

Månedslønnen hans er gitt ved

$$M(x) = 0{,}075x + 32\,000$$

når han selger for x kroner i løpet av en måned.

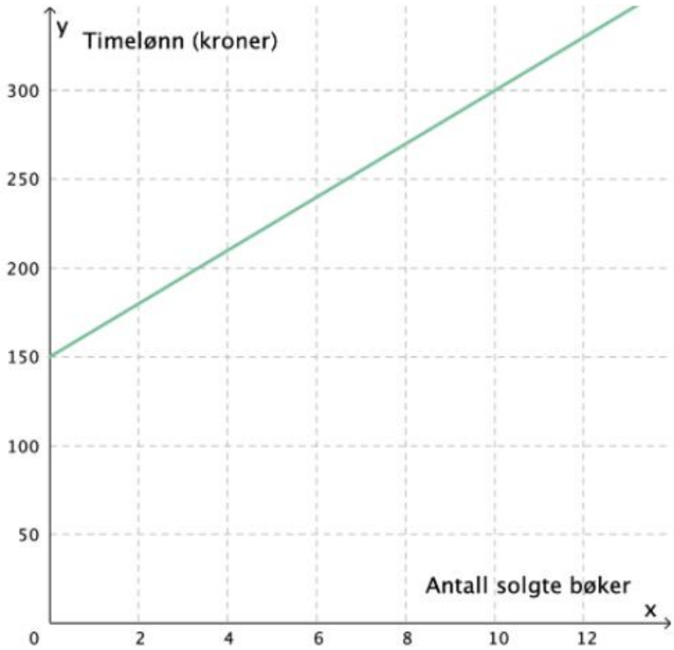
En måned selger Jacob for 150 000 kroner.

Bestem månedslønnen hans denne måneden.

En eksamensoppgave

Sarah har deltidsjobb som bokselger.

Modellen viser timelønnen hennes når hun selger x bøker i løpet av en time.



Hvor mange bøker må Sarah selge i løpet av en time for at timelønnen skal bli 450 kroner?

Eksponentiell utvikling: $y = a \cdot b^x$

Dersom y **endres** *fra* et startpunkt *med* en fast **prosent** for hver gang x øker med 1, sier vi at **utviklingen** er **eksponentiell**. Både startpunktet og den faste prosenten har en praktisk betydning, og du vil bli bedt om å kommentere begge.

For å kunne forstå **eksponentielle modeller**, må du først arbeide med **vekstfaktor**.

Prosentvis endring – vekstfaktor

Det er vanlig at prisen på de fleste varer og tjenester øker for hvert år. Siden varer og tjenester med høy pris vil øke med et høyere kronebeløp enn varer og tjenester med lav pris, er det vanlig å beskrive prisveksten med et **prosenttall**.

Vi anser den **opprinnelige** prisen på hver enkelt vare til å være 100 %. I 2021 er den antatte prisveksten på 2,6 %. Det betyr at i gjennomsnitt blir alle varer og tjenester 2,6 % dyrere enn de var ved inngangen til 2021.

Dette betyr at ved utgangen av 2021 har prisen på varer og tjenester steget til 102,6 % i forhold til prisen ved inngangen til 2021. Dette kaller vi **ny verdi i prosent**.

Endringen i prosent kan også være negativ. Som en følge av koronapandemien sank antall pasienter med døgnopphold på norske sykehus med 7 % i 2020, ifølge SSB.

Vi anser det **opprinnelige** antall pasienter med døgnopphold til å være 100 %. Med en nedgang på 7 %, vil **ny verdi i prosent** være 93 %. Det betyr at antall pasienter med døgnopphold i 2020 var 93 % i forhold til antall pasienter med døgnopphold i 2019.

Finne vekstfaktoren

$$100\ \% \ \pm \boldsymbol{endring\ i}\ \% = \boldsymbol{ny\ verdi\ i}\ \%$$

I forrige kapittel lærte du å gjøre **prosenttallet** om til et **desimaltall**. Det er dette **desimaltallet** vi kaller **vekstfaktor**

$$\frac{\boldsymbol{ny\ verdi\ i}\ \%}{100\ \%} = \boldsymbol{vekstfaktor}$$

Oppgave 13

Fyll ut tabellen nedenfor. Ta utgangspunkt i at **opprinnelig verdi** er 100 %.

-7 %	=	93 %	=	0,93		=		=	0,978
+ 7 %	=	107 %	=	1,07	+ 0,4 %	=		=	
- 7,5 %	=		=		- 17,5 %	=		=	
+ 12,3%	=		=			=	300 %	=	
+ 20 %	=		=			=		=	3,5
- 10 %	=		=		- 100 %	=		=	
	=		=	0,87	- 1,2 %	=		=	
	=	140 %	=			=		=	1,007
+ 100 %	=		=			=	100,2 %	=	
	=	70 %	=		- 25 %	=		=	

Bruke vekstfaktoren

Dersom vi får opplyst **opprinnelig verdi** og **endringen i prosent**, kan vi regne **ny verdi** ved hjelp av følgende **regnemetode**:

$$\boldsymbol{Opprinnelig\ verdi\ \cdot ny\ verdi\ i\ \%=ny\ verdi}$$

I oppgave 13 trente du på å gjøre **prosent** om til **desimaltall**. Dersom vi bruker **desimaltallet** i utregningen istedenfor **prosenten**, bruker vi ordet **vekstfaktor** om **desimaltallet**. Da får vi følgende **regnemetode**:

$$\boldsymbol{Opprinnelig\ verdi\ \cdot vekstfaktor=ny\ verdi}$$

Anta at en vare i 2020 kostet 143 kroner, og at prisen steg med 2,6 % i løpet av 2021.
For å finne prisen i 2021 kan vi enten multiplisere med **ny verdi i prosent**:

$Pris\ 2021=143kr\ \cdot 102{,}6\ \%\approx 147\ kr$

eller ved å multiplisere med **vekstfaktoren**:

$Pris\ 2021=143kr\ \cdot 1{,}026\approx 147\ kr$

I 2019 ble det registrert omtrent 750 000 pasienter med døgnopphold på norske sykehus. I 2020 var dette antallet 7 % lavere. For å finne antall pasienter med døgnopphold i 2021 kan vi enten multiplisere med **ny verdi i prosent**:

$Antall\ pasienter\ med\ døgnopphold\ 2020=750\ 000\ \cdot 93\ \%=697\ 500$

eller ved å multiplisere med **vekstfaktoren**:

$Antall\ pasienter\ med\ døgnopphold\ 2020=750\ 000\ \cdot 0{,}93=697\ 500$

Du velger selv hvilken metode du ønsker å bruke. Det er imidlertid greit å vite hvilke metoder du kan bruke på de ulike digitale hjelpemidlene:

Digitale hjelpemidler	Vekstfaktoren	Ny verdi i %
ExCel	✓	✓
GeoGebra	✓	✓
CAS	✓	✓
Kalkulator	✓	Ikke alle

Løs noen av oppgavene på neste side ved hjelp av ExCel og CAS.

Oppgave 14

I 2018 ble en leilighet kjøpt for 2 450 000 kr. I 2021 hadde verdien av leiligheten steget med 15 %. Hvor høy er verdien av leiligheten i 2021?

Oppgave 15

Nypris på en moped var 12 000 kr. Etter ett år hadde verdien sunket med 20 %. Hva var verdien på mopeden etter ett år?

Oppgave 16

Hanne har en timelønn på 160 kr. Hun blir lovet en lønnsøkning på 4,3 %. Hva blir den nye timelønna hennes?

Oppgave 17

Prisen på en aksje var 68 kr. Dagen etter hadde verdien sunket med 2,8 %. Hva ble den nye verdien på denne aksjen?

Oppgave 18

En familie kjøpte en leilighet i 2008 for 1,8 millioner kroner. De antar at leilighetens verdi har steget med 150 % frem til i dag. Hvor høy er verdien på leiligheten dersom familien har rett?

Oppgave 19

a) I januar 2019 kjøpte en person akser for et visst beløp. Verdien på aksjene kunne i juni beregnes utfra regnestykket 15 000 · 1,05. Hva forteller tallene 15 000 og 1,05?

b) Høsten 2020 startet et visst antall elever på VG1. Antall elever som fullførte året kan beregnes utfra regnestykket 140 · 0,875. Hva forteller tallene 140 og 0,875?

Flere prosentvise endringer

Vi må forvente at prisen på varer og tjenester fortsetter å øke i årene som kommer. For hver prisstigning må vi multiplisere den nye prisen med **vekstfaktoren.** Selv om **endringen i prosent** er lik for hvert år, vil prisstigningen i kroner bli høyere for hvert år.

Anta at varen som kostet 147 kroner i 2021 øker med 2,6 % hvert år de neste 4 årene. For hver prisendring må vi multiplisere med **vekstfaktoren**, noe som gir dette regnestykket:

$$Pris\ etter\ 4\ endringer = 147\ kr\ \cdot \underbrace{1{,}026 \cdot 1{,}026 \cdot 1{,}026 \cdot 1{,}026}_{\text{Dette kan forenkles ved hjelp av potens}} \approx 163\ kr$$

Vi får dermed:

$$Pris\ etter\ 4\ endringer = 147\ kr\ \cdot 1{,}026^4 \approx 163\ kr$$

Anta at antall pasienter med døgnopphold ved norske sykehus fortsetter å synke med 7 % hvert år i de neste tre årene. Vi kan dermed regne ut at

$$Antall\ pasienter\ med\ døgnopphold = \ 697\ 500\ \cdot 0{,}93^3 = 561\ 039$$

Vi kan regne ut **ny verdi** etter den siste **prosentvise endringen** ved hjelp av følgende **regnemetode**:

$$\boldsymbol{Opprinnelig\ verdi\ \cdot vekstfaktor^x = ny\ verdi}$$
$$\boldsymbol{der\ x\ ertattes\ av\ antall\ endringer}$$

Du legger kanskje merke til at vi kun har vist utregning ved hjelp av **vekstfaktoren**, og ikke ved hjelp av **ny verdi i prosent**? Grunnen ser du her:

Digitale hjelpemidler	**Vekstfaktoren**	**Ny verdi i %**	
ExCel	✓	✓	Kalkulator lar deg ikke bruke **prosenttall** ved potensregning
GeoGebra	✓	✓	
CAS	✓	✓	
Kalkulator	✓	✗	

Løs noen av oppgavene nedenfor ved hjelp av ExCel og CAS.

Oppgave 20

Hvis vi setter 10 000 kr i banken 1. januar, vil vi etter ett år få *renter* av pengene slik at beløpet på kontoen øker. Renten er en bergenes prosentvis av det beløpet vi har på kontoen.

Hvor mye vil vi ha på kontoen etter 5 år dersom renta er på 3 % per år?

Oppgave 21

En bærbar PC koster 9800 kr som ny. Vi regner med at verdien minker med 25 % i året. Hvor mye er PC-en verdt etter 4 år?

Oppgave 22

Anta at en aksje, som i dag er verdt 118 kr, stiger med 2 % hver dag den neste uka. Hvor høy er verdien på aksjen etter en uke (7 dager)?

Oppgave 23

Anta at en nytraktet kopp med kaffe holder 93 °C, og at temperaturen synker med 6,5 % per minutt de første minuttene (i normal romtemperatur). Hvor varm vil kaffekoppen være etter 3 minutter?

Oppgave 24

Knut kjøper en bil, og han vet at bilens verdi synker en viss prosentandel hvert år. Han ser for seg å beholde bilen i noen år, og han lager følgende regnestykke for å beregne hvor mye han kan selge bilen for:

$$Salgspris = 320\,000 \cdot 0{,}85^4$$

Hvor mye kjøpte Knut bilen for, hvor mange prosent antar Knut at verdien synker hvert år, og hvor mange år tenker Knut å beholde bilen før han selger den?

Hvor mye regner Knut å selge bilen for?

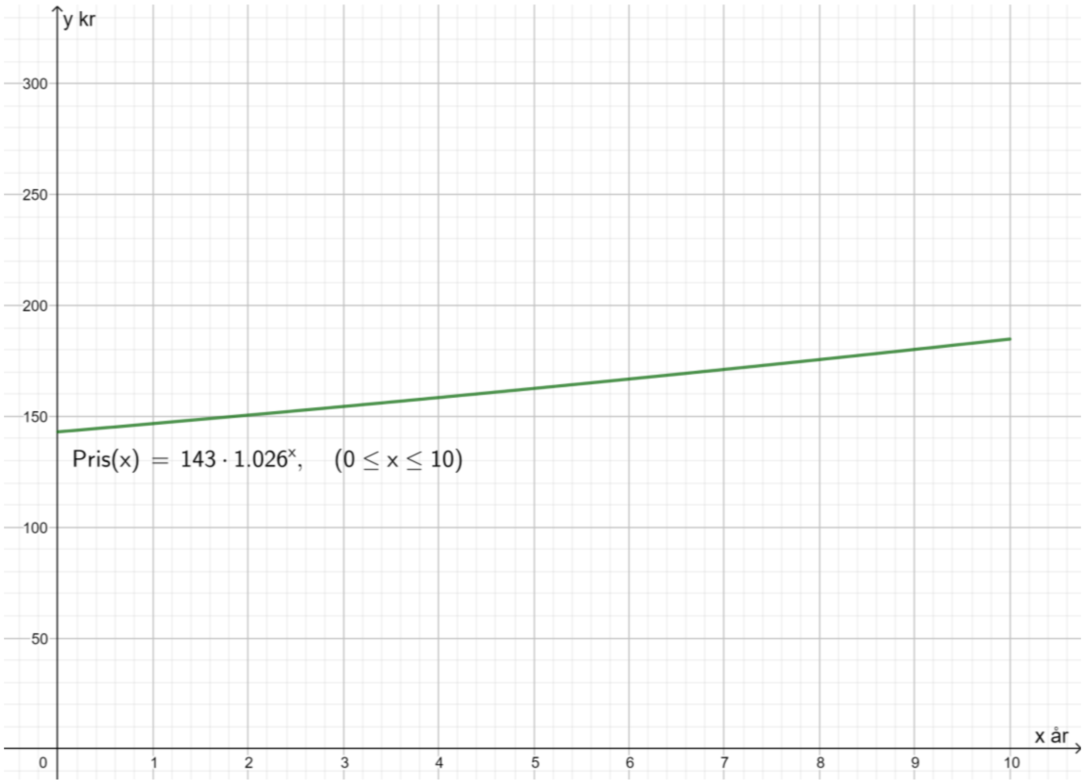
Ukjent antall endringer – eksponentiell utvikling

På de forrige sidene har vi sett på hvordan vi regner **ny verdi** etter et bestemt antall **prosentvise endringer**. Dersom vi ønsker å lage en **regnemetode** som gir oss mulighet til å finne **ny verdi** etter et ukjent antall **endringer**, må vi erstatte det kjente antallet **endringer** med variabelen x.

Nedenfor har vi beskrevet utviklingen i pris for varen fra tidligere eksempler.

Opprinnelig beløp	Etter 1 år	Etter 2 år	Etter 3 år	Etter x år
$143\ kr$	$143\ \cdot 1{,}026^1$	$143\ \cdot 1{,}026^2$	$143\ \cdot 1{,}026^3$	$143\ \cdot 1{,}026^x$

Grafisk vil utviklingen se slik ut:



For ordens skyld har vi avgrenset **modellen** til å være **gyldig** i 10 år fremover.

Funksjonsuttrykket $143 \cdot 1{,}026^x$ er skrevet på formen $y = a \cdot b^x$.

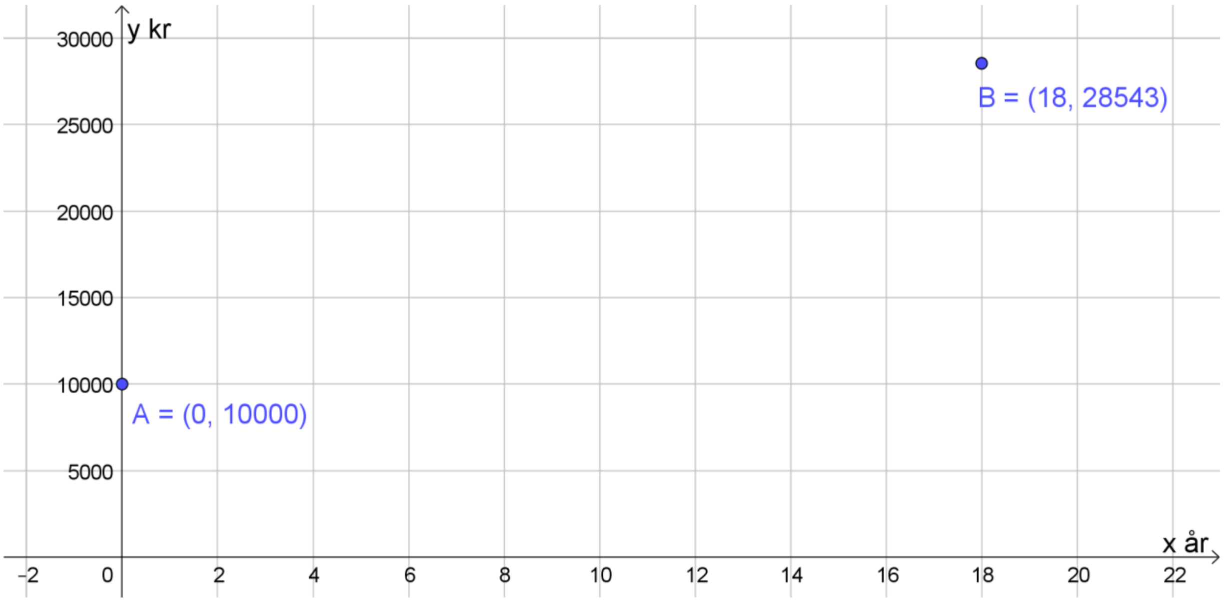
143 er **funksjonens opprinnelige verdi**, og forkortes a

1,026 er **funksjonens vekstfaktor**, og forkortes b.

I oppgaver vil du bli bedt om å tolke **funksjonsuttrykket.**

Eksponentielle modeller utfra punkter

Tenk deg at foreldrene til et nyfødt barn satte inn et beløp i et aksjefond da barnet ble født. Foreldrene forventer at verdien til aksjefondet stiger frem til barnet blir 18 år.



Kan **punktene** i **koordinatsystemet** ovenfor brukes til å finne aksjefondets årlige verdiøkning, dersom aksjefondet har steget med en fast **prosent** hvert år?

Vi skriver punktene inn i regnearket i GeoGebra, og ber GeoGebra utføre en regresjonsanalyse. Deretter velger vi en eksponentiell modell, og får dette funksjonsuttrykket:

Funksjonsuttrykket gir oss denne informasjonen:

10 000 er det opprinnelige beløpet foreldrene plasserte i aksjefondet da barnet ble født.

1,06 = 106 %, som betyr 6 % årlig verdiøkning.

