Velkommen

Velkommen til Hellerud videregående skole, og gratulerer med valg av skole!

Læring består av to parter; en som ønsker å lære bort og en som ønsker å lære. Her på Hellerud vil du møte topp motiverte lærere som ønsker å hjelpe deg gjennom dette skoleåret slik at du kan få best mulig utbytte av undervisningen.

Imidlertid kan ingen av oss trylle. Skal vi kunne hjelpe deg til å oppnå best mulig resultat er det fire krav du må oppfylle. Du må:

- Møte til undervisning
- Møte presist
- Møte interessert
- Møte forberedt

Ønsker du å beholde karakteren din fra ungdomsskolen må du være forberedt på å jobbe hardt og seriøst med faget, men om du oppfyller dine krav er vi helt sikre på at vi sammen greier å nå målet ditt.

Forord til 9. utgave:

I denne versjonen av boka har vi lagt inn en del innfyllingsoppgaver. Dette er fordi vi ønsker at boka skal være et nyttig arbeidsverktøy for deg, og et oppslagsverk som du kjenner godt. Ta godt vare på boka, du kommer til å få bruk for den.

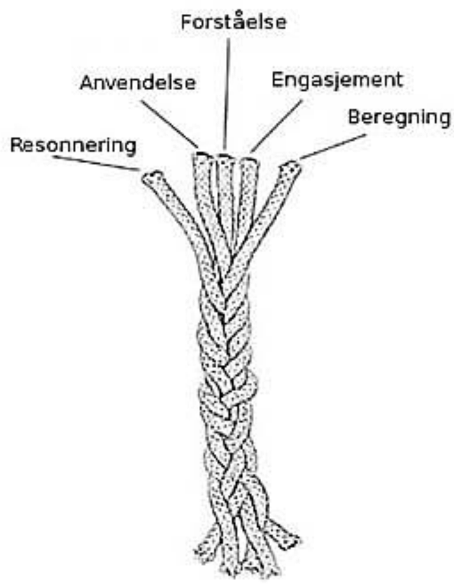
Dersom du trenger ytterligere oppgavetrening innenfor enkelte av temaene kan du logge deg inn på nettsiden Campus Inkrement med ditt Feide brukernavn og -passord.

Matematikkseksjonen ved Hellerud videregående skole
Juli 2021

Forsiden er laget av Nicolai Grytvik Borbe, fra fjorårets 3STM. Baksiden er laget av MK-lærer Christian Gruehagen.

Trådmodellen – hva vil det si å være god i matematikk?

1. **Forståelse:** Forstå matematiske begreper, representasjoner, operasjoner og relasjoner



2. **Beregning:** Utføre prosedyrer som involverer tall, størrelser og figurer, effektivt, nøyaktig og fleksibelt

3. **Anvendelse:** Formulere problemer matematisk og utvikle strategier for å løse problemer ved å bruke passende begreper og prosedyrer

Figur 1: Å være god i matematikk består av fem sammenflettede tråder (oversatt utgave, hentet fra Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001, s. 117)

4. **Resonnering:** Forklare og begrunne en løsning til et problem, eller utvide fra noe kjent til noe som ikke er kjent

5. **Engasjement:** Være motivert for å lære matematikk, se på matematikk som nyttig og verdifullt, og tro at innsats bidrar til økt læring i matematikk

(Kilde: http://www.matematikksenteret.no/content/4526/Hva-betyr-det-a-vare-god-i-matematikk)

Jo Boalers 7 bud

1. **Alle kan lære matematikk på høyeste nivå**
   - Det er ikke slik at noen er født med en «mattehjerne» - det handler om at alle kan lære hvis de vil gjøre jobben.

2. **Å gjøre feil er verdifull**
   - Feil gjør at hjernen din vokser. Det er bra å streve og gjøre feil.

3. **Å stille spørsmål er viktig**
   - Spør om det er noe du lurer på, og svar på andre sine spørsmål. Spør deg selv: er dette riktig?