Også her kan du bli bedt om å finne **tilhørende** x- og y- **verdier**, og det gjøres på samme måte som tidligere.
I tillegg kan du bli bedt om å finne **momentan-** og/eller **gjennomsnittlig vekstfart**.

Momentan vekstfart i ett punkt

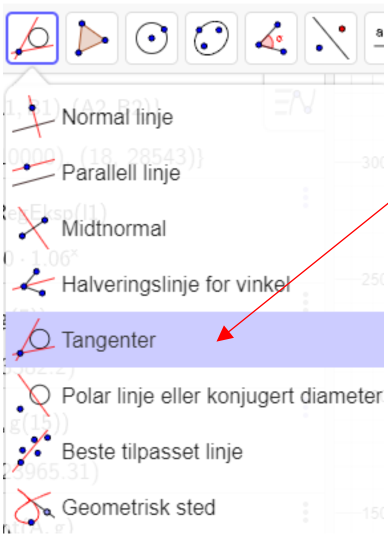
Det kan være interessant å beskrive **endringen** i y- verdi utfra ett bestemt **punkt**. Det er dette som kalles **momentan vekstfart**.

Tenk deg at vi ønsker å finne økningen i aksjefondets **verdi** i år 5 og i år 15, og sammenligne disse økningene.

For å finne den **momentane vekstfarten** til y i ett bestemt **punkt** må vi først skrive inn den oppgitte x- **verdien**. Som vi har beskrevet tidligere kan dette gjøres på flere måter. Vi velger her å skrive (5,g(5)) og (15,g(15)).

Deretter velger vi «Tangent», og trykker på **grafen** og **punktet** vi lagde. Dette må gjøres for begge **punktene**.

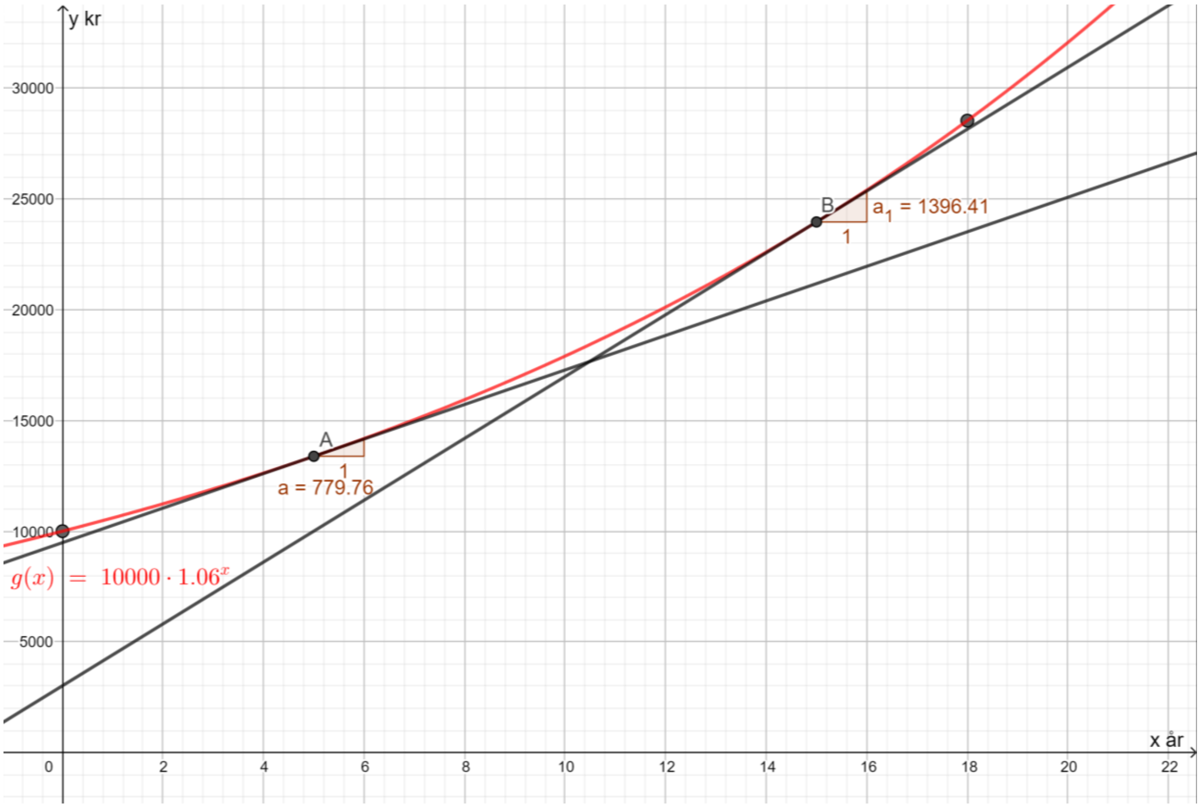
Vi er ute etter **stigningstallet** til denne tangenten. **Stigningstallet** forteller om **utviklingen** i y- **verdi** i akkurat dette **punktet**. Velg «Stigning», og trykk på begge tangentene.



Tangent finner du her:

Stigning finner du her:

Grafikkfeltet vil se slik ut:



Stigningstallet a forteller oss at i år 5 har aksjefondets **verdi** en vekst *tilsvarende* 779,76 kroner per år.

Stigningstallet a_1 forteller oss at i år 15 har aksjefondets **verdi** en vekst *tilsvarende* 1396,41 kroner per år.

Det er interessant å se at aksjefondets **verdi** stiger mer i år 15 enn i år 5, selv om den **prosentvise endringen** er lik. Dette er en egenskap ved **eksponentielle modeller** som viser **positiv utvikling**, og det som gjør at **grafen** har en buet form.

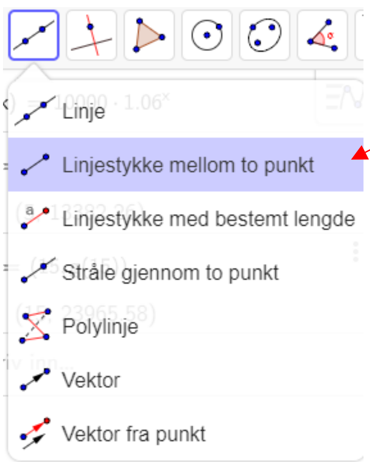
Dersom den **eksponentielle modellen** viser **negativ utvikling,** vil det motsatte gjelde. Jo høyere x- **verdi** vi velger, desto lavere blir nedgangen i y- **verdi**.

Gjennomsnittlig vekstfart mellom to punkter

Det kan også være interessant å beskrive **endringen** i y- verdi mellom to **punkter**. Det er dette som kalles **gjennomsnittlig vekstfart**.

Tenk deg at vi ønsker å finne den årlige økningen i aksjefondets **verdi** mellom år 5 og år 15.For å finne den **gjennomsnittlige vekstfarten** til y mellom to **punkter** må vi først lage **punktene**. I dette eksempelet skal vi bruke **punkter** vi allerede har funnet.

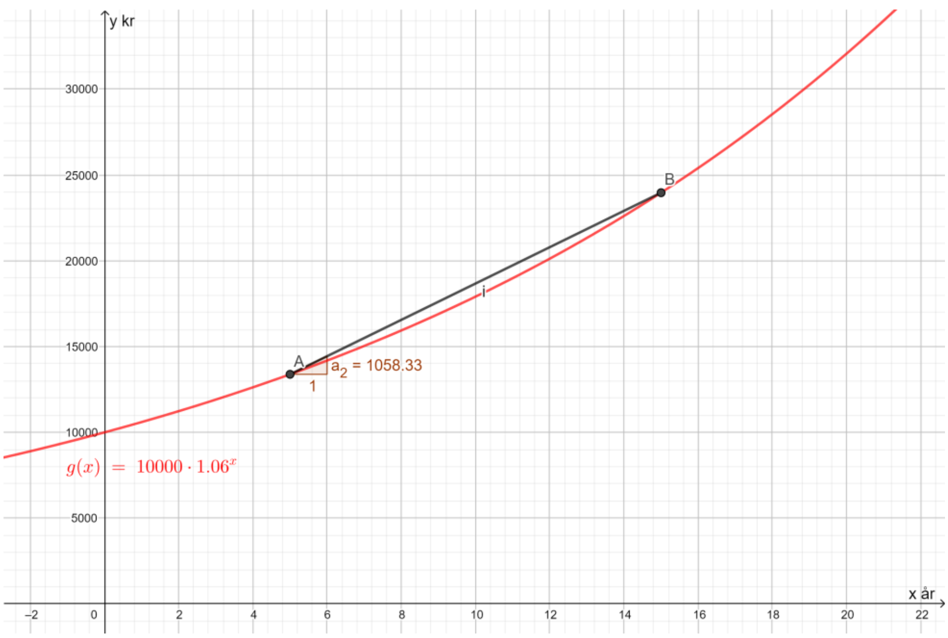
Deretter velger vi «Linjestykke mellom to punkt), og trykker på **punktene** vi lagde. Vi er ute etter **stigningstallet** til dette linjestykket. **Stigningstallet** forteller om gjennomsnittlig **utvikling** i y- **verdi** mellom disse **punktene**. Velg «Stigning», og trykk på linjestykket.



Linjestykke finner du her:

Stigning finner du her:

Grafikkfeltet vil se slik ut:



For ordens skyld har vi fjernet (men ikke slettet) tangentene vi lagde da vi fant **momentan vekstfart**.

Stigningstallet a_s forteller oss at mellom år 5 og 15 har aksjefondet i gjennomsnitt steget med 1 058,33 kroner per år.

Oppgave 25

En nyåpnet videregående skole presenterte følgende elevtall for to utvalgte år etter oppstart:

År etter oppstart	1	3
Elevtall	620	680

Skolens ledelse antar at utviklingen i skolens elevtall kan beskrives med en prosentvis endring som er gyldig i noen år fremover.

Bruk tallene i tabellen til å lage en modell som kan brukes til å beskrive utviklingen i skolens elevtall. Hva forteller modellen om den prosentvise endringen per år i skolens elevtall?

Bruk modellen til å vise at du kan:

- Finne og tolke momentan vekstfart i ett punkt.
- Finne gjennomsnittlig endring i y- verdi mellom to punkter.

Oppgave 26

Ved en annen nyåpnet videregående skole så elevtallet slik ut i to utvalgte år:

År etter oppstart	1	3
Elevtall	1420	1217

Skolens ledelse antar at utviklingen i skolens elevtall kan beskrives med en prosentvis endring som er gyldig i noen år fremover.

Bruk tallene i tabellen til å lage en modell som kan brukes til å beskrive utviklingen i skolens elevtall. Hva forteller modellen om den prosentvise endringen per år i skolens elevtall?

Bruk modellen til å vise at du kan:

- Finne og tolke momentan vekstfart i ett punkt.
- Finne gjennomsnittlig endring i y- verdi mellom to punkter.

En eksamensoppgave

Tabellen nedenfor viser antall innbyggere i Norge 1. januar noen utvalgte år.

År	1960	1970	1980	1990	2000	2010	2017
Innbyggere (millioner)	3,57	3,86	4,08	4,23	4,47	4,85	5,25

La *x* være antall år etter 1960. (La $x = 0$ svare til år 1960, $x = 10$ til 1970 osv.)

Før du begynner med oppgavene nedenfor må du regne ut x- verdiene til alle årstallene

a) Vis at $f(x) = 3{,}57 \cdot 1{,}006^x$ er en modell som passer godt med tallene i tabellen.

b) Hva forteller tallet 1,006 i denne modellen?

Anta at modellen fra oppgave a) vil gjelde i årene framover.

c) I hvilket år vil innbyggertallet i Norge passere 10 millioner ifølge denne modellen?

En eksamensoppgave

Dato	1. juni	1. juli	1. august	1. september
Antall tusen registrert smittet	6278	10 660	17 837	25 761

Tabellen viser antall tusen personer som totalt var registrert smittet av covid-19 noen dager i 2020.

La $x = 1$ svare til 1. juni, $x = 2$ til 1. juli, $x = 3$ til 1. august og $x = 4$ til 1. september.

a) Bruk regresjon til å vise at funksjonen f gitt ved

$$f(x) = 4038 \cdot 1{,}608^x$$

kan brukes som en modell for antall tusen personer som totalt var registrert smittet måned for måned i denne perioden.

b) Hvor mange prosent økte det totale antallet registrert smittede personer med per måned ifølge modellen?

En presentasjonsoppgave

I tabellen nedenfor finner du informasjon om lønnsutvikling i perioden 2015 – 2019 blant ulike yrkesgrupper.

	Gjennomsnittlig månedslønn				
Yrkesgruppe	**2015**	**2016**	**2017**	**2018**	**2019**
Ledere	63400	64350	65800	67810	70150
Akademiske yrker	49620	50370	51640	53120	54970
Kontoryrker	36840	37660	38560	39720	41000
Salg og service	32510	33210	33980	34900	36140
Håndverker	36080	36890	37900	38940	40210

La x være antall år fra 2015. Bruk GeoGebra til å finne:

- en lineær beskrivelse av lønnsutviklingen til hver av yrkesgruppene
- en eksponentiell (prosentvis) beskrivelse av lønnsutviklingen til hver av yrkesgruppene

Syns du lønnsutviklingen til yrkesgruppene er rettferdig?

Eksponentielle modeller utfra funksjonsuttrykk

Tenk deg at du kjøper en moped når du blir 16 år, og selger denne når du blir 20 år. I hvert av de fire årene du eier mopeden, vil mopedens **verdi** synke med en fast prosent.

Funksjonen

$$M(x) = 15000 \cdot 0.85^{x} \quad , \quad 0 \leq x \leq 4$$

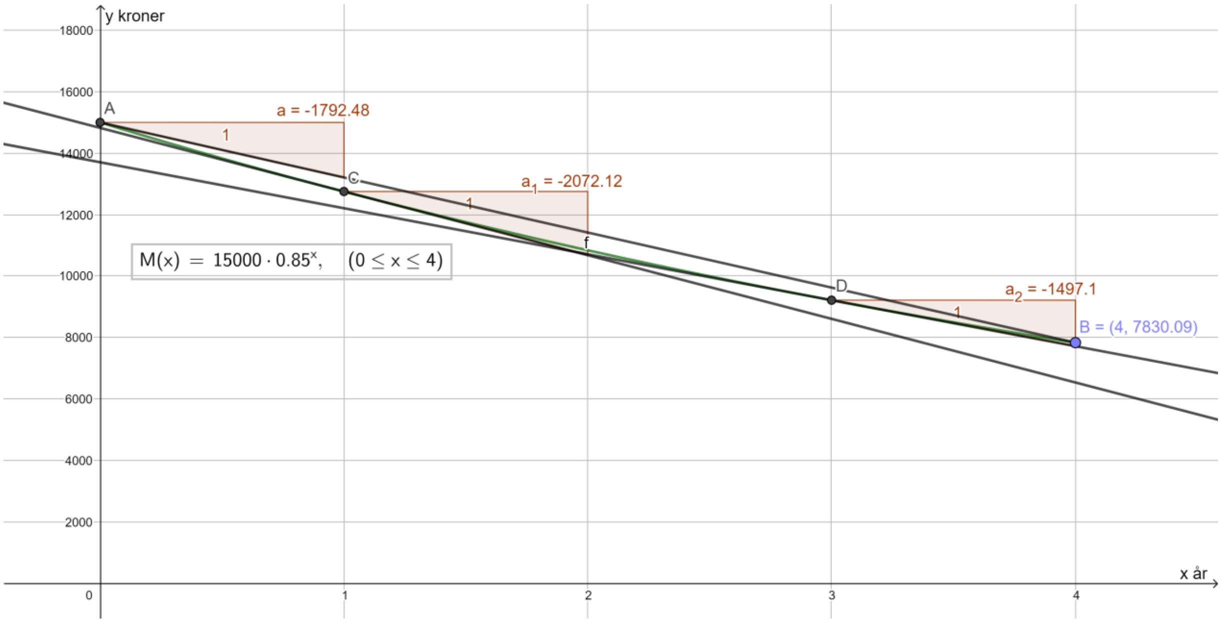
kan brukes til å beregne mopedens **verdi** $M(x)$ kroner x år etter at du kjøpte den.

Hvilken interessant informasjon kan vi finne ved hjelp av **funksjonsuttrykket**?

- **Opprinnelig verdi** er 15000. Dette er summen du kjøper mopeden for.
- **Vekstfaktoren** er 0,85. Dette betyr at mopedens verdi synker med 15 % i året
- $0 \leq x \leq 4$ er **funksjonens** avgrensning. Dette betyr at funksjonen er gyldig for x- verdier mellom 0 og 4.

Ved å tegne **grafen** i GeoGebra, kan vi finne ut at:

- **Punkt** B forteller at forventet salgsverdi om 4 år er omtrent 7 800 kroner. Dette betyr at du må forvente et verditap på omtrent 7 200 kroner på dette kjøpet.
- **Stigningstall** a forteller at mopedens **verd**i i gjennomsnitt synker med omtrent 1 800 kroner per år.
- **Stigningstall** a_1 forteller at etter 1 år synker mopedens **verdi** tilsvarende omtrent 2 072 kr per år.
- **Stigningstall** a_2 forteller at etter 3 år synker mopedens **verd**i tilsvarende omtrent 1 500 kr per år.
- Verditapet per år blir altså lavere jo lenger du har eid mopeden. Dette er en egenskap ved **eksponentielle modeller** med negativ **utvikling**.



Oppgave 27

En familie kjøper en bil.

Funksjonen

$$f(x) = 420000 \cdot 0{,}82^x \quad , \quad 0 \leq x \leq 8$$

kan brukes til å beregne bilens verdi $f(x)$ kroner x år etter kjøpet av bilen, og frem til familien planlegger å selge bilen.

Bruk funksjonsuttrykket og grafen til å finne interessant informasjon om bilens verdi.

Oppgave 28

Familien kjøpte samtidig en leielighet.

Funksjonen

$$L(x) = 3480000 \cdot 1{,}08^x \quad , \quad 0 \leq x \leq 15$$

kan brukes til å beregne leilighetens verdi $L(x)$ kroner x år etter kjøpet av leiligheten, og frem til familien planlegger å selge leiligheten.

Bruk funksjonsuttrykket og grafen til å finne interessant informasjon om leilighetens verdi.

Oppgave 29

Funksjonen *N* gitt ved

$$N(x) = 5{,}32 \cdot 10^{6} \cdot 1{,}008^{x} \qquad 0 \leq x \leq 9$$

kan brukes til å regne ut befolkningen *N(*x*)* i Norge *x* år etter 1. januar 2021.

Bruk funksjonsuttrykket og grafen til å finne interessant informasjon om Norges befolkning.

Oppgave 30

Spørsmålet om hvor mange mennesker som kan leve på jorda har vært stilt en rekke ganger. Funksjonen gitt ved

$$F(x) = 7{,}83 \cdot 10^{9} \cdot 1{,}0114^{x} \quad 0 \leq x \leq 10$$

kan brukes til å beregne folketallet på jorda *x* år etter 1. januar 2021.