4. **Matematikk handler om å være kreativ, og skal gi mening**
   - Finn mønstre og sammenhenger, og diskuter disse med andre.

5. **Matematikk er å se sammenhenger og å diskutere**
   - I matematikk kan det samme sies på ulike måter, for eksempel ord, bide, graf og funksjon. Finn sammenhengen mellom dem, og diskuter hvilken som passer best i de ulike situasjonene!

6. **Matematikk handler om å lære, ikke prestere**
   - Det tar tid å lære matematikk, og det handler om innsats.

7. **Det er viktigere å tenke grundig enn fort**
   - Det handler om å forstå noe godt, og det er ikke viktig å være rask

(fritt oversatt fra Jo Boalers «Positive Norms to Encourage in Math Class»)

INNHOLD

Prosent

Målet for opplæringen er at eleven skal kunne:

- Regne med prosent

Hva er prosent?

Ordet **prosent** har latinsk opprinnelse, og er satt sammen av ordene **pro** (av) og **cent** (hundre). **Prosent** betyr derfor «av hundre», men det kan også leses som «hundredel».

Finne prosenten

Prosent er nyttig å bruke både når vi ønsker å beskrive hvor mye en **del** utgjør av en **helhet**, og når vi ønsker å sammenligne **andeler** av **helheter** med ulik størrelse.

Vi regner ut **prosenten** med følgende regnemetode:

$$\boldsymbol{prosenten} = \frac{verdien\ av\ \boldsymbol{delen}}{verdien\ av\ \boldsymbol{helheten}} \cdot 100\ \%$$

Vi bruker **prosent** når vi ønsker å beskrive:

- hvor mye strøm vi har på telefonen
- hvor mye prisen på klær er redusert når butikkene har salg
- hvor stor andel del av Oslos befolkning som bor i Groruddalen
- hvor stor oppslutning partiene får ved Stortingsvalget
- hvor stor del av verdens verdier Norge eier gjennom Oljefondet

og i mange andre situasjoner.

Tenk deg følgende eksempel. En lærer ønsker å undersøke hvilken ungdomsskole elevene i klassen kommer fra, og lager denne oversikten:

Ungdomsskole	**Antall**	**Andel**	
		(Forholdstall)	**(Forholdstall · $\mathbf{100}$ %)**
Haugerud	8	$\frac{8}{30} = 0{,}27$	$0{,}27 \cdot 100\ \% = 27\ \%$
Lindeberg	7	$\frac{7}{30} = 0{,}23$	$0{,}23 \cdot 100\ \% = 23\ \%$
Granstangen	10	$\frac{10}{30} = 0{,}33$	$0{,}33 \cdot 100\ \% = 33\ \%$
Andre	5	$\frac{5}{30} = 0{,}17$	$0{,}17 \cdot 100\ \% = 17\ \%$
Sum	**30**	$\mathbf{\frac{30}{30} = 1{,}0}$	$1{,}0 \cdot 100\ \% = 100\ \%$

Oppgave 1

Gjør tilsvarende undersøkelse for klassen din.

Hvordan er fordelingen i klassen din sammenlignet med hele skolen?

Oppgave 2

Som du ser i eksempelet på forrige side, kan vi beskrive en **andel** på tre ulike måter:

BRØK <-> DESIMAL <-> PROSENT

I oppgavene nedenfor får du trening i å regne mellom disse ulike representasjonsmåtene.

Fyll ut tabellen. Klarer du noen av oppgavene uten kalkulator?						
Brøk	**Desimal**	**Prosent**		**Brøk**	**Desimal**	**Prosent**
$\frac{28}{100}$				$\frac{37}{56}$		
	0,48			$\frac{85}{127}$		
	0,61			$\frac{21}{18}$		
	0,7				0,8	
$\frac{5}{100}$					0,9	
		37 %				7 %
		8 %				113 %

Kan du lage en regel på hvordan du regner mellom **desimaltall** og **prosenttall**?

Oppgave 3

Det er vanlig å dele de politiske partiene i 3 hovedbolker: venstresiden, sentrum og høyresiden.

I et valgdistrikt fordelte stemmene seg slik:

- $\frac{3}{7}$ av stemmene gikk til partier på venstresiden
- En andel på 0,2 av stemmene gikk til partier i sentrum
- Resten av stemmene gikk til partier på høyresiden

Hvor mange prosent av stemmene gikk til partier på høyresiden?

En eksamensoppgave (del 1)

I en eske ligger det røde, grønne og gule kuler.

$\frac{3}{5}$ av kulene er røde, og $\frac{1}{10}$ av kulene er grønne.

Hvor mange prosent av kulene er gule?

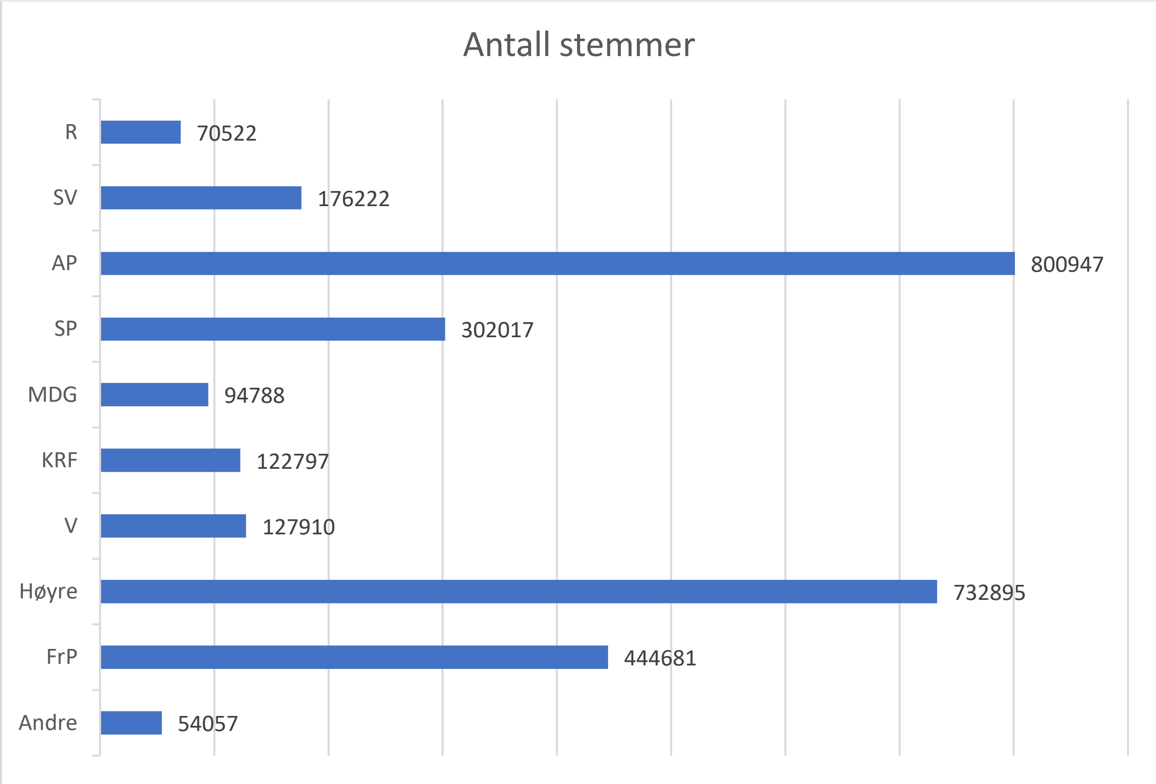
En eksamensoppgave (del 1)

En gullring er stemplet med 585.
Det betyr at 585 tusendeler av ringen er gull.