Bruk funksjonsuttrykket og grafen til å finne interessant informasjon om verdens folketall.

Oppgave 31

Funksjonen *O* gitt ved

$$O(x) = 1{,}1 \cdot 10^{13} \cdot 1{,}063^{x} \qquad 0 \leq x \leq 10$$

viser forventet verdi av Statens pensjonsfond utland (Oljefondet) *O(*x*)* for x år etter 1. januar 2021.

Bruk funksjonsuttrykket og grafen til å finne interessant informasjon om Norges fondsformue.

Oppgave 32

En kopp med rykende varm kaffe settes på kjøkkenbenken. Funksjonen

$$T(x) = 93 \cdot 0{,}83^x$$

er en modell som viser temperaturen $T(x)$ grader °C til kaffen, x minutter etter at koppen blir satt på kjøkkenbenken.

Hvilket gyldighetsområde vil du si at modellen kan ha?

Oppgave 32

Funksjonen O gitt ved

$$O(x) = 697000 \cdot 1{,}008^x$$

kan brukes til å beregne folketallet i Oslo x år fremover.

Hvilket gyldighetsområde vil du si at modellen kan ha?

Sammenligne lineære og eksponentielle modeller

Det kan ofte være interessant å analysere en utvikling ved hjelp av ulike modeller. For å avgjøre hvilken av modellene som best beskriver utviklingen må vi sammenligne hva modellene spår med en reell observasjon.

Oppgave 33

Tabellen viser folketallet y i Norge (i millioner) fra 1950 (x = 0) til 2000 (x = 50).

År	1950	1960	1970	1980	1990	2000
x	0					
y folketall i millioner	3,2	3,6	3,9	4,1	4,2	4,5

Finn ved regresjon en lineær modell som passer godt til denne utviklingen. Omtrent hvor mye har folketallet økt per år ifølge denne modellen?

Finn en modell på formen $y = a \cdot b^x$ som passer godt til denne utviklingen. Omtrent hvor mye øker folketallet per år ifølge denne modellen?

Undersøk folketallet i Norge i dag.
Hvilken av modellene passer best med dagens folketall?

Oppgave 34
Lars og Lene forsker på hvordan antallet hoppekreps i et ferskvann endrer seg. Tabellen nedenfor viser antall observerte hoppekreps noen dager i april og mai.

Dato	30. april	3. mai	4. mai	6. mai
Antall hoppekreps	10 000	20 000	30 000	120 000

Ut fra disse observasjonene vil Lars og Lene lage ulike modeller. De lar x være antall dager etter 30. april, og y være antall hoppekreps.

Når Lars lager sin modell, antar han at antallet hoppekreps øker med et fast antall hver dag.

a) Bestem modellen han da får.
Gjør rede for hva hvert av tallene i modellen betyr i denne praktiske situasjonen.

Når Lene lager sin modell, antar hun at antallet hoppekreps øker med en fast prosent hver dag.

b) Bestem modellen hun da får.
Gjør rede for hva hvert av tallene i modellen betyr i denne praktiske situasjonen.

9. mai ble det registrert omtrent 150 000 hoppekreps i ferskvannet.

c) Avgjør om utviklingen i antall hoppekreps passer best med modellen du lagde i a) eller modellen du lagde i b)

Polynomisk utvikling: $y = ax^2 + bx + c$

Felles for **lineær** og **eksponentiell utvikling** er at **utviklingen** enten er positiv eller negativ. Dersom vi skal beskrive **utvikling** som både er positiv og negativ, må vi bruke **polynomiske modeller**.

Ordet **poly** betyr flere, og en **polynofunksjon** består av flere **ledd**. En **polynomfunksjon** inneholder **variabler** med ulike eksponenter, og den høyeste eksponenten bestemmer graden.

Et **tredjegradspolynom** inneholder et **ledd** med x^3 som høyeste eksponent.

Et **andregradspolynom** inneholder et **ledd** med x^2 som høyeste eksponent.

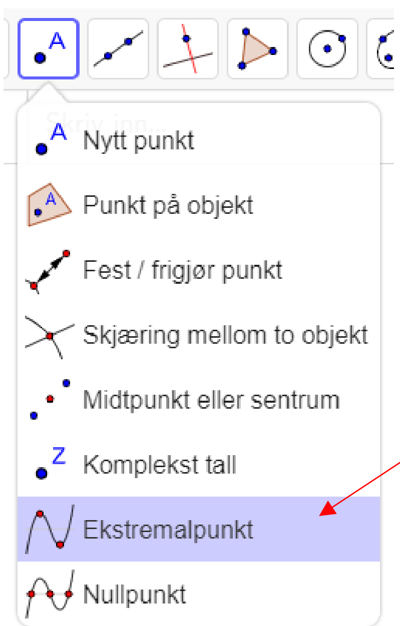
Du velger polynom her

og grad her

Høyest eller lavest verdi – ekstremalpunkt

En utvikling som både stiger og synker vil ha en lavest og en høyest **funksjonsverdi**. Dette kan vi enten finne i ett av **endepunktene** til **grafen**, eller ved å bruke «Ekstremalpunkt».

Ved å velge «Ekstremalpunkt» ber vi GeoGebra finne x- og y- **verdier** der den **momentane vekstfarten** er null. Det er kanskje enklere å tenke at vi ber GeoGebra finne x- og y- **verdier** der **grafen** snur.



Du finner «snupunktene» ved å velge «Ekstremalpunkt» her:

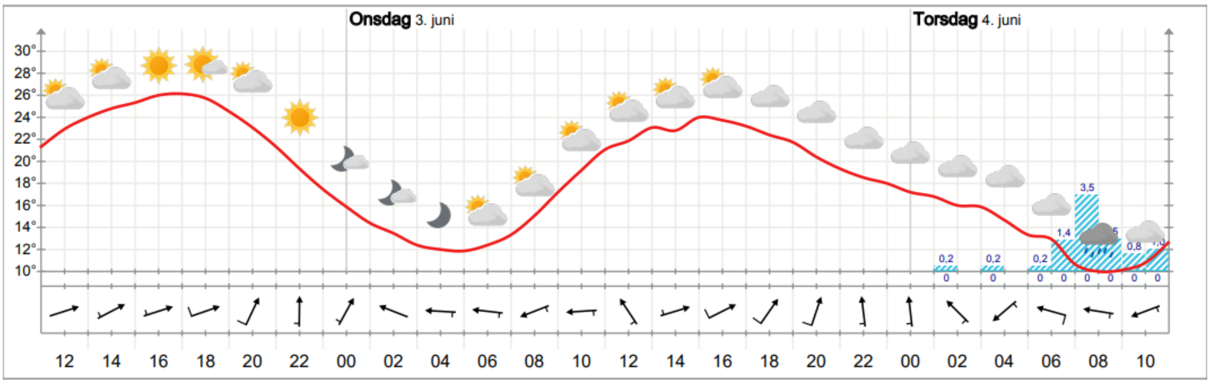
Deretter trykker du hvor som helst på grafen.

Oppgave 35

Yr.no har følgende prognose for temperaturen på Hellerud onsdag 3. juni:

Klokkeslett	0	2	3	5	8	10	11	14	15	17	20	21	22	23
Temperatur	16	13	12	12	15	19	21	23	24	23	20	19	18	18

I tillegg bruker nettsiden følgende linjediagram for å vise den forventet temperatur samme dag:



Legg informasjonen i tabellen inn som punkter i GeoGebra, og velg en modell med en graf som ligner på linjediagrammet ovenfor.

Finn høyest og lavest temperatur onsdag 3. juni.

Presentasjonsoppgave

Tabellen nedenfor viser det månedlige strømforbruket til en enebolig i Oslo i 2019.

Måned	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
kWh	2800	2230	2360	1420	1410	1190	720	1070	1180	1800	2430	2520

I tillegg får du vite at den gjennomsnittlige strømprisen i 2019 var 112,6 øre/kWh.

Bruk informasjonen over til å finne interessant informasjon om strømforbruket til boligen.

En eksamensoppgave

I denne oppgaven skal vi bruke funksjonen S gitt ved

$$S(x) = -3x^4 + 305x^3 - 9000x^2 + 66000x + 495000 \quad , \quad 0 \le x \le 50$$

som en modell for seibestanden $S(x)$ tonn i Arktis x år etter 1960.

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til S.

b) I hvor mange år var seibestanden lavere enn 450 000 tonn?

c) Hvor mange tonn steg seibestanden i gjennomsnitt med per år fra den var på sitt laveste, til den var på sitt høyeste?

d) Bestem den momentane vekstfarten til S i 1970.
Gi en praktisk tolkning av svaret.

En eksamensoppgave

Anta at funksjonen A gitt ved

$$A(x) = 0{,}002x^4 - 0{,}13x^3 + 2{,}75x^2 - 18x + 118 \quad , \quad 0 \le x \le 30$$

kan brukes som en modell som viser verdien $A(x)$ kroner av en aksje x uker etter 01.01.2017.

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til A.

b) I hvor mange uker var verdien av aksjen lavere enn 92 kroner?

c) Bestem forskjellen mellom laveste og høyeste verdi av aksjen de 30 første ukene av 2017.

d) Hvor mye steg aksjen i verdi i gjennomsnitt per uke de 30 første ukene i 2017?

e) Bestem den momentane vekstfarten til funksjonen A når $x = 22$.
Gi en praktisk tolkning av dette svaret.

En eksamensoppgave

Et firma produserer vanntanker. Carl har undersøkt en av tankene og funnet ut at dersom tanken er full og kranen åpnes, vil det etter x minutter være $V(x)$ liter vann igjen i tanken, der

$$V(x) = (10 - 0{,}1x^2)^3 \quad , \quad 0 \leq x \leq 10$$

a) Bestem $V(0)$, og gi en praktisk tolkning av svaret du får.

b) Bruk graftegner til å tegne grafen til V.

c) Hvor lang tid går det fra kranen åpnes, til det er 400 L vann igjen i tanken?

d) Hvor mye vann renner i gjennomsnitt ut av tanken per minutt mens den tømmes?

e) Bestem den momentane vekstfarten til funksjonen V når $x = 3$.
Gi en praktisk tolkning av svaret du får.

En eksamensoppgave

Kari tapper ut vannet av en badestamp. Volumet V liter av vannet i badestampen x minutter etter at hun har åpnet kranen, er gitt ved

$$V(x) = 2 \cdot (30 - x)^2 \quad , \quad 0 \leq x \leq 30$$

a) Tegn grafen til V.

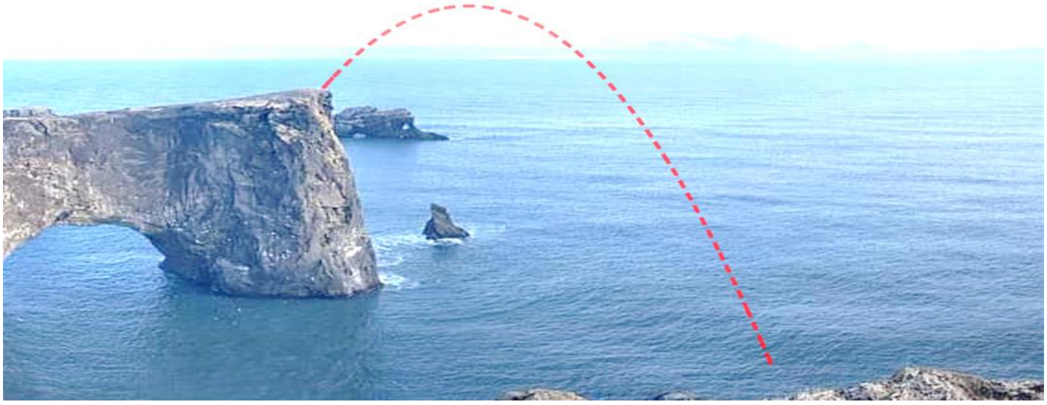
b) Hvor lang tar det ta å tappe ut halvparten av vannet?

c) Hvor mye vann renner i gjennomsnitt ut per minutt fra Kari åpner kranen, til badestampen er tom?

d) Bestem den momentane vekstfarten til funksjonen V når $x = 15$.
Gi en praktisk tolkning av svaret.

Presentasjonsoppgave

Tenk deg at du står på en klippe ved vannet, og kaster en stein ut i vannet. Steinen vil følge en kurve som tegnet nedenfor:



Steinens kurve kan beskrives ved hjelp av følgende funksjonsuttrykk:

$$H(x) = -5x^2 + 10x + 25$$

hvor x er antall sekunder som har gått siden steinen ble kastet, og H er steinens høyde over havoverflaten.

Bruk informasjonen ovenfor til å finne interessant informasjon om steines bevegelse gjennom lufta. Hvilket gyldighetsområde vil du si modellen kan ha?

En eksamensoppgave

Funksjonen h gitt ved

$$h(x) = -0{,}0005x^3 + 0{,}04x^2$$

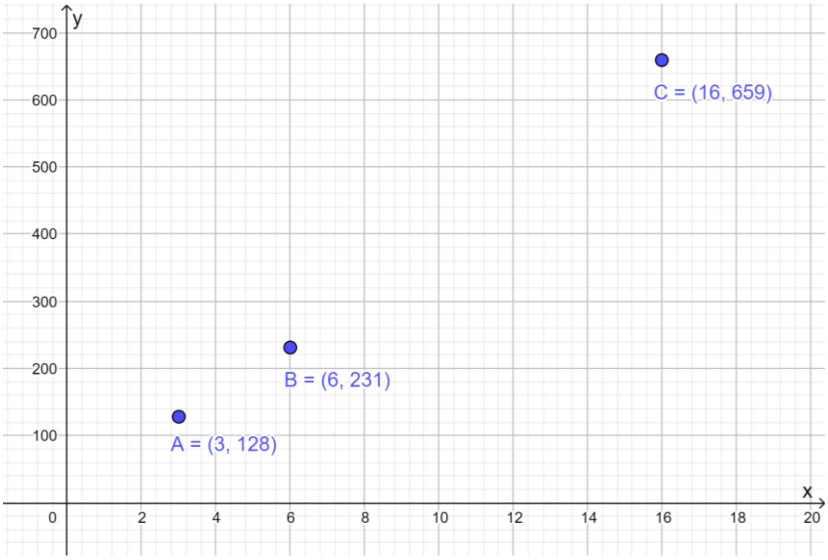
er en modell som viser høyden $h(x)$ cm til en plante, x dager etter at planten begynte å spire.

a) Hva viser modellen om plantens vekst?

b) Hvilket gyldighetsområde vil du si modellen kan ha?

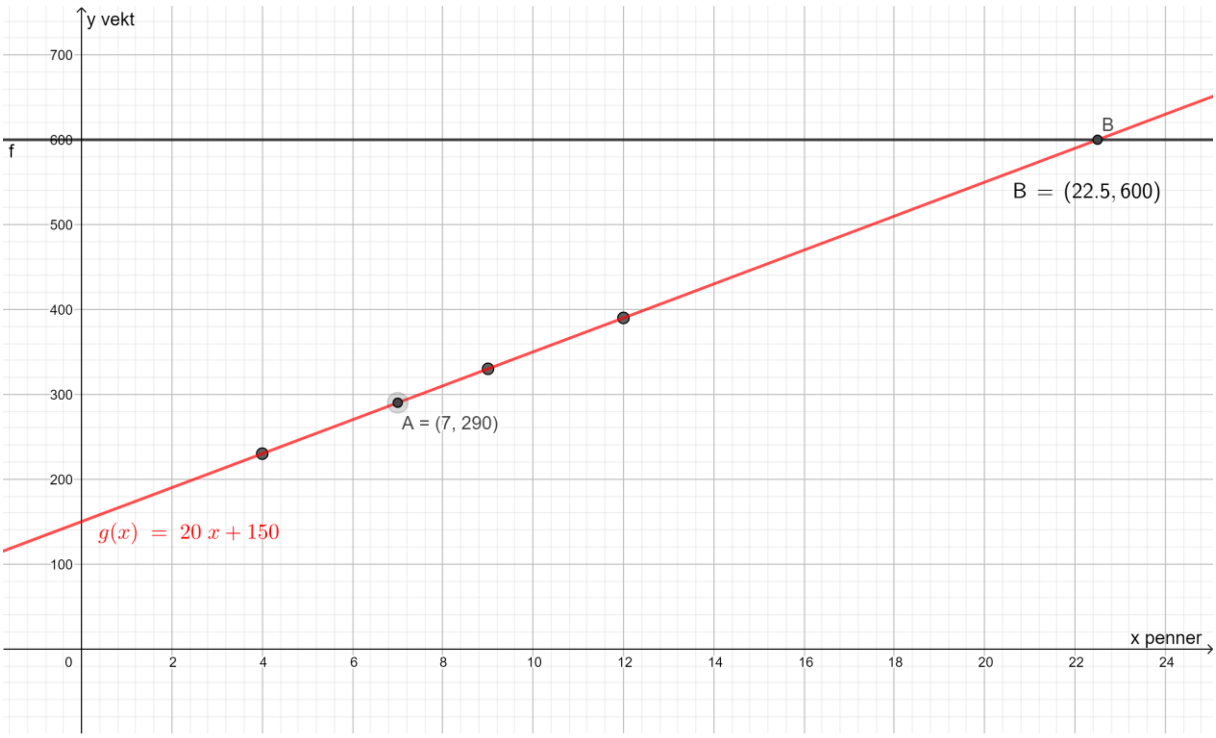
Løsningsforslag

Oppgave 1



Oppgave 2

Det er en lineær modell fordi vekten øker med like mye for hver penn som legges i koppen for $x \in [0,20]$, hvor x er antall penner.
Funksjonsuttrykket forteller at hver penn veier 20 gram, mens koppen veier 150 gram.
Punkt A forteller at 7 penner + koppen veier 290 gram.
Punkt B forteller at 600 gram ligger utenfor definisjonsmengden til denne funksjonen.



Oppgave 3

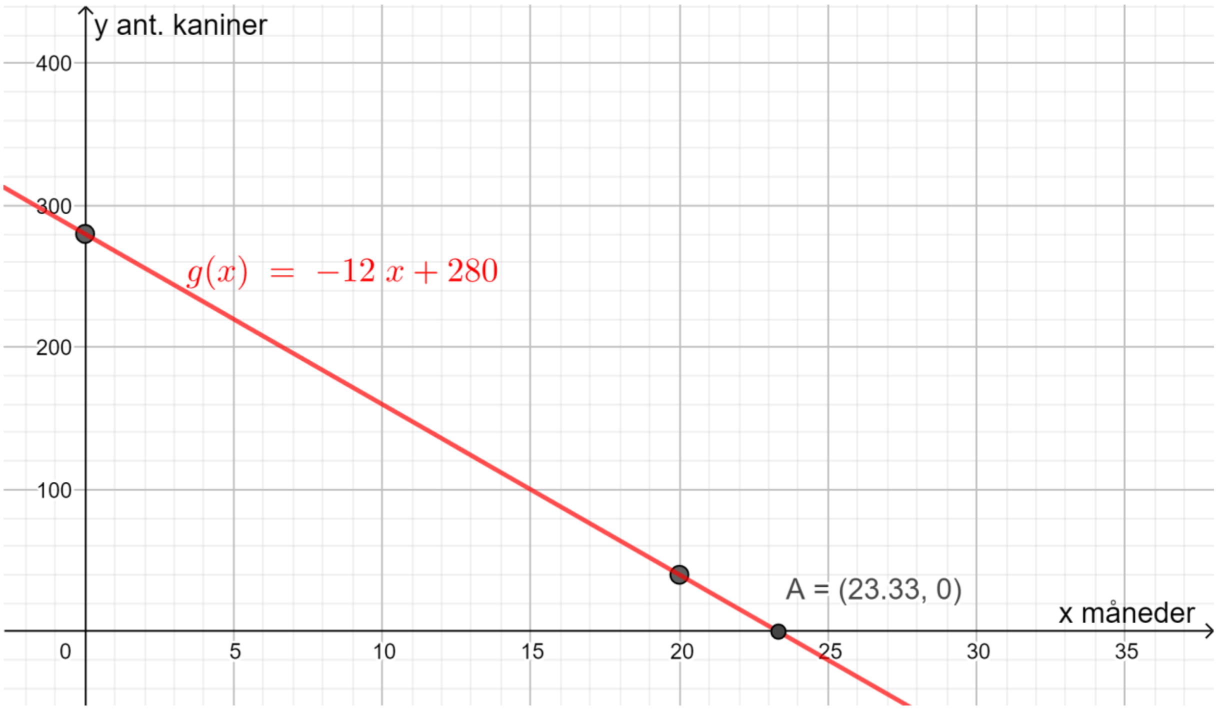
Funksjonsuttrykket forteller at det var 605 elever ved skolens oppstart, og at elevtallet øker med 15 elever per år.
Etter 10 år vil det være 755 elever ved skolen, ifølge modellen. Dette stemmer ganske bra med det reelle antallet, og modellen kan derfor vurderes som gyldig i 10 år fremover.

$y = 15x + 605$

Symbolsk utregning: x = 10 y = 755

Oppgave 4

Funksjonsuttrykket forteller at antall kaniner synker med 12 for hver måned.
Modellen er nok ikke gyldig etter måned 20. Modellen viser at det vil være et negativt antall kaniner i området etter 23 måneder, noe som ikke er mulig. Dessuten er det rimelig å anta at antall kaniner vil øke når sykdommen avtar.

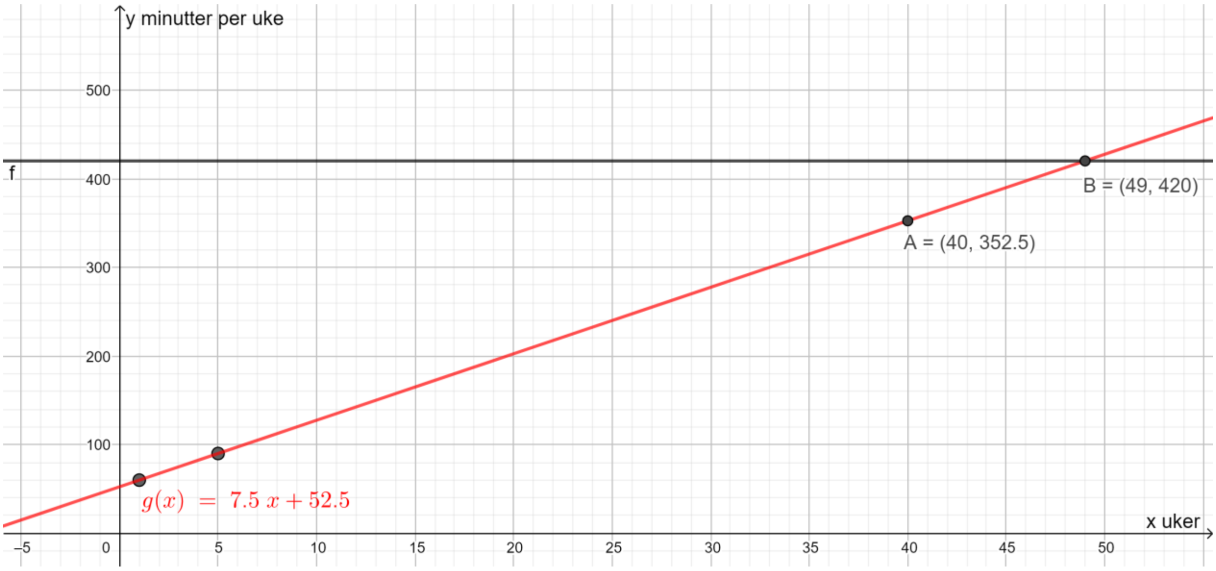


Oppgave 5

a) Liv må øke treningen med 7,5 minutter per uke for å nå dette målet.

b) I uke 40 må hun trene 352,5 minutter, som tilsvarer 5 timer 52 minutter og 30 sekunder.

c) Det er vanskelig å sette en begrensning for Liv, men noe særlig mer enn 1 time hver dag/7 timer i uka er lite trolig at hun klarer. Vi tror derfor at modellen er gyldig for $x \in [0,49]$



Oppgave 6

Modellen forteller at ungdommen får 250 kroner for oppmøtet, og 80 kroner per time. Antall timer og lønn er ikke proporsjonale størrelser, i og med at ungdommen får 250 kroner for oppmøtet.

$$y = 80\,x + 250$$

Oppgave 7

$f(x) = 80000x + 1200000$

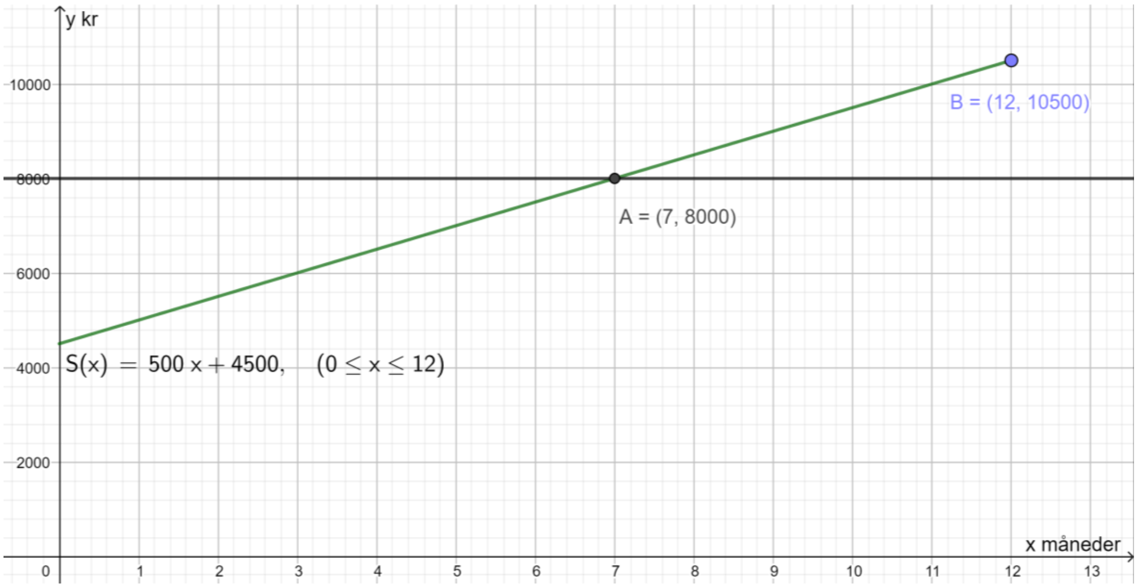
Oppgave 8

Skrev inn punktene (0,8500) og (5,6000), som ga modellen $y = -500x + 8500$. Dette betyr at antallet individer av denne dyrearten synker med 500 per år.

Oppgave 9

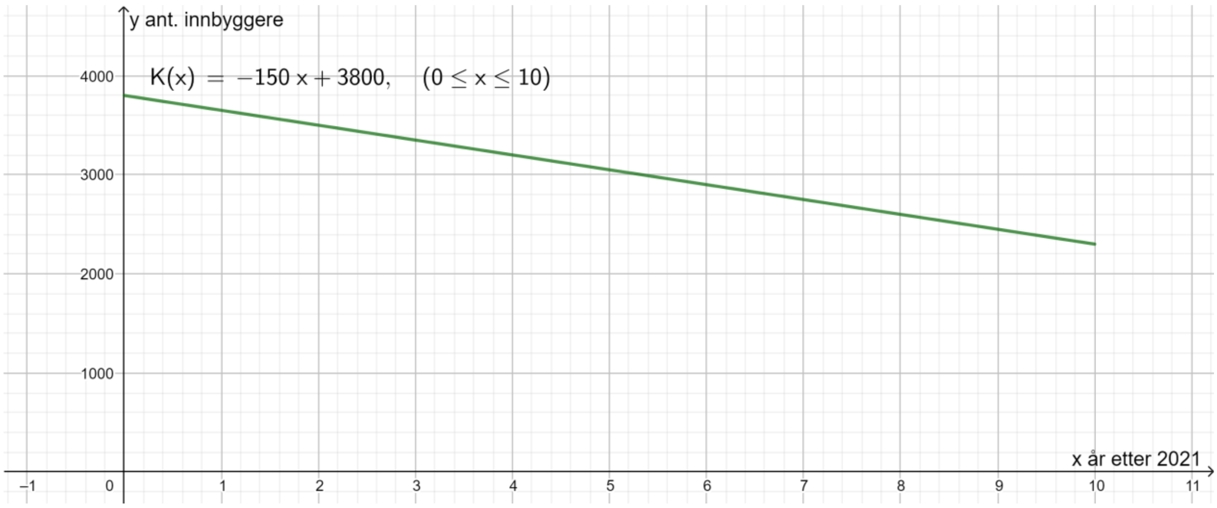
Funksjonsuttrykket forteller at Mathias har 4 500 kroner på sparekontoen når han begynner å spare, og at han sparer 500 kroner per måned.

Punkt A forteller at det tar 7 måneder før sparekontoen passerer 8 000 kroner, mens punkt B forteller at han har 10 500 kroner på kontoen etter å ha spart i ett år.



Oppgave 10

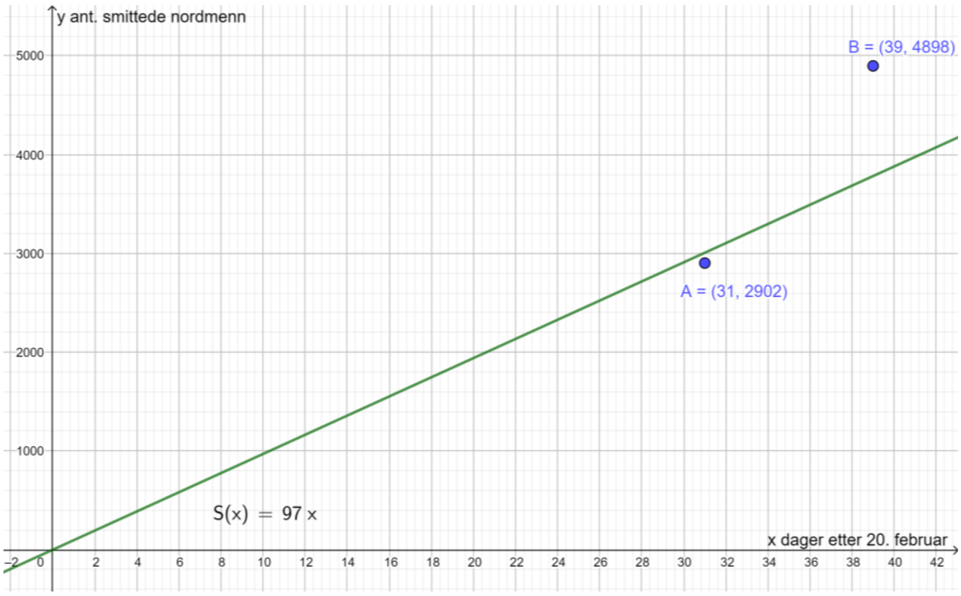
Funksjonsuttrykket forteller at det var 3 800 innbyggere i 2021, og at innbyggertallet synker med 150 per år.



Oppgave 11

Funksjonsuttrykket forteller at batterinivået synker med 5 prosentpoeng per time ved normal bruk. Modellen er i beste fall gyldig frem til telefonen er tom for strøm, som ifølge modellen inntreffer etter 20 timer.
Imidlertid har de fleste telefoner en innstilling som gjør at strømforbruket reduseres når batterinivået er lavere enn 20 %. Det betyr at modellen kun er gyldig frem til punkt B, altså 16 timer. Vi vurderer derfor funksjonen til å være gyldig for $x \in [0,16]$

Oppgave 12
Ifølge modellen er antall dager og antall smittede proporsjonale størrelser, og antall smittede øker med 97 per dag.
Modellen stemmer relativt bra med punkt A, men kan ikke brukes til å forklare utviklingen etter 31 dager. Antall smittede nordmenn økte derfor ikke lineært i denne perioden, og vi må derfor bruke en annen modell for å beskrive utviklingen i antall smittede etter 22. mars.



Eksamensoppgave side 119
Jacob tjener $(0{,}075 \cdot 150000 + 32\,000 =)$ 43 250 kroner denne måneden.

Eksamensoppgave side 119
Sarah må selge 20 bøker for at timelønna skal bli 450 kroner

$y = 15\,x + 150$

Symbolsk utregning: x = 20 y = 450

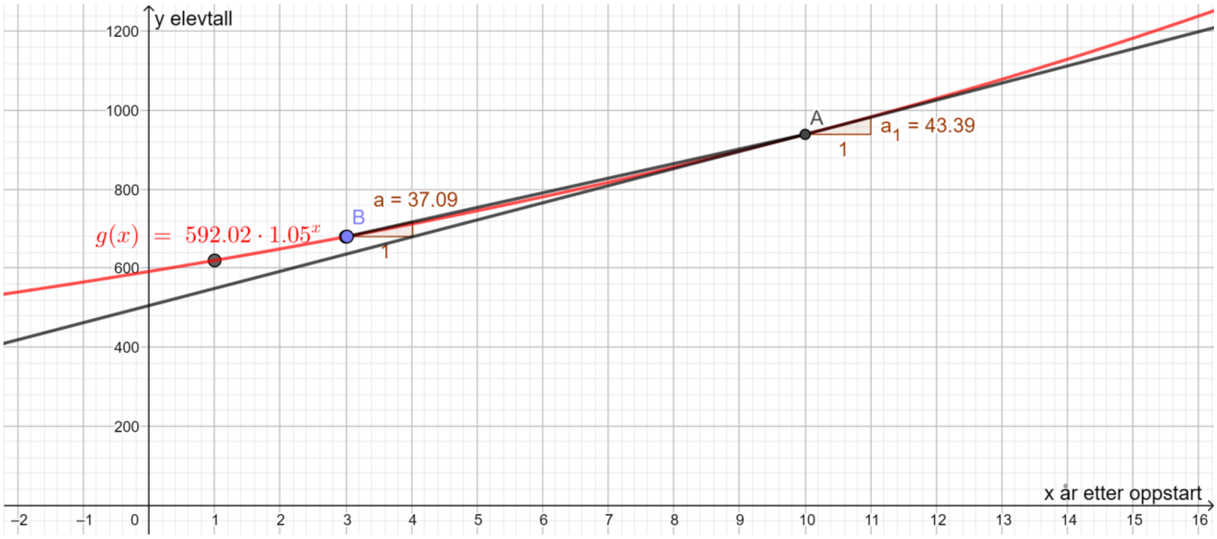
Oppgave 13

-7 %	=	93 %	=	0,93	- 2,2 %	=	97,8 %	=	0,978
+ 7 %	=	107 %	=	1,07	+ 0,4 %	=	100,4 %	=	1,004
- 7,5 %	=	92,5 %	=	0,925	- 17,5 %	=	82,5 %	=	0,825
+ 12,3%	=	112,3 %	=	1,1123	+ 200 %	=	300 %	=	3
+ 20 %	=	120 %	=	1,2	+ 250 %	=	350 %	=	3,5
- 10 %	=	90 %	=	0,9	- 100 %	=	0 %	=	0
- 13 %	=	87 %	=	0,87	- 1,2 %	=	98,8 %	=	0,988
+ 40 %	=	140 %	=	1,4	+ 0,7 %	=	100,7 %	=	1,007
+ 100 %	=	200 %	=	2	+ 0,2 %	=	100,2 %	=	1,002
- 30 %	=	70 %	=	0,7	- 25 %	=	75 %	=	0,75

Oppgave 14

Oppgave	Svar	Oppgave	Svar
14	2 817 500 kr	**20**	11 592,74 kr
15	9 600 kr	**21**	3 100 kr
16	166,88 kr/time	**22**	135,54 kr
17	66,10 kr	**23**	76 ℃
18	4,5 millioner kroner	**24**	Knut betalte 320 000 kr for bilen, han antar at bilens verdi synker med 15 % hvert år, og han skal selge bilen etter 5 år for omtrent 142 000 kroner.
19	a) 15 000 betyr kjøpesummen, mens 1,05 betyr en verdiøkning på 5 % b) 140 betyr antall elever ved skolestart mens 0,875 betyr at 12,5 % har sluttet		

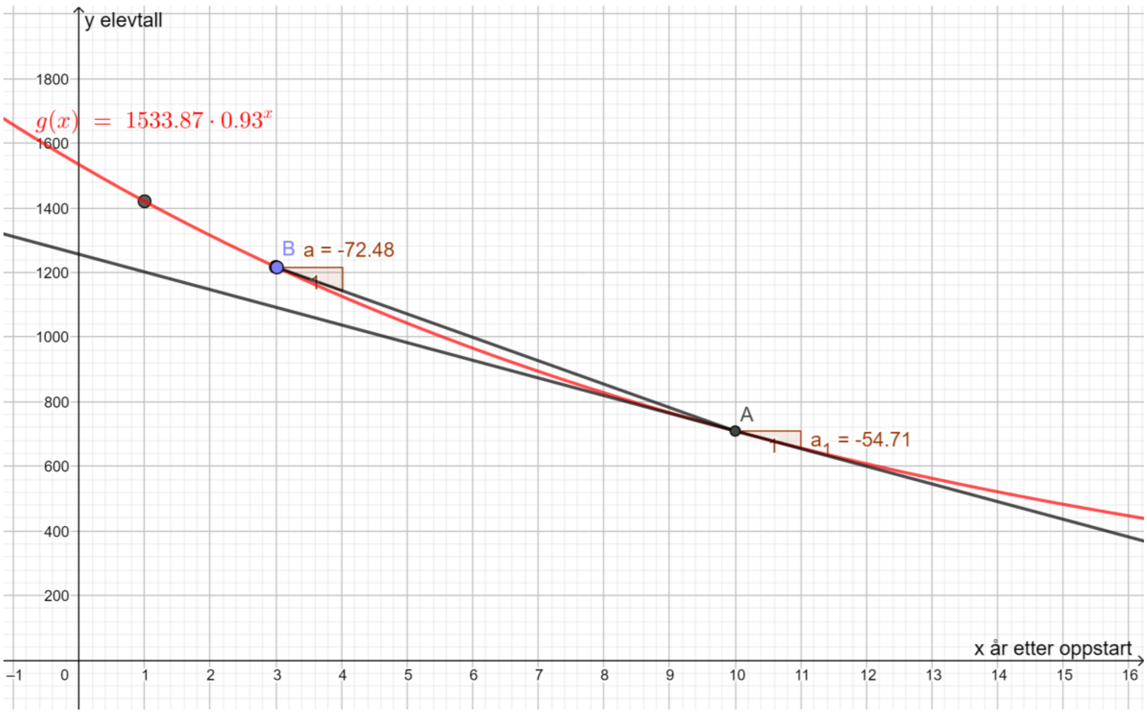
Oppgave 25
Vekstfaktoren 1,05 forteller at antall elever øker med 5 % hvert år.
Fra år 3 til år 10 øker antall elever med 37 i gjennomsnitt per år. I år 10 øker antall elever tilsvarende 43 elever per år.