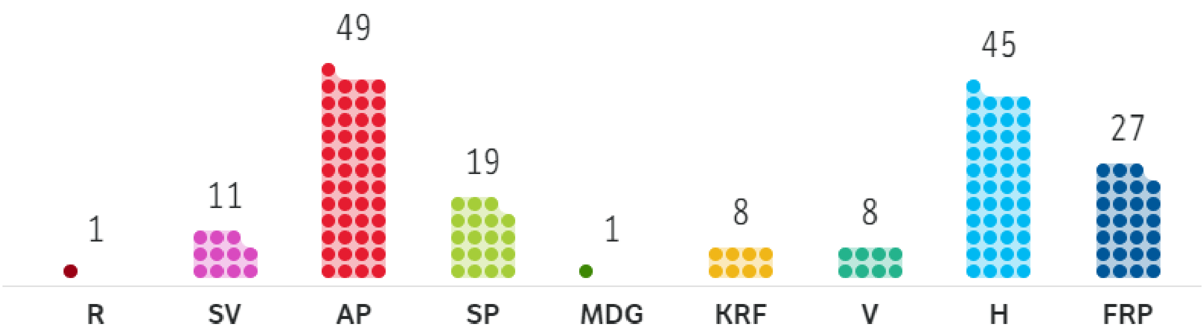
Hvor mange prosent av ringen er gull?

Presentasjonsoppgave

Ved Stortingsvalget i 2017 ble det totalt avgitt 2 926 836 stemmer. Nedenfor finner du resultatet for partiene som oppnådde minst 1 representant på Stortinget (en slik representant kalles en mandat).



Fordelingen av mandater på Stortinget ble slik:



Bruk resultatene ovenfor til å si noe om valgresultatet.

Bruke prosenten

Dersom vi vet hvor stor **prosent** en **del** er av en **helhet**, kan vi regne verdien til **delen** ved hjelp av følgende **regnemetode**:

$$\boldsymbol{Verdien}\ \text{til}\ \boldsymbol{helheten} \cdot \boldsymbol{prosenten} = \boldsymbol{verdien}\ \text{til}\ \boldsymbol{delen}$$

I oppgave 2 trente du på å gjøre **prosent** om til **desimaltall**. Dersom vi bruker **desimaltallet** i utregningen istedenfor **prosenten**, bruker vi ordet **prosentfaktor** om **desimaltallet**. Da får vi følgende **regnemetode**:

$$\boldsymbol{Verdien}\ \text{til}\ \boldsymbol{helheten} \cdot \boldsymbol{prosentfaktoren} = \boldsymbol{verdien}\ \text{til}\ \boldsymbol{delen}$$

I starten av skoleåret 2021/2022 vil 720 elever begynne på Hellerud vgs. **Andelen** av Helleruds elever som kommer fra Granstangen er omtrent 18 %.

Ved hjelp av **formlene** ovenfor kan vi regne ut hvor mange av Helleruds elever som kommer fra Granstangen.

Prosenten
$Antall\ elever\ fra\ Granstangen = 720\ elever \cdot 18\ \% = 129{,}6\ elever \approx 130\ elever$

Prosentfaktoren
$Antall\ elever\ fra\ Granstangen = 720\ elever \cdot 0{,}18 = 129{,}6\ elever \approx 130\ elever$

Du velger selv hvilken metode du ønsker å bruke. Det er imidlertid greit å vite hvilke metoder du kan bruke på de ulike digitale hjelpemidlene:

Digitale hjelpemidler	**Prosentfaktoren**	**Prosenten**
ExCel	✓	✓
GeoGebra	✓	✓
CAS	✓	✓
Kalkulator	✓	Ikke alle

Oppgave 4

Regn oppgavene nedenfor ved hjelp av kalkulator. Du velger selv om du ønsker å bruke **prosenten** eller **prosentfaktoren**, men prøv gjerne begge metodene.

a) 35 % av 400

b) 28 % av 1 200

c) 40 % av 35 600

d) 8 % av 92 400

e) 6,4 % av 7 600

f) 0,8 % av 159 200

Oppgave 5

En klesbutikk ville selge unna beholdningen av sommerkolleksjonen, og alle varene skal selges med 30 % rabatt.

	A	B		C
1	Vare	Pris		Rabatt
2	Ankelsokker	kr	59	
3	Bluse	kr	99	
4	Caps	kr	149	
5	Kort kjole	kr	199	
6	Lang kjole	kr	299	
7	Linskjorte	kr	249	
8	Pique-skjorte	kr	299	
9	Sandaler	kr	269	
10	Shorts	kr	399	
11	Skjørt	kr	159	
12	Solbriller	kr	499	
13	Solkrem	kr	169	
14	T-skjorte	kr	99	
15	Vannflaske	kr	149	

Lag et regneark som vist til ovenfor som kan brukes til å regne rabatten på hver enkelt vare.

I de grønne rutene skal du skrive formler.

Oppgave 6

En klesbutikk ville selge unna beholdningen av sommerkolleksjonen, og alle varene skal selges med 30 % rabatt.

	A	B		C
1	Rabatt		30 %	
2	Vare	Pris		Rabatt
3	Ankelsokker	kr	59	
4	Bluse	kr	99	
5	Caps	kr	149	
6	Kort kjole	kr	199	
7	Lang kjole	kr	299	
8	Linskjorte	kr	249	
9	Pique-skjorte	kr	299	
10	Sandaler	kr	269	
11	Shorts	kr	399	
12	Skjørt	kr	159	
13	Solbriller	kr	499	
14	Solkrem	kr	169	
15	T-skjorte	kr	99	
16	Vannflaske	kr	149	

Lag et regneark som vist til venstre som kan brukes til å regne rabatten på hver enkelt vare.

I de grønne rutene skal du skrive formler.

Utfordring: i de grønne rutene kan du kun henvise til andre ruter. Du kan ikke skrive inn tall i disse rutene.

En eksamensoppgave (del 1)

For å reise til flyplassen kan Herman ta flybussen eller bybanen.
Flybussen koster 100 kroner, og bybanen koster 40 kroner.

a) Hvor mange prosent billigere er bybanen sammenlignet med flybussen?

b) Hvor mange prosent dyrere er flybussen sammenlignet med bybanen?

Finne 100 %

Dersom vi får oppgitt **verdien** til en **del** og hvor mange **prosent** denne **verdien** utgjør, kan vi bruke denne informasjonen til å regne **verdien** til **helheten** ved hjelp av følgende **regnemetode**:

$$\frac{\boldsymbol{verdien}\ til\ \boldsymbol{delen}}{\boldsymbol{prosenten}} \cdot 100 = \boldsymbol{verdien}\ til\ \boldsymbol{helheten}$$

Dersom du blir bedt om å gjøre dette uten kalkulator vil ofte den enkleste løsningsmetoden være å først regne ut **verdien** til 10 **prosent**, og deretter multiplisere denne **verdien** med 10.

Det var 48 gutter i fjorårets påbyggsklasser, og dette utgjorde 40 % av eleven. Denne informasjonen kan vi bruke til å regne ut antall påbyggselever:

40 % = 48 elever | dividerer begge sider av likhetstegnet med 4 for å finne 10 %

10 % = 12 elever | multipliserer begge sider av likhetstegnet med 10 for å finne 100 %

100 % = 120 elever

Dette betyr at det var 120 elever i påbyggsklassene.

En eksamensoppgave (del 1)

I en eske ligger det hvite og røde terninger. Av disse er 15 hvite og 40 % røde.

Hvor mange terninger er det totalt i esken?

En eksamensoppgave (del 1)

Prisen for en vare ble satt ned med 20 %. Nå koster varen 640 kroner.

Hvor mye kostet varen før prisen ble satt ned?

En eksamensoppgave (del 1)

Prisen for en vare ble satt opp med 5 %. Dette tilsvarte en prisøkning på 40 kroner.