Oppgave 26

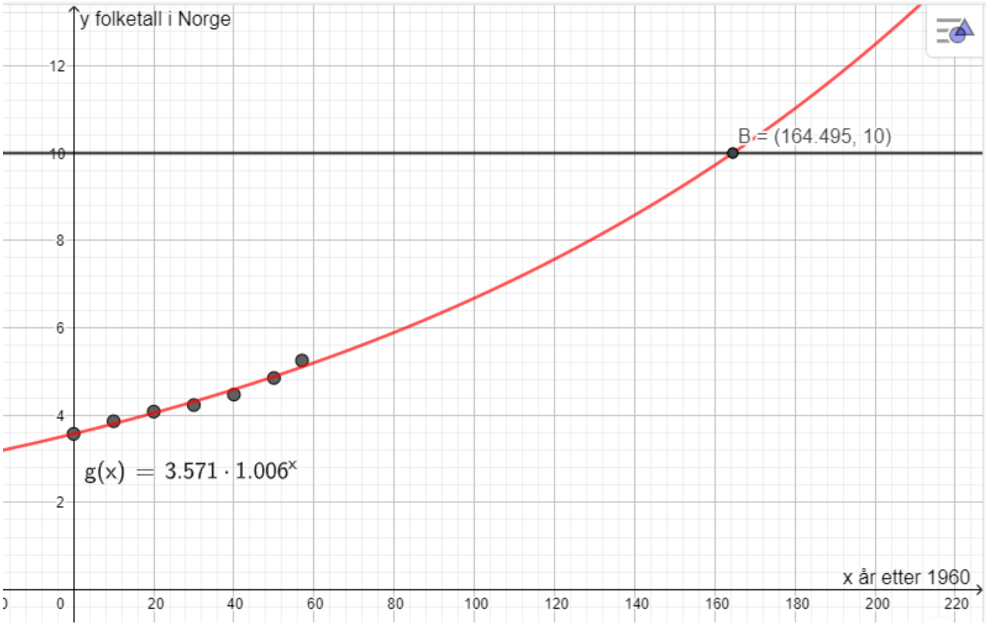
Vekstfaktoren 0,93 forteller at antall elever synker med 7 % hvert år.

Fra år 3 til år 10 synker antall elever med 72 i gjennomsnitt per år. I år 10 synker antall elever tilsvarende 55 elever per år.



Eksamensoppgave side 132

a) Har vist ved regresjon at modellen passer godt med tallene i tabellen.
b) 1,006 er en vekstfaktor, som forteller at folketallet i Norge øker med 0,6 % per år
c) Folketallet i Norge vil passere 10 millioner etter 164 år, som betyr i år 2124.



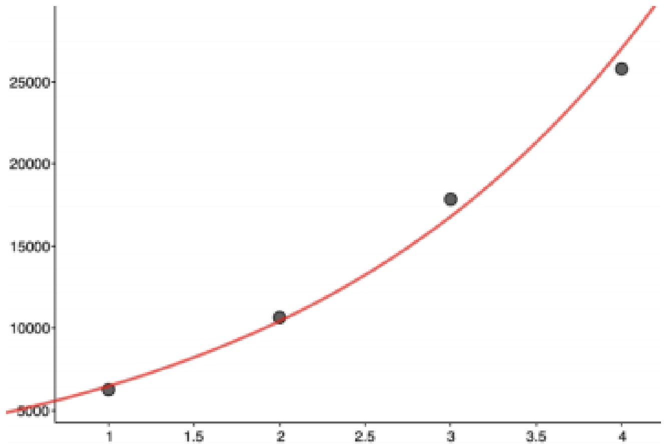
	A	B
1	0	3.57
2	10	3.86
3	20	4.08
4	30	4.23
5	40	4.47
6	50	4.85
7	57	5.25
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		

Eksamensoppgave side 132

	A	B
1	1	6278
2	2	10660
3	3	17837
4	4	25761

X: A1:A4

Y: B1:B4



Regresjonsmodell

$y = 4038.4858 \cdot 1.608^x$

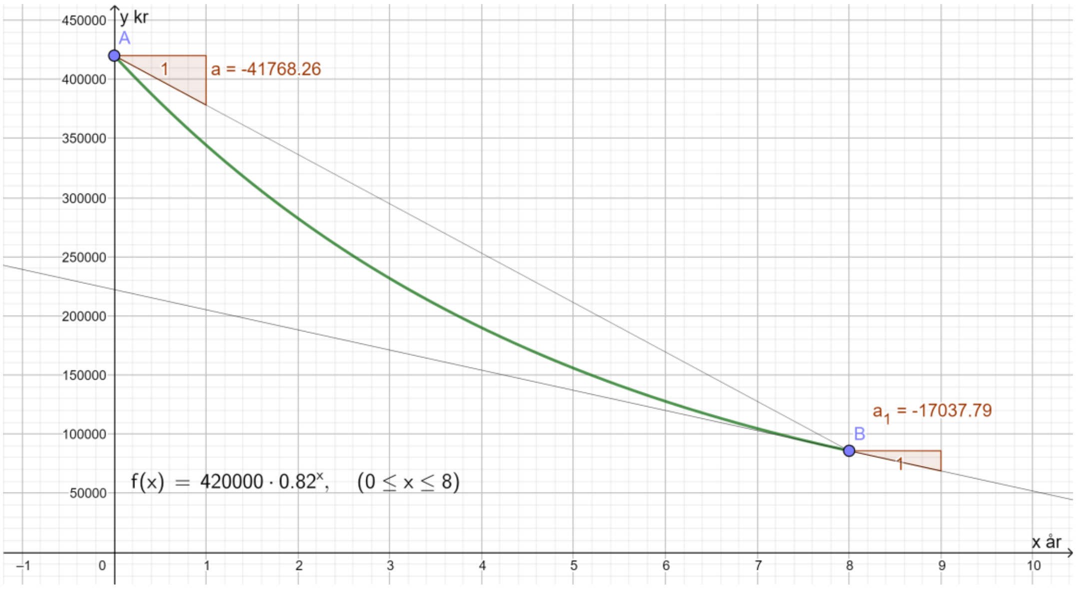
Eksponentiell

b) Jeg ser at vekstfaktoren er 1,608.
Det betyr at antall registrert smittede økte med 60,8 % per måned.

Oppgave 27

Funksjonsuttrykket forteller at familien betalte 420 000 kroner for bilen, og at bilens verdi synker med 18 % per år.

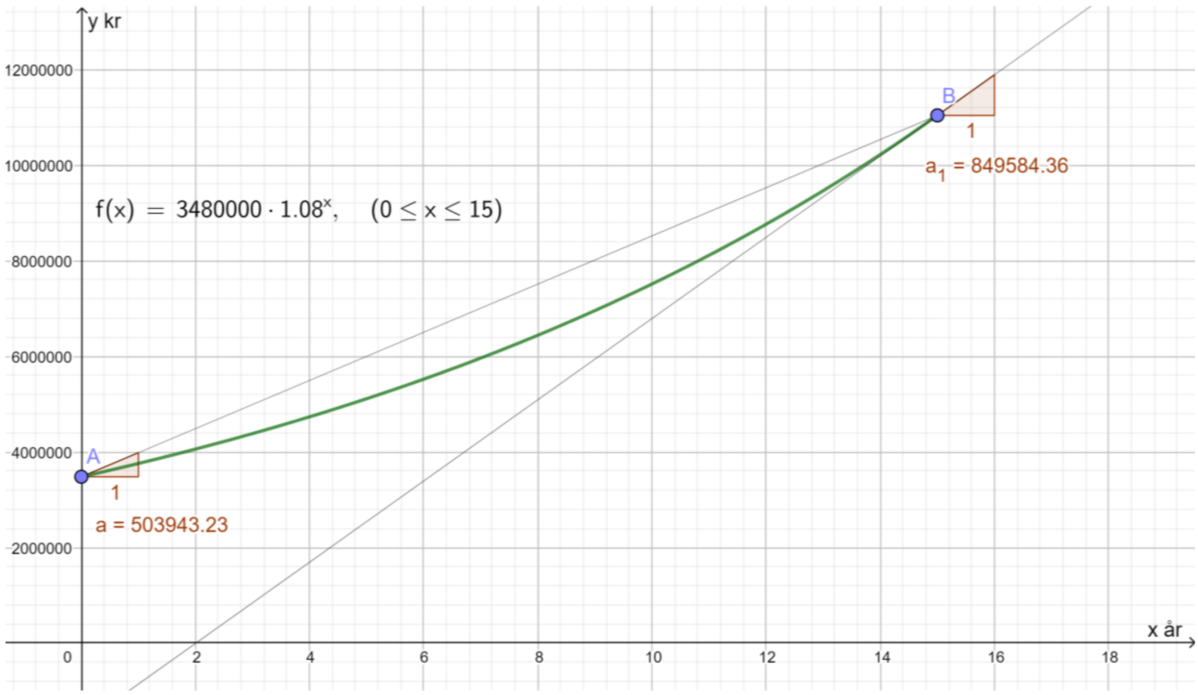
Vi valgte å analysere grafens endepunkter. I gjennomsnitt synker bilens verdi med omtrent 41 800 kroner per år i disse 8 årene. I år 8 synker bilens verdi tilsvarende 17 000 kroner per år.



Oppgave 28

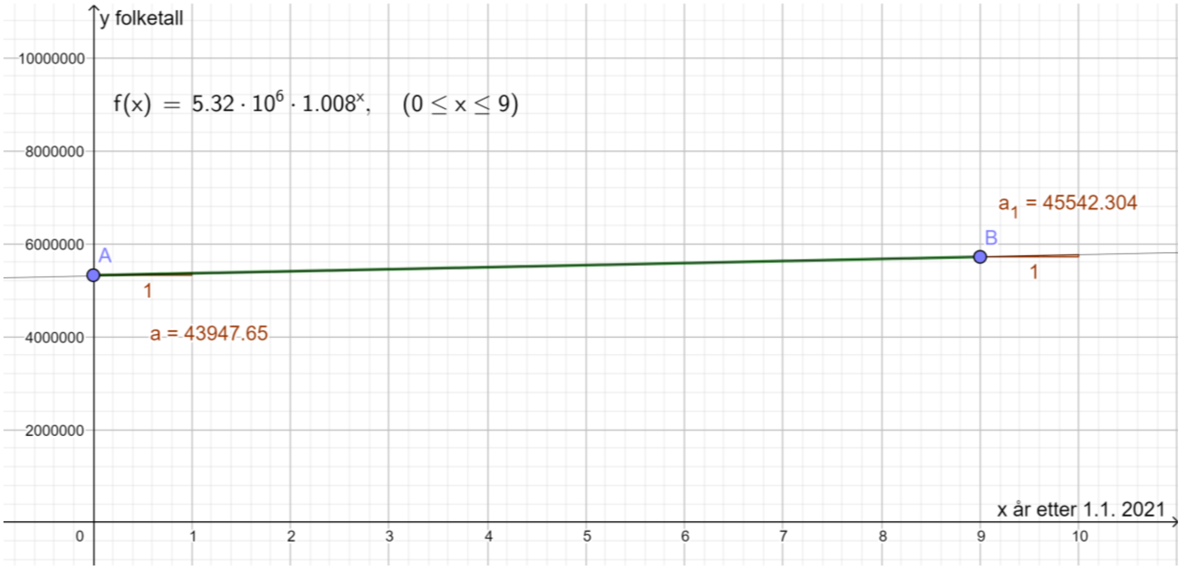
Funksjonsuttrykket forteller at familien betalte 3 480 000 kroner for leiligheten, og at leilighetens verdi øker med 8 % per år.

Vi valgte å analysere grafens endepunkter. I gjennomsnitt øker leilighetens verdi med omtrent 500 000 kroner per år i disse 15 årene. I år 15 øker leilighetens verdi tilsvarende 850 000 kroner per år.



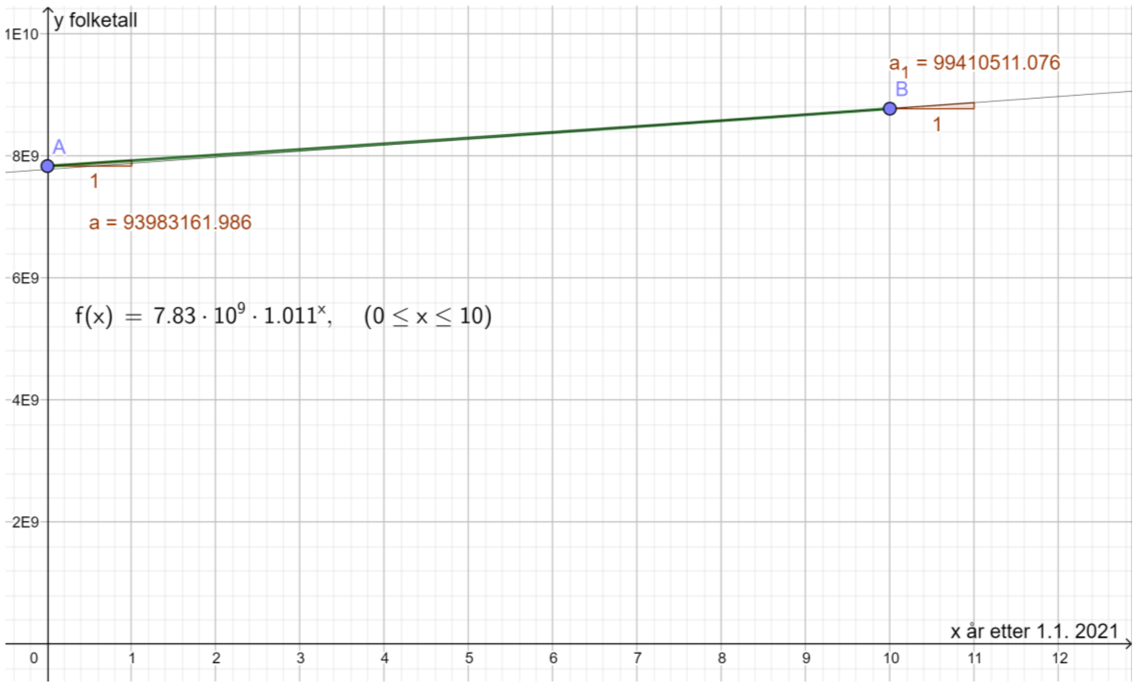
Oppgave 29
Funksjonsuttrykket forteller at folketallet i Norge ved inngangen til 2021 er 5,32 millioner og at folketallet øker med 0,8 % per år.

Vi valgte å analysere grafens endepunkter. I gjennomsnitt øker folketallet med omtrent 44 000 per år i disse 9 årene. I år 9 øker folketallet tilsvarende 45 542 per år.



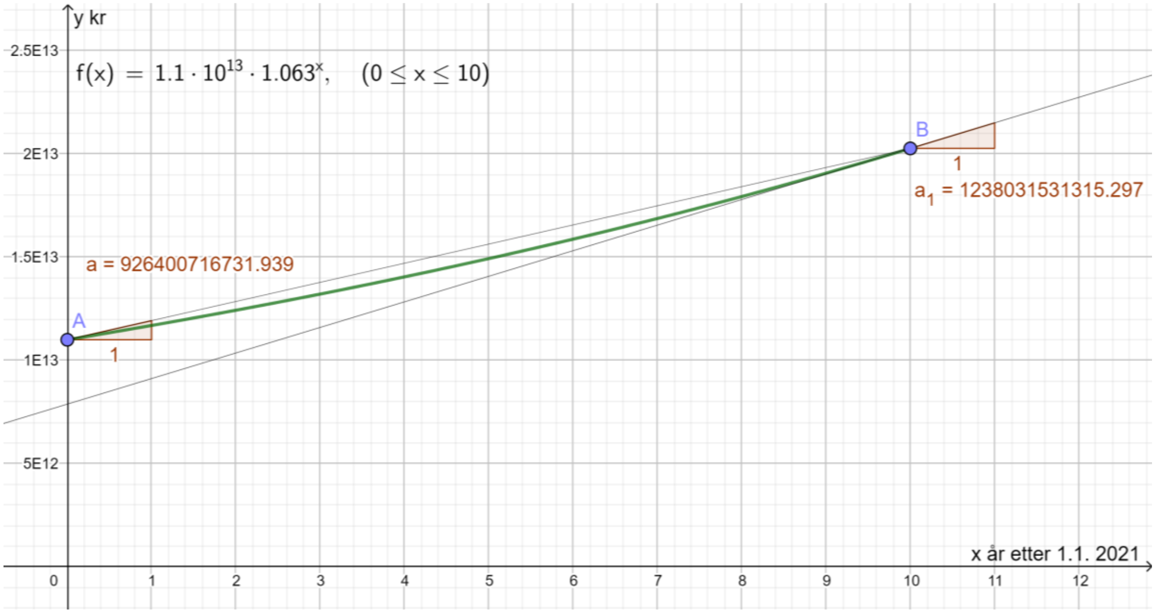
Oppgave 30
Funksjonsuttrykket forteller at folketallet i verden ved inngangen til 2021 er 7,83 milliarder og at folketallet øker med 1,14 % per år.

Vi valgte å analysere grafens endepunkter. I gjennomsnitt øker folketallet med omtrent 94 millioner per år i disse 10 årene. I år 10 øker folketallet tilsvarende omtrent 100 millioner per år.



Oppgave 31
Funksjonsuttrykket forteller at verdien til Oljefondet inngangen til 2021 er på svimlende 11 000 milliarder kroner, og at verdien til Oljefondet øker med 6,3 % per år..

Vi valgte å analysere grafens endepunkter. I gjennomsnitt øker verdien til Oljefondet med omtrent 900 milliarder per år i disse 10 årene. I år 10 øker verdien til Oljefondet tilsvarende omtrent 1 200 milliarder per år



Oppgave 32

Kaffens temperatur vil ikke kunne synke under romtemperatur. Dersom vi antar at denne er 20 ℃, vil kaffen nå denne temperaturen etter omtrent 8 minutter. Det vil si at modellens gyldighetsområde er for $x \in [0,8]$

Oppgave 33
SSB spår følgende om antall innbyggere i Oslo i to utvalgte år:

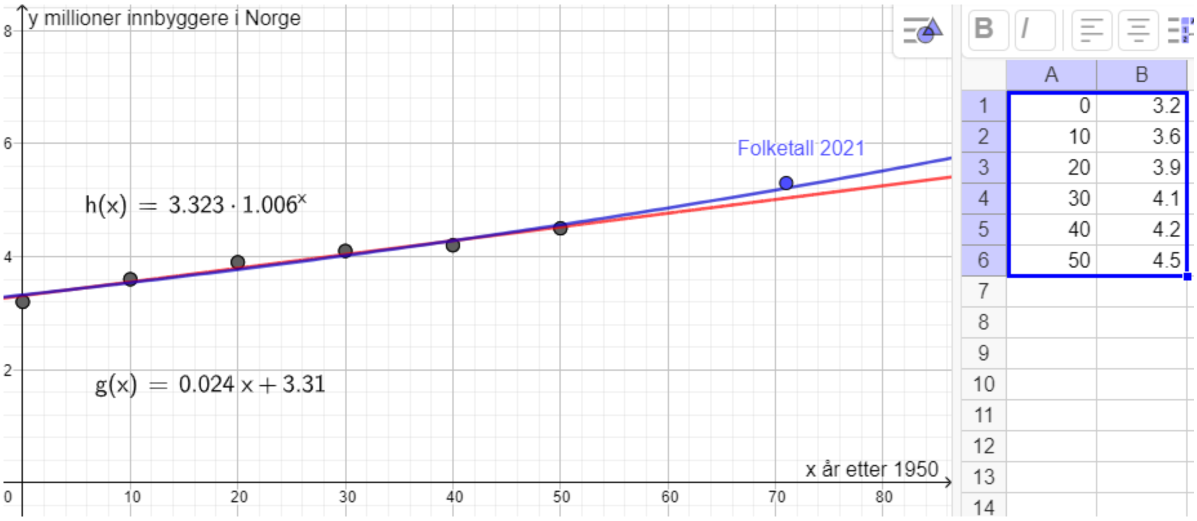
Kilde: https://www.ssb.no/kommunefakta/oslo

Sammenlignet med disse tallene er modellen troverdig frem til 2030, men viser for høyt folketall i 2050. Det betyr at modellen vil bli upålitelig etter 2030.

Oppgave 33

En lineær modell som beskriver utviklingen: $0{,}024x + 3{,}31$. Denne modellen forteller at antall innbyggere i Norge øker med 24 000 per år.
En eksponentiell modell som beskriver utviklingen: $3{,}323 \cdot 1{,}006^{x}$. Denne modellen forteller at antall innbyggere i Norge øker med 0,6 % per år.

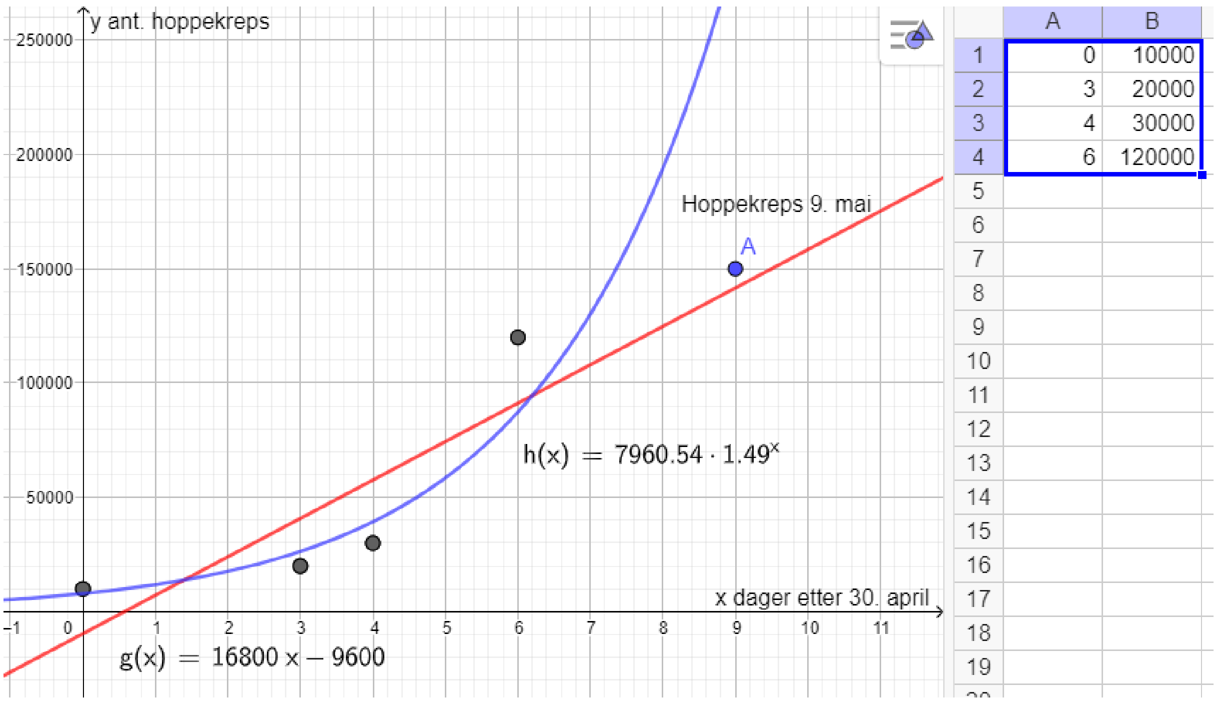
Sammenlignet med dagens folketall fremstår befolkningsutviklingen å være eksponentiell.



Oppgave 34

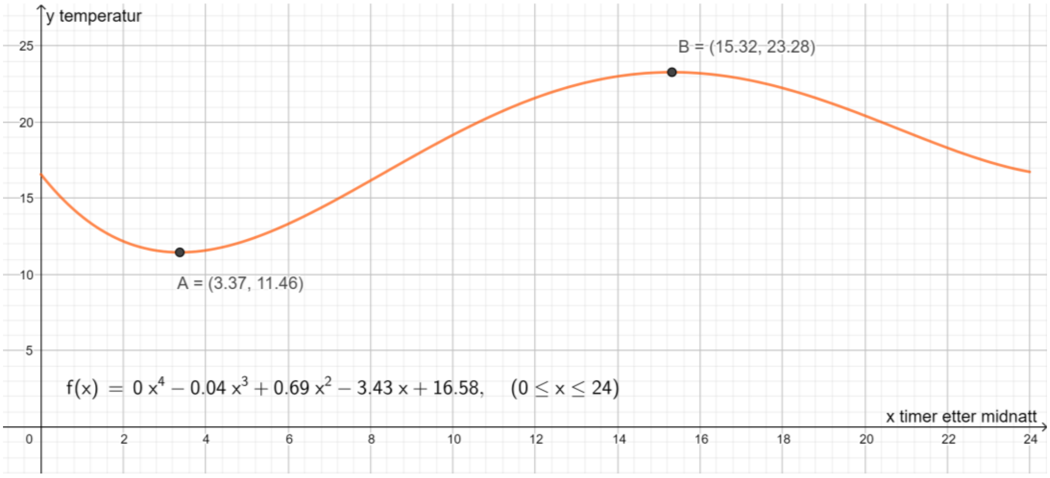
Ifølge Lars øker antall hoppekreps med 16 800 per dag.
Ifølge Lene øker antall hoppekreps med 49 % per dag.

Sammenlignet med antall hoppekreps 9. mai kan det kan virke som om utviklingen i antall hoppekreps bør beskrives lineært.



Oppgave 35

Vi valgte å bruke en polynommodell av 4. grad for å beskrive utviklingen i temperatur. Ifølge modellen vil høyeste temperatur være 23,3 °C, og laveste temperatur vil være 11,5 °C.



Eksamensoppgave side 141

b)

I ca. 25 år, fra 1972 til 1997. Se graf i a.

c)

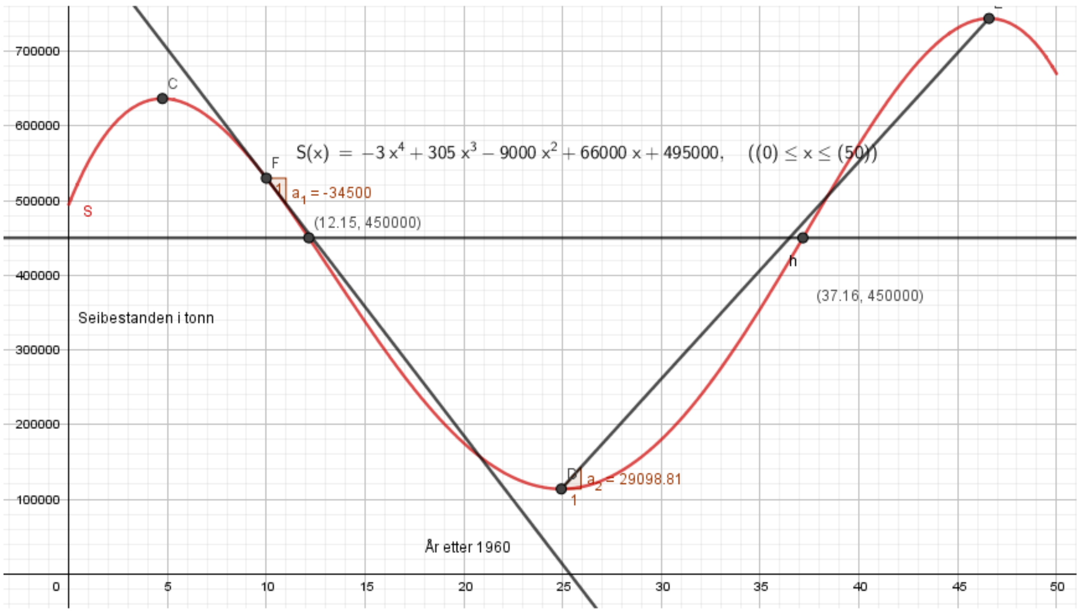
Den øker i gjennomsnitt med 20 100 tonn per år.

Laget et linjestykke fra minste til største verdi og fant stigningstallet til denne rette linjen. Det er det samme som den gjennomsnittlige veksten i perioden.

d)

Med momentan menes i øyeblikket, altså forandringen i 1970. Den momentane veksten er negativ, -34 500 tonn per år (i 1970). Det betyr at i løpet av året 1970 blir det 34 500 tonn **mindre** sei i Arktis. Når vi snakker om vekst er det fort å tenke at noen eller noe blir flere, men når veksten er negativ blir det mindre.

Laget en tangent til grafen i x=10, som tilsvarer år 1970. Fant stigningen til tangenten, som tilsvarer grafens momentane vekst. Legg merke til forskjellen fra oppgave c der man fant gjennomsnittet.



Eksamensoppgave side 141

b)

Verdien var lavere enn 92 kroner i ca. 6 uker, fra slutten av uke to til starten av uke ni.

c)

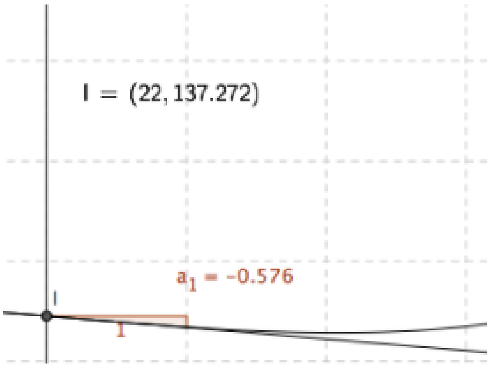
Verdien varierte mellom 81,6 kroner og 163 kroner. Forskjellen var 81, 4 kroner.

d)

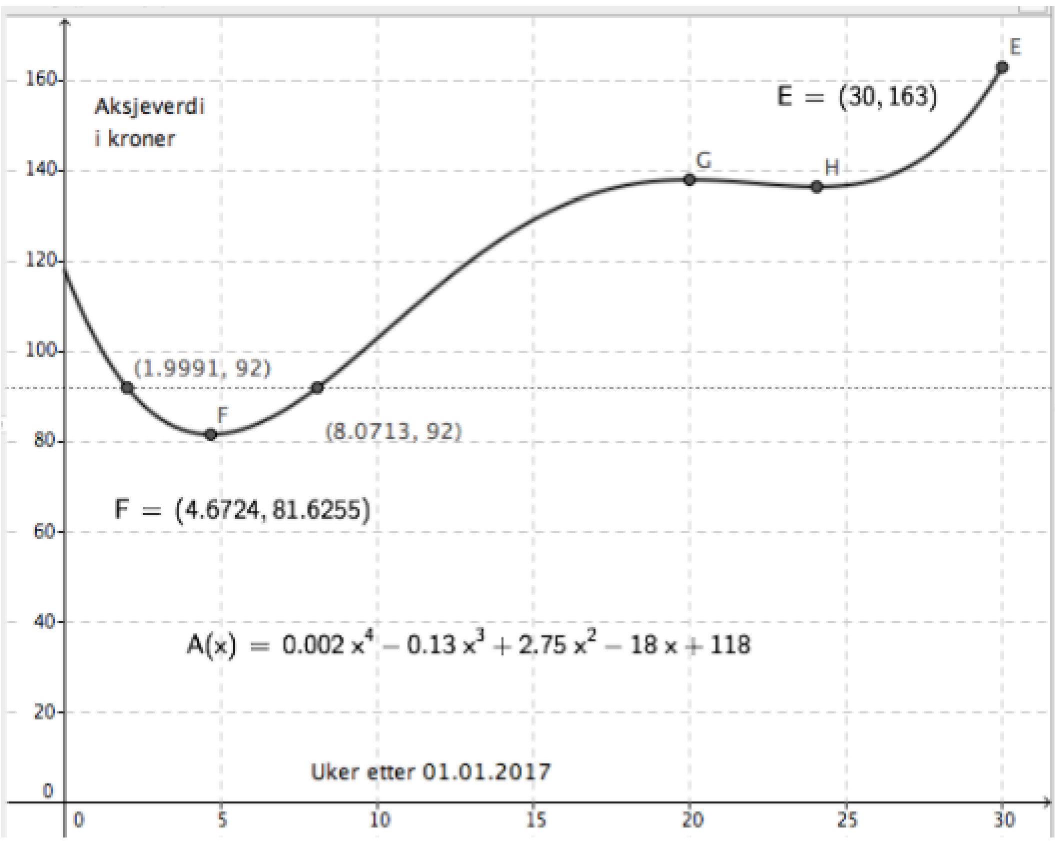
163 - 118 = 45

Aksjen steg med 45 kroner denne perioden. Gjennomsnittlig vekst per uke blir $\frac{45\,kr}{30\,uker} = 1,5$ kroner/uke.

e)



Dag nr. 154 $(22 \cdot 7)$ i 2017 avtar verdien av aksjen med 0,58 kroner.



Eksamensoppgave side 142

a)

$V(x) = (10 - 0,1x^2)^3 \quad 0 \leq x \leq 10$

$V(0) = 10^3 = 1000$

Tanken rommer 1000 liter.

c)

Fra figuren i b ser man at det tar 5,13 minutter i desimal tid. Vi gjør 0,13 om til sekunder:

$\frac{13}{100} = \frac{x}{60}$
$x = 7,8$

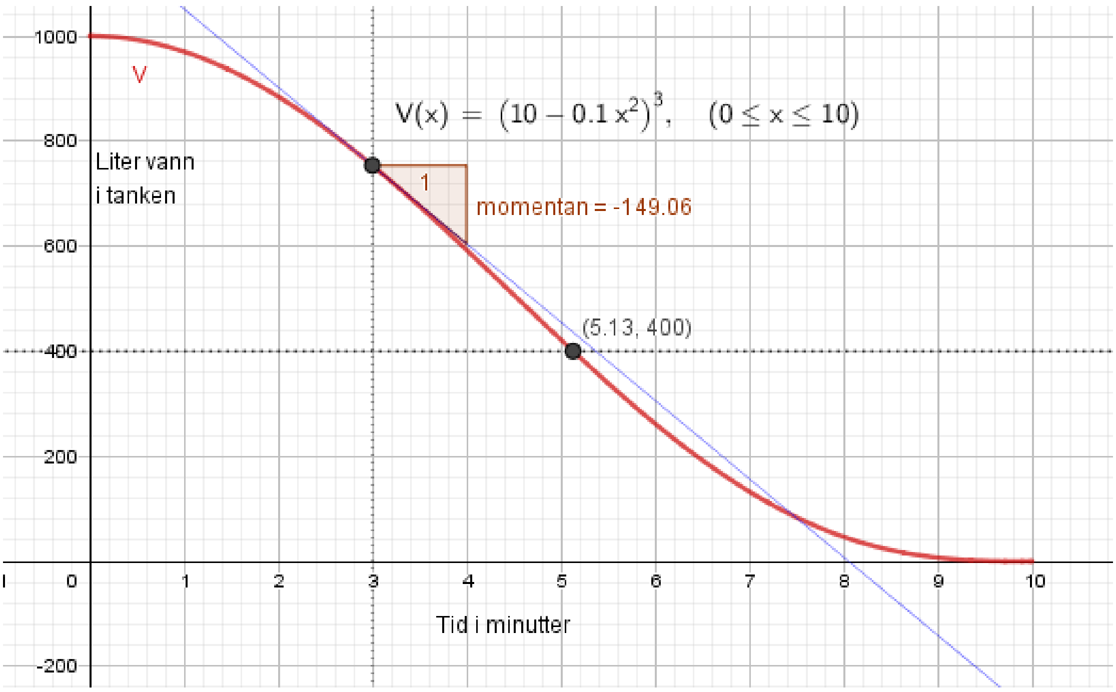
Det tar 5 minutter og 8 sekunder før det er 400 liter igjen i tanken.

d)

1000 liter tømmes på 10 minutter. Det blir i gjennomsnitt 1000 liter/ 10 min som er 100 L/min.

e)

Se figuren i b: Lag linjen x=3 og finn skjæring med grafen. I punktet lager man tangenten til grafen. Stigningen til tangenten i punktet er den momentane veksten for x =3. Den er - 149. Det betyr at akkurat når det har gått 3 minutter tømmes tanken med en fart på 149 L/ min.