Hvor mye kostet varen før prisen ble satt opp?

Fasit prosent

Oppgave 2

Brøk	Desimal	Prosent		Brøk	Desimal	Prosent
$\frac{28}{100}$	0,28	28 %		$\frac{37}{56}$	0,66	66 %
$\frac{48}{100}$	0,48	48 %		$\frac{85}{127}$	0,67	67 %
$\frac{61}{100}$	0,61	61 %		$\frac{21}{18}$	1,17	117 %
$\frac{70}{100}$	0,7	70 %		$\frac{80}{100}$	0,8	80 %
$\frac{5}{100}$	0,05	5%		$\frac{90}{100}$	0,9	90 %
$\frac{37}{100}$	0,37	37 %		$\frac{7}{100}$	0,07	7 %
$\frac{8}{100}$	0,08	8 %		$\frac{113}{100}$	1,13	113 %

Oppgave	Svar	Oppgave	Svar
3	37 %	**4**	a) 140 b) 336 c) 14 240
			d) 7 392 e) 486,4 f) 1 273,6

Eksamensoppgaver side 8

$$\frac{3}{5} = 3 \cdot \frac{1}{5} = 3 \cdot 20\ \% = \underline{60\ \%}$$

$$\frac{1}{10} = \underline{10\ \%}$$

$$100\ \% - 60\ \% - 10\ \% = \underline{30\ \%}$$

30 % av kulene er gule.

$$\frac{585}{1000} = \frac{58,5}{100}$$

58,5 % av ringen er gull.

Oppgave 5

	A	B	C
1	Vare	Pris	Rabatt
2	Ankelsokker	kr 59	kr 18
3	Bluse	kr 99	kr 30
4	Caps	kr 149	kr 45
5	Kort kjole	kr 199	kr 60
6	Lang kjole	kr 299	kr 90
7	Linskjorte	kr 249	kr 75
8	Pique-skjorte	kr 299	kr 90
9	Sandaler	kr 269	kr 81
10	Shorts	kr 399	kr 120
11	Skjørt	kr 159	kr 48
12	Solbriller	kr 499	kr 150
13	Solkrem	kr 169	kr 51
14	T-skjorte	kr 99	kr 30
15	Vannflaske	kr 149	kr 45

	A	B	C
1	Vare	Pris	Rabatt
2	Ankelsokker	59	=B2*30%
3	Bluse	99	=B3*30%
4	Caps	149	=B4*30%
5	Kort kjole	199	=B5*30%
6	Lang kjole	299	=B6*30%
7	Linskjorte	249	=B7*30%
8	Pique-skjorte	299	=B8*30%
9	Sandaler	269	=B9*30%
10	Shorts	399	=B10*30%
11	Skjørt	159	=B11*30%
12	Solbriller	499	=B12*30%
13	Solkrem	169	=B13*30%
14	T-skjorte	99	=B14*30%
15	Vannflaske	149	=B15*30%

Oppgave 6 For å løse utfordringen har vi brukt «absolutt cellereferanse».

	A	B	C
1	Rabatt:	30 %	
2	Vare	Pris	Rabatt
3	Ankelsokker	kr 59	kr 18
4	Bluse	kr 99	kr 30
5	Caps	kr 149	kr 45
6	Kort kjole	kr 199	kr 60
7	Lang kjole	kr 299	kr 90
8	Linskjorte	kr 249	kr 75
9	Pique-skjorte	kr 299	kr 90
10	Sandaler	kr 269	kr 81
11	Shorts	kr 399	kr 120
12	Skjørt	kr 159	kr 48
13	Solbriller	kr 499	kr 150
14	Solkrem	kr 169	kr 51
15	T-skjorte	kr 99	kr 30
16	Vannflaske	kr 149	kr 45