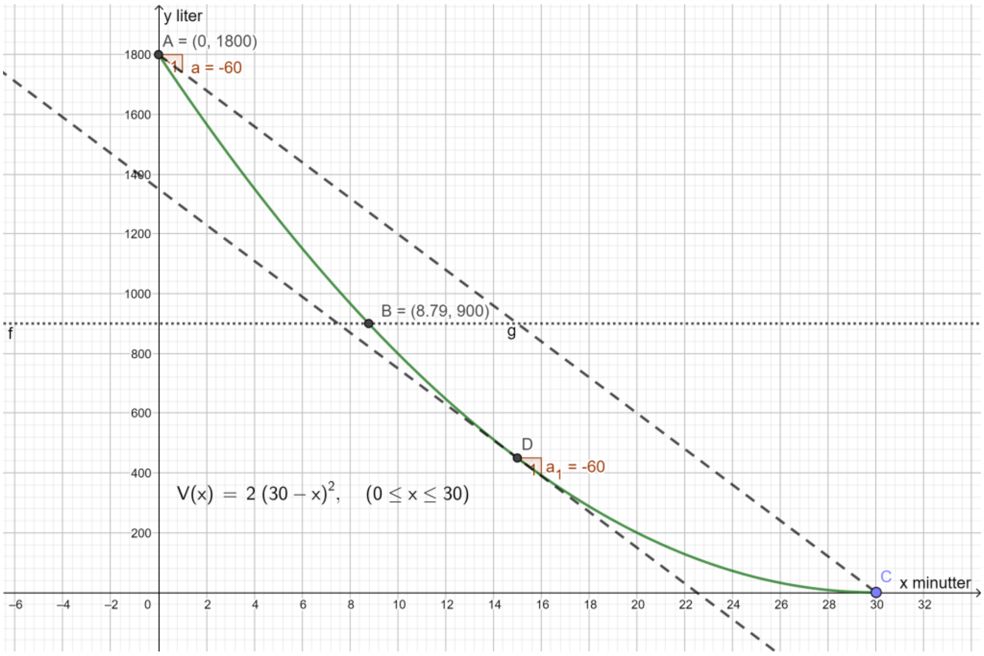


Eksamensoppgave side 142

b) Finner først ut at tanken inneholder 1 800 liter vann. Halvparten av dette er 900 liter. Det tar 8,79 minutter å tømme halvparten av tanken. Det er det samme som 8 minutter 47 sekunder og 4 tideler.

c) Det renner i gjennomsnitt 60 liter vann per minutt fra Kari åpner kranen til tanken er tom.

d) Den momentane vekstfarten til V når $x = 15$ er -60. Det betyr at etter 15 minutter synker vannstanden i tanken tilsvarende 60 liter per minutt.



Eksamensoppgave side 143

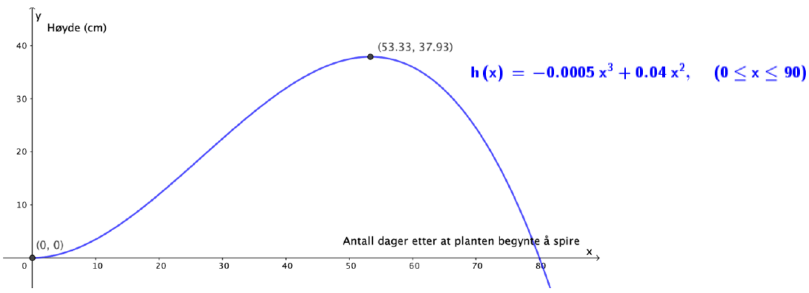
Jeg finner toppunktet (53, 38) ved å bruke kommandoen «ekstremalpunkt». Ifølge modellen vokser planten i omtrent 53 dager etter at den begynner å spire. Etter 53 dager er den ca. 38 centimeter høy.

I starten øker veksten for hver dag. Etter omtrent 20 dager må veksten være tilnærmet konstant, siden grafen er tilnærmet lik en rett linje. Fra dag 40 begynner veksten å avta.

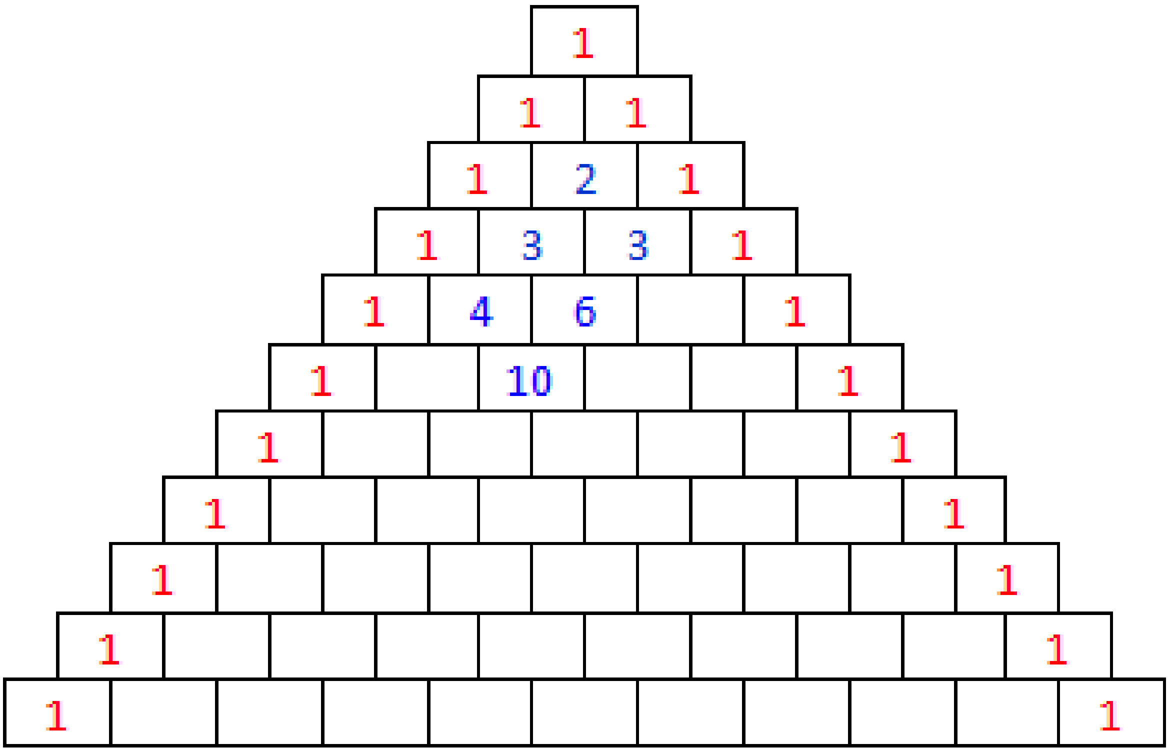
Etter dag 53 viser modellen at planten vil bli lavere og lavere helt fram til dag 80 etter at den begynte å spire.

b) Modellen viser at planten er på sitt høyeste etter 53 dager etter at den begynte å spire. Det vil være naturlig at den holder denne høyden i en tidsperiode før den eventuelt visner og dør.

Jeg vil si at modellen er gyldig i omtrent er gyldig i omtrent 53 dager, altså til $x = 53$. Etter 53 dager mener jeg modellen ikke viser hvordan det går med planten.



Figurtall



Målet for opplæringen er at eleven skal kunne:

- identifisere variable størrelser i ulike situasjoner og bruke dem til utforsking og generalisering

Å se etter mønster

Dersom vi skriver tall i en ordnet liste, kalles dette en **tallfølge,** og tallene i en **tallfølge** danner et bestemt **mønster**. Dersom vi forstår **mønsteret** i en **tallfølge** kan vi forutsi det både det neste tallet i **tallfølgen**, og et tall lengre ut i lista.

Tallfølger kan ofte **representeres geometrisk** ved at vi lager en **figur** til hvert av tallene i lista. Derfor bruker vi gjerne ordet **figurtall** om slike **tallfølger**.

$\textbf{\textit{Figurtall er en tallfølge som er representert geometrisk}}$

Din oppgave er å finne **mønsteret** i slike **tallfølger**, og beskrive dette **mønsteret** ved gjennom en **formel**.

Hver **figur** i en **tallfølge** har et **figurnummer**. Den første **figuren** kalles **figur nummer 1**, som skrives $\mathbf{F_1}$**.** Den neste figuren kalles $\mathbf{F_s}$**.** Deretter følger $\mathbf{F_3}$ osv.

I **formler** som brukes til å beskrive **mønster** er det vanlig å benytte **variabelen** n, og ikke x som ble brukt i forrige kapittel. Derfor vil du se at vi bruker n når vi skal beskrive et ukjent **figurnummer**, som skrives $\mathbf{F_n}$.

Når du har funnet **mønsteret** i en **tallfølge**, kan du bli bedt om å finne

- Det neste tallet eller den neste **figuren** i **tallfølgen**
- Et tall eller en **figur** lengre ut i lista
- **Summen** av alle tall eller **figurer** i **tallfølgen** frem til et bestemt nummer i lista

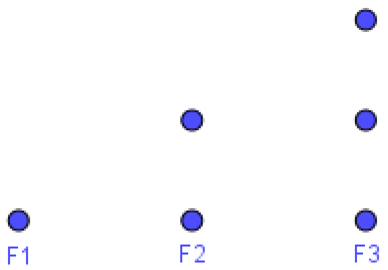
Å se etter **mønster** i **figurtall** har vi mennesker drevet med i hvert fall 2 500 år. Kilder kan fortelle oss at greske matematikere formet **figurene** i **figurtall** med steiner i sanden. Ordet *kalkulere* kommer fra det latinske ordet *calculus*, som betyr liten stein. Derfor finnes det en stor mengde ulike **mønstre**, og langt flere enn vi skal jobbe med i 1P. Du har kanskje hørt om Fibonaccis **tallfølge** eller Pascals trekant? Dersom du har interesse for å utforske **mønster** finnes det mye du kan søke opp.

I dette kapittelet presenterer vi de grunnleggende **mønstrene**; **lineær utvikling**, **kvadrattall**, **rektangeltall**, og **trekanttall**. Når du behersker disse **mønstrene** vil du kunne utforske **figurer** som er satt sammen av flere typer **mønster**.

Naturlige tall – lineær utvikling

Oppgave 1

Tegn figurnummer 4 her:



Beskriv sammenhengen mellom figurnummer og antall prikker i figuren med ord:

____

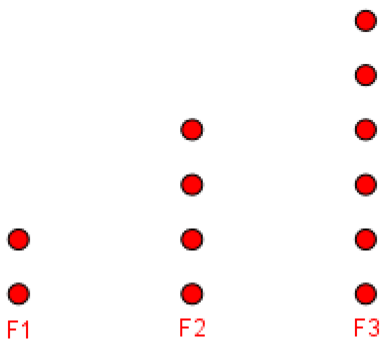
Hvor mange prikker vil det være i F_n?________________________

Hvor mange prikker vil det være i F_{10}?________________________

Hvilket figurnummer kan du lage av 20 prikker?______________________

Oppgave 2

Tegn figurnummer 4 her:



Beskriv sammenhengen mellom figurnummer og antall prikker i figuren med ord:

____

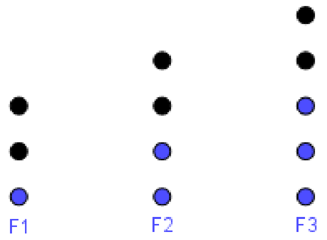
Hvor mange prikker vil det være i F_n?________________________

Hvor mange prikker vil det være i F_{20}?________________________

Hvilket figurnummer kan du lage av 36 prikker?______________________

Oppgave 3

Tegn figurnummer 4 her:



Beskriv sammenhengen mellom figurnummer og antall prikker i figuren med ord:

____

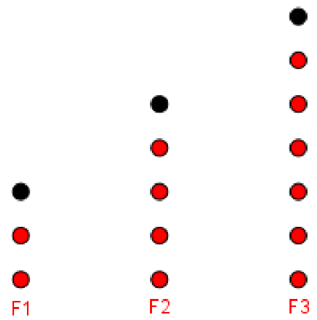
Hvor mange prikker vil det være i F_n?_________________________

Hvor mange prikker vil det være i F_{15}?________________________

Hvilket figurnummer kan du lage av 52 prikker?______________________

Oppgave 4

Tegn figurnummer 4 her:



Beskriv sammenhengen mellom figurnummer og antall prikker i figuren med ord:

____

Hvor mange prikker vil det være i F_n?_________________________

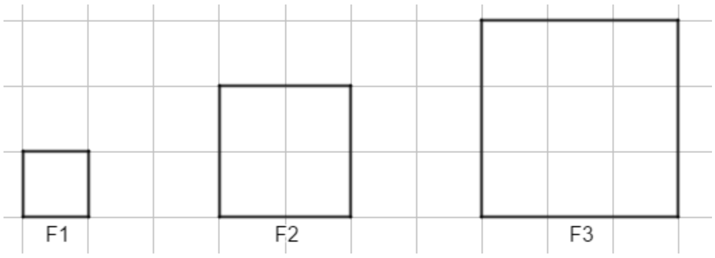
Hvor mange prikker vil det være i F_8?________________________

Hvilket figurnummer kan du lage av 61 prikker?______________________

Kvadrattall

Oppgave 5

Tegn figurnummer 4 her:



Beskriv sammenhengen mellom figurnummer og antall ruter i figuren med ord:

____

Hvor mange ruter vil det være i F_n?______________________

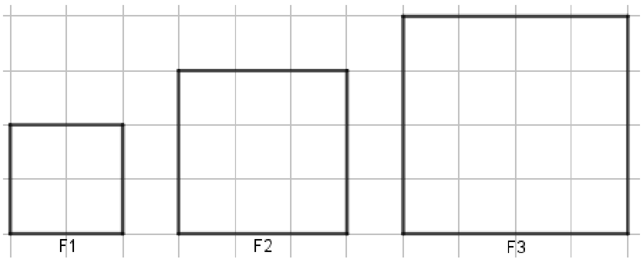
Hvor mange ruter vil det være i F_{12}?_____________________

Hvilket figurnummer kan du lage av 81 ruter?_____________________

En mer eller en mindre; (n+1) eller (n-1)

I noen oppgaver har vi behov for å uttrykke 1 mer eller 1 mindre enn figurnummert når vi skal beskrive en figurutvikling. Matematisk skrives dette som (n+1) eller (n-1). Dette vil vi få bruk for når vi skal regne rektangeltall, trekanttall eller dersom det er en forskyvning slik som i oppgave 6 og 7.

Oppgave 6



Beskriv sammenhengen mellom figurnummer og antall ruter i figuren med ord:

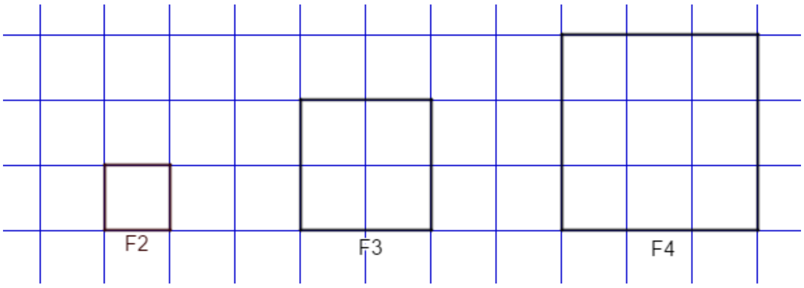
____

Hvor mange ruter vil det være i F_n?______________________

Hvor mange ruter vil det være i F_9?_____________________

Hvilket figurnummer kan du lage av 81 ruter?_____________________

Oppgave 7



Beskriv sammenhengen mellom figurnummer og antall ruter i figuren med ord:

____

Hvor mange ruter vil det være i F_n?________________________

Hvor mange ruter vil det være i F_7?_______________________

Hvor mange ruter vil det være i F_1?_______________________

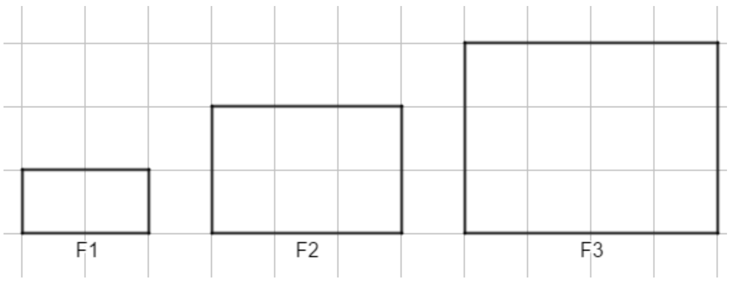
Hvilket figurnummer er det største du kan lage av 140 ruter?_______________________

Hvor mange ruter vil det være til sammen i de 10 første figurene?___________________

Rektangeltall

Oppgave 8

Tegn figurnummer 4 her:



Beskriv sammenhengen mellom figurnummer og antall ruter i figuren med ord:

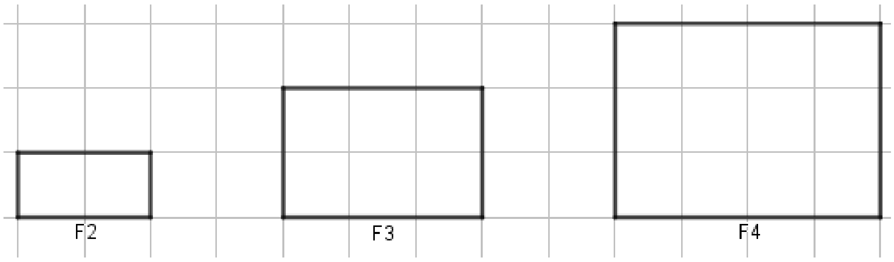
____

Hvor mange ruter vil det være i F_n?________________________

Hvor mange ruter vil det være i F_{100}?_______________________

Hvilket figurnummer kan du lage av 420 ruter?_______________________

Oppgave 9



Beskriv sammenhengen mellom figurnummer og antall ruter i figuren med ord:

____

Hvor mange ruter vil det være i F_n?______________________

Hvor mange ruter vil det være i F_{10}?_____________________

Hvor mange ruter vil det være F_1?__________________________

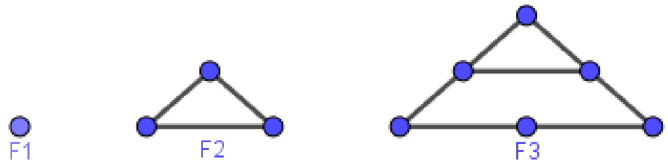
Hvilket figurnummer er det største du kan lage av 200 ruter?_____________________

Hvor mange ruter vil det være til sammen i de 15 første figurene?_________________

Trekanttall

Oppgave 10

Tegn figurnummer 4 her:



Beskriv sammenhengen mellom figurnummer og antall prikker i figuren med ord:

____

Hvor mange prikker vil det være i F_n?______________________

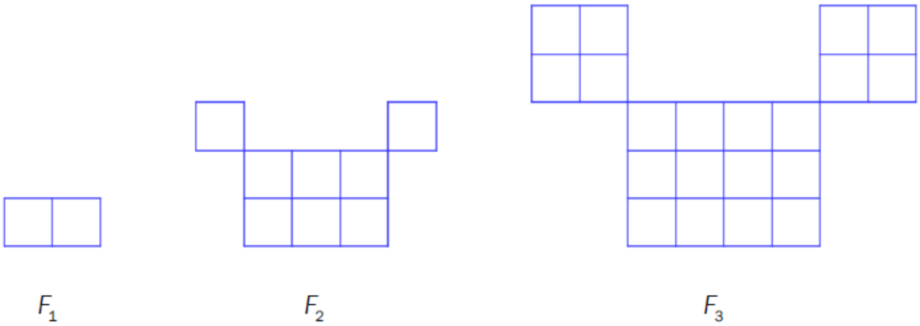
Hvor mange prikker vil det være i F_{50}?_____________________

Hvilket figurnummer kan du lage av 325 prikker?_____________________

Hvor mange prikker vil det være til sammen i de 20 første figurene?_____________

Sammensatte figurer

Oppgave 11

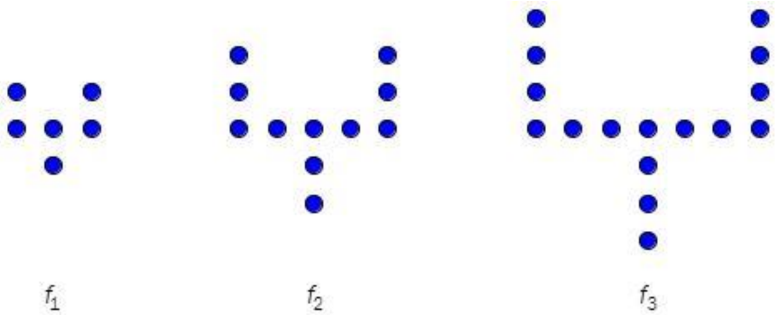


Snorre lager figurer av kvadriske klosser etter et fast mønster.

Ovenfor ser du figur F_1 , F_2 og F_3 .

Hvor mange klosser må han bruke for å bygge de 10 første figurene?

Oppgave 12

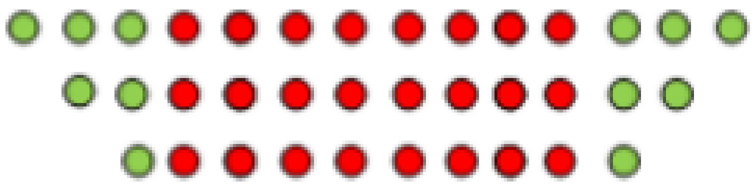


Siri lager figurer av runde perler. Figurene ovenfor har hun kalt f_1, f_2 og f_3 .

Hvor mange perler må hun bruke for å lage de 50 første figurene?

Oppgave 13

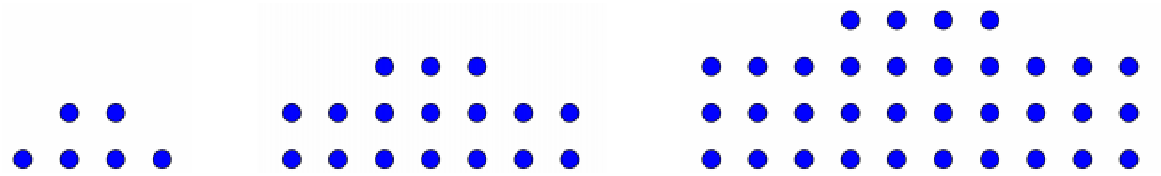
I en teatersal der det 580 plasser. På første stolrad er det 10 plasser. På andre stolrad er det 12 plasser, og på tredje stolrad er det 14 plasser. Se figuren nedenfor.



Slik fortsetter det å øke med to plasser for hver stolrad bakover i salen.

Hvor mange stolrader er det i salen?

Oppgave 14

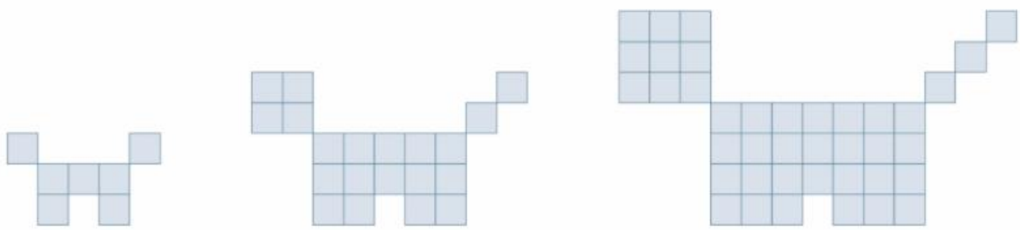


Figur 1 Figur 2 Figur 3

Ovenfor ser du tre figurer. Figurene er satt sammen av små sirkler. Dina vil fortsette å tegne figurer etter samme mønster.

Hvor mange små sirkler er det til sammen i de 100 første figurene?

En eksamensoppgaver



Figur 1 Figur 2 Figur 3

Ovenfor ser du tre figurer. Figurene er satt sammen av små kvadrater.

Tenk deg at du skal fortsette å lage figurer etter samme mønster.

a) Lag en algoritme som du kan bruke til å bestemme hvor mange små kvadrater du totalt trenger for å lage de 100 første figurene.

b) Bruk algoritmen og bestem hvor mange små kvadrater du trenger.

Løsningsforslag

Oppgave	Svar	Oppgave	Svar
1	a) F_n= *n* antall prikker b) F_{10}= 10 prikker c) 20 prikker = F_{20}	**7**	a) $F_n= (n\text{-}1)^2$ ant. ruter b) F_7= 36 ruter c) F_1= 0 ruter d) 121 ruter = F_{12}
2	a) F_n= 2*n* antall prikker b) F_{20}= 40 prikker c) 36 prikker = F_{36}	**8**	a) $F_n= n \cdot (n+1)$ ant. ruter (= $n^2 + n$) b) F_{100}= 10100 ruter c) 420 ruter = F_{20}
3	a) F_n= *n*+2 ant. prikker b) F_{15}= 17 prikker c) 52 prikker = F_{25}	**9**	a) $F_n= n \cdot (n\text{-}1)$ ant. ruter (= n^2 - n) b) F_{10}= 90 ruter c) F_1= 0 ruter d) 182 ruter = F_{14}
4	a) F_n= 2*n*+1 ant. prikker b) F_8= 17 prikker c) 61 prikker = F_{30}	**10**	a) $F_n=\frac{n \cdot (n+1)}{2}$ ant. prikker (=$\frac{n^2+n}{2}$) b) F_{50}= 1275 prikker c) 325 prikker = F_{25}
5	a) $F_n= n^2$ antall ruter b) F_{12}= 144 ruter c) 81 ruter = F_9		
6	a) $F_n= (n+1)^2$ ant. ruter b) F_9= 100 ruter c) 81 ruter = F_8		

	A	B
1	Oppgave 7	
2	Figur nr	Antall ruter
3	1	0
4	2	1
5	3	4
6	4	9
7	5	16
8	6	25
9	7	36
10	8	49
11	9	64
12	10	81
13	Sum	285

	A	B
1	Oppgave 7	
2	Figur nr	Antall ruter
3	1	=(A3-1)^2
4	2	=(A4-1)^2
5	3	=(A5-1)^2
6	4	=(A6-1)^2
7	5	=(A7-1)^2
8	6	=(A8-1)^2
9	7	=(A9-1)^2
10	8	=(A10-1)^2
11	9	=(A11-1)^2
12	10	=(A12-1)^2
13	Sum	=SUMMER(B3:B12)

	A	B
1	Oppgave 9	
2	Figur nr	Antall ruter
3	1	0
4	2	2
5	3	6
6	4	12
7	5	20
8	6	30
9	7	42
10	8	56
11	9	72
12	10	90
13	11	110
14	12	132
15	13	156
16	14	182
17	15	210
18	Sum	1120

	A	B
1	Oppgave 9	
2	Figur nr	Antall ruter
3	1	=A3*(A3-1)
4	2	=A4*(A4-1)
5	3	=A5*(A5-1)
6	4	=A6*(A6-1)
7	5	=A7*(A7-1)
8	6	=A8*(A8-1)
9	7	=A9*(A9-1)
10	8	=A10*(A10-1)
11	9	=A11*(A11-1)
12	10	=A12*(A12-1)
13	11	=A13*(A13-1)
14	12	=A14*(A14-1)
15	13	=A15*(A15-1)
16	14	=A16*(A16-1)
17	15	=A17*(A17-1)
18	Sum	=SUMMER(B3:B17)

	A	B
1	Oppgave 10	
2	Figur nr	Antall prikker
3	1	1
4	2	3
5	3	6
6	4	10
7	5	15
8	6	21
9	7	28
10	8	36
11	9	45
12	10	55
13	11	66
14	12	78
15	13	91
16	14	105
17	15	120
18	16	136
19	17	153
20	18	171
21	19	190
22	20	210
23	Sum	1330

	A	B
1	Oppgave 10	
2	Figur nr	Antall prikker
3	1	=A3*(A3+1)/2
4	2	=A4*(A4+1)/2
5	3	=A5*(A5+1)/2
6	4	=A6*(A6+1)/2
7	5	=A7*(A7+1)/2
8	6	=A8*(A8+1)/2
9	7	=A9*(A9+1)/2
10	8	=A10*(A10+1)/2
11	9	=A11*(A11+1)/2
12	10	=A12*(A12+1)/2
13	11	=A13*(A13+1)/2
14	12	=A14*(A14+1)/2
15	13	=A15*(A15+1)/2
16	14	=A16*(A16+1)/2
17	15	=A17*(A17+1)/2
18	16	=A18*(A18+1)/2
19	17	=A19*(A19+1)/2
20	18	=A20*(A20+1)/2
21	19	=A21*(A21+1)/2
22	20	=A22*(A22+1)/2
23	Sum	=SUMMER(B3:B21)

Oppgave 11

Finner formelen ved hjelp av regresjon:

$$y = 3x^2 - 3x + 2$$

	A	B
1	Oppgave 11	
2	Figur nr	Antall klosser
3	1	2
4	2	8
5	3	20
6	4	38
7	5	62
8	6	92
9	7	128
10	8	170
11	9	218
12	10	272
13	Sum	1010

	A	B
1	Oppgave 11	
2	Figur nr	Antall klosser
3	1	=3*A3^2-3*A3+2
4	2	=3*A4^2-3*A4+2
5	3	=3*A5^2-3*A5+2
6	4	=3*A6^2-3*A6+2
7	5	=3*A7^2-3*A7+2
8	6	=3*A8^2-3*A8+2
9	7	=3*A9^2-3*A9+2
10	8	=3*A10^2-3*A10+2
11	9	=3*A11^2-3*A11+2
12	10	=3*A12^2-3*A12+2
13	Sum	=SUMMER(B3:B12)

Oppgave 12

Finner først formelen ved hjelp av regresjon

$$y = 5x + 1$$

	A	B
1	Oppgave 12	
2	Figur nr	Antall perler
3	1	6
4	2	11
5	3	16
6	4	21
7	5	26
45	43	216
46	44	221
47	45	226
48	46	231
49	47	236
50	48	241
51	49	246
52	50	251
53	Sum	6425

	A	B
1	Oppgave 12	
2	Figur nr	Antall perler
3	1	=5*A3+1
4	2	=5*A4+1
5	3	=5*A5+1
6	4	=5*A6+1
7	5	=5*A7+1
45	43	=5*A45+1
46	44	=5*A46+1
47	45	=5*A47+1
48	46	=5*A48+1
49	47	=5*A49+1
50	48	=5*A50+1
51	49	=5*A51+1
52	50	=5*A52+1
53	Sum	=SUMMER(B3:B52)

Radene 8 – 44 er skjult for å spare plass.

Oppgave 13

Finner formelen ved hjelp av regresjon:

$$y = 2x + 8$$

	A	B	C
1	Oppgave 13		
2	Rad nummer	Antall stoler per rad	Sum stoler
3	1	10	10
4	2	12	22
5	3	14	36
6	4	16	52
7	5	18	70
8	6	20	90
9	7	22	112
10	8	24	136
11	9	26	162
12	10	28	190
13	11	30	220
14	12	32	252
15	13	34	286
16	14	36	322
17	15	38	360
18	16	40	400
19	17	42	442
20	18	44	486
21	19	46	532
22	20	48	580

	A	B	C
1	Oppgave 13		
2	Rad nummer	Antall stoler per rad	Sum stoler
3	1	=2*A3+8	=B3
4	2	=2*A4+8	=C3+B4
5	3	=2*A5+8	=C4+B5
6	4	=2*A6+8	=C5+B6
7	5	=2*A7+8	=C6+B7
8	6	=2*A8+8	=C7+B8
9	7	=2*A9+8	=C8+B9
10	8	=2*A10+8	=C9+B10
11	9	=2*A11+8	=C10+B11
12	10	=2*A12+8	=C11+B12
13	11	=2*A13+8	=C12+B13
14	12	=2*A14+8	=C13+B14
15	13	=2*A15+8	=C14+B15
16	14	=2*A16+8	=C15+B16
17	15	=2*A17+8	=C16+B17
18	16	=2*A18+8	=C17+B18
19	17	=2*A19+8	=C18+B19
20	18	=2*A20+8	=C19+B20
21	19	=2*A21+8	=C20+B21
22	20	=2*A22+8	=C21+B22

20 rader gir til sammen 580 sitteplasser

Oppgave 14

Finner formelen ved hjelp av regresjon:

$$y = 3x^2 + 2x + 1$$

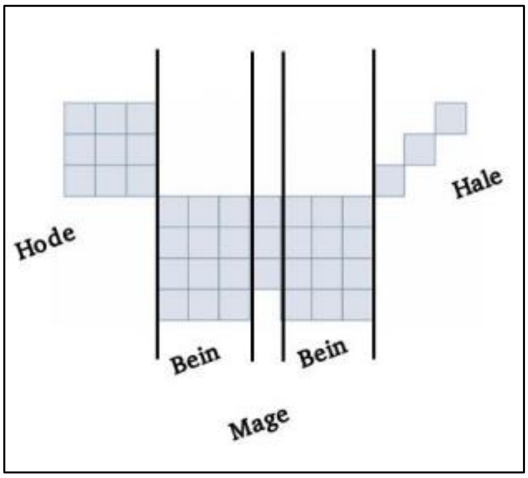
	A	B
1	Oppgave 14	
2	Figur nr	Antall sirkler
3	1	6
4	2	17
5	3	34
6	4	57
7	5	86
8	6	121
96	94	26697
97	95	27266
98	96	27841
99	97	28422
100	98	29009
101	99	29602
102	100	30201
103	Sum	1025250

	A	B
1	Oppgave 14	
2	Figur nr	Antall sirkler
3	1	=3*A3^2+2*A3+1
4	2	=3*A4^2+2*A4+1
5	3	=3*A5^2+2*A5+1
6	4	=3*A6^2+2*A6+1
7	5	=3*A7^2+2*A7+1
8	6	=3*A8^2+2*A8+1
96	94	=3*A96^2+2*A96+1
97	95	=3*A97^2+2*A97+1
98	96	=3*A98^2+2*A98+1
99	97	=3*A99^2+2*A99+1
100	98	=3*A100^2+2*A100+1
101	99	=3*A101^2+2*A101+1
102	100	=3*A102^2+2*A102+1
103	Sum	=SUMMER(B3:B102)

Radene 9 – 95 er skjult for å spare plass

Eksamensoppgave side 168

	A	B	C	D	E	F
1	Figur	Hode	Hale	Mage	Bein	Hund
2	1	1	1	1	2	7
3	2	4	2	2	6	20
4	3	9	3	3	12	39
5	4	16	4	4	20	64
6	5	25	5	5	30	95
7	6	36	6	6	42	132
8	7	49	7	7	56	175
9	8	64	8	8	72	224
10	9	81	9	9	90	279
11	10	100	10	10	110	340
12	11	121	11	11	132	407
13	12	144	12	12	156	480
14	13	169	13	13	182	559
15	14	196	14	14	210	644
16	15	225	15	15	240	735
17	16	256	16	16	272	832
18	17	289	17	17	306	935
19	18	324	18	18	342	1044
20	19	361	19	19	380	1159
81	80	6400	80	80	6480	19520
82	81	6561	81	81	6642	20007
83	82	6724	82	82	6806	20500
84	83	6889	83	83	6972	20999
85	84	7056	84	84	7140	21504
86	85	7225	85	85	7310	22015
87	86	7396	86	86	7482	22532
88	87	7569	87	87	7656	23055
89	88	7744	88	88	7832	23584
90	89	7921	89	89	8010	24119
91	90	8100	90	90	8190	24660
92	91	8281	91	91	8372	25207
93	92	8464	92	92	8556	25760
94	93	8649	93	93	8742	26319
95	94	8836	94	94	8930	26884
96	95	9025	95	95	9120	27455
97	96	9216	96	96	9312	28032
98	97	9409	97	97	9506	28615
99	98	9604	98	98	9702	29204
100	99	9801	99	99	9900	29799
101	100	10000	100	100	10100	30400
102						
103					SUM	1035250



Under er formlene jeg har brukt:

	A	B	C	D	E	F
1	Figur	Hode	Hale	Mage	Bein	Hund
2	1	=A2*A2	=A2	=A2	=A2*(A2+1)	=B2+C2+D2+2*E2
3	2	=A3*A3	=A3	=A3	=A3*(A3+1)	=B3+C3+D3+2*E3
4	3	=A4*A4	=A4	=A4	=A4*(A4+1)	=B4+C4+D4+2*E4
5	4	=A5*A5	=A5	=A5	=A5*(A5+1)	=B5+C5+D5+2*E5
6	5	=A6*A6	=A6	=A6	=A6*(A6+1)	=B6+C6+D6+2*E6
7	6	=A7*A7	=A7	=A7	=A7*(A7+1)	=B7+C7+D7+2*E7
8	7	=A8*A8	=A8	=A8	=A8*(A8+1)	=B8+C8+D8+2*E8
9	8	=A9*A9	=A9	=A9	=A9*(A9+1)	=B9+C9+D9+2*E9
10	9	=A10*A10	=A10	=A10	=A10*(A10+1)	=B10+C10+D10+2*E10
100	99	=A100*A100	=A100	=A100	=A100*(A100+1)	=B100+C100+D100+2*E100
101	100	=A101*A101	=A101	=A101	=A101*(A101+1)	=B101+C101+D101+2*E101
102						
103					SUM	=SUMMER(F2:F101)

Jeg trenger 1 035 250 kvadrater for å lage de 100 første hundene.