	A	B	C
1	Rabatt:	0,3	
2	Vare	Pris	Rabatt
3	Ankelsokker	59	=B3*$B$1
4	Bluse	99	=B4*$B$1
5	Caps	149	=B5*$B$1
6	Kort kjole	199	=B6*$B$1
7	Lang kjole	299	=B7*$B$1
8	Linskjorte	249	=B8*$B$1
9	Pique-skjorte	299	=B9*$B$1
10	Sandaler	269	=B10*$B$1
11	Shorts	399	=B11*$B$1
12	Skjørt	159	=B12*$B$1
13	Solbriller	499	=B13*$B$1
14	Solkrem	169	=B14*$B$1
15	T-skjorte	99	=B15*$B$1
16	Vannflaske	149	=B16*$B$1

Eksamensoppgave side 12

Det er en prisforskjell på 60 kr mellom flybussen og bybanen.

a) $\frac{60}{100} = 60$ %. Bybanen er 60 % billigere enn flybussen

b) $\frac{60}{40}$ = 150 %. Flybussen er 150 % dyrere enn bybanen

Eksamensoppgaver side 13

Dersom 15 stk er hvite og 40% er røde, vet vi at 60% tilsvarer 15 stk. Da er 20% lik 5 stk. 40% er da 10 stk.

$\frac{15 \cdot 40}{60} = 10$

Vi deler 15 på 60 som gir en prosent, multipliserer med 40 for å finne hvor mange 40% er. Det er altså 10 stk.

$$0,8x = 640$$
$$x = \frac{640}{0,8}$$
$$x = 800$$

Varen kostet 800 kroner.

Dersom 5% tilsvarer 40 kroner er 1% $\frac{40}{5} = 8$kr. Varen kostet $100 \cdot 8\,kr = 800\,kr.$ før den ble satt opp.

Presentasjon og analyse

Målet for opplæringen er at eleven skal kunne:

- Planlegge, gjennomføre og vurdere statistiske undersøkelser
- Beregne og drøfte sentralmål og spredningsmål
- Beregne og gjøre rede for kumulativ og relativ frekvens, representere data i tabeller og diagram, og drøfte ulike datafremstillinger og hvilket inntrykk de kan gi
- Gruppere data og beregne sentralmål for et gruppert datamateriale
- Bruke regneark i statistiske beregninger og presentasjoner

INFORMASJON

På ungdomskolen har du sannsynligvis vært med på å samle inn informasjon, kanskje gjennom en spørreundersøkelse eller ved et forsøk. Du har kanskje spurt dine medelever om hvor mange søsken de har, eller hvor mange timer de bruker på skjerm. Kanskje har du registrert hvor mange biler som passerer skolen i et bestemt tidsrom.

Hvert enkelt svar fra spørreundersøkelsen eller hvert enkelt resultat fra forsøket kalles en **observasjon**, og antallet som svarer eller antall resultater fra undersøkelsen kalles **sum observasjoner**.

Informasjonen hver enkelt observasjon gir kalles **data**, og alle dataene samlet kalles **datamateriale**. I dette kapittelet skal vi først se på hvordan vi kan **presentere** informasjonen fra et datamateriale. Deretter skal vi se hvilke **analyser** vi kan gjøre av et datamateriale.

Tenk deg at læreren spør klassen om hvor mange transportmidler hver enkelt elev brukte for å komme til skolen i dag. Da vil hvert enkelt svar være en **observasjon** og antall elever som var med på undersøkelsen vil være **sum observasjoner**.

Hva hver enkelt elev svarer vil være **data**, mens alle svarene samlet vil bli undersøkelsens **datamateriale**. Det er dette **datamaterialet** som vi enten kan **presentere** eller **analysere**

Eksempel:

En taxisjåfør registrerte antall turer hver dag en uke i desember. Her blir **antall observasjoner** 7.

Sjåføren registrerte følgende observasjoner fra mandag til søndag:

14 – 17 – 12 – 21 – 29 – 37 - 14

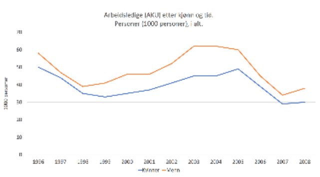
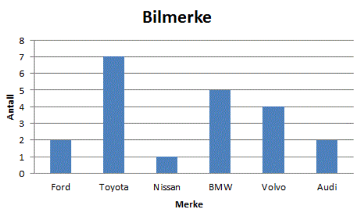
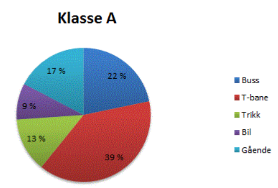
PRESENTASJON

Når vi har skaffet oss et datamateriale kan vi lage en presentasjon av informasjonen i datamaterialet. Det er ryddig å først systematisere dataene i en **tabell**, og det kan være lurt å gjøre dette i ExCel:

	A	B
1	Dag	Antall turer
2	Mandag	14
3	Tirsdag	17
4	Onsdag	12
5	Torsdag	21
6	Fredag	29
7	Lørdag	37
8	Søndag	14

Tabell er ikke alltid den beste måten å presentere informasjon på, spesielt ikke dersom det er mye informasjon som skal presenteres. I slike tilfeller kan vi bruke mer visuelle hjelpemidler, for eksempel en graf eller et **diagram**.

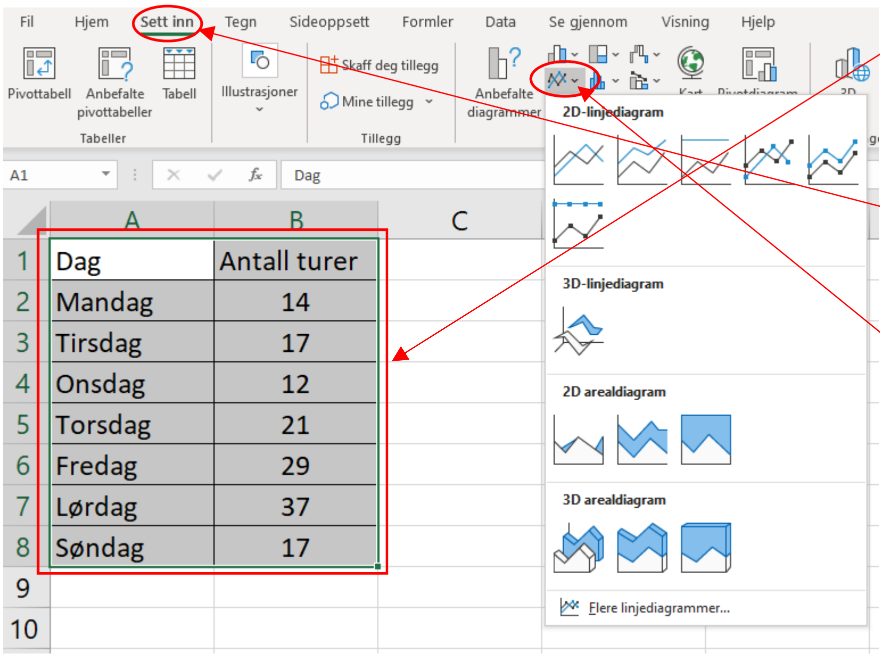
Det finnes tre typer diagrammer du bør kjenne til og når de kan brukes:

<table>
<tr><th>Type</th><th>Linjediagram</th><th>Søylediagram</th><th>Sektordiagram</th></tr>
<tr><td>Brukes når vi ønsker å vise</td><td>Utvikling over tid</td><td>Forskjellen mellom dataene. Her trenger ikke alle data være med.</td><td>Andel (gjerne prosent) av datamaterialet</td></tr>
<tr><td>Eksempel</td><td></td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

På de neste sidene viser vi hvordan du kan lage slike diagrammer i ExCel.

Linjediagram:

Dersom vi ønsker å vise utvikling i antall turer gjennom uka, kan vi bruke et **linjediagram**.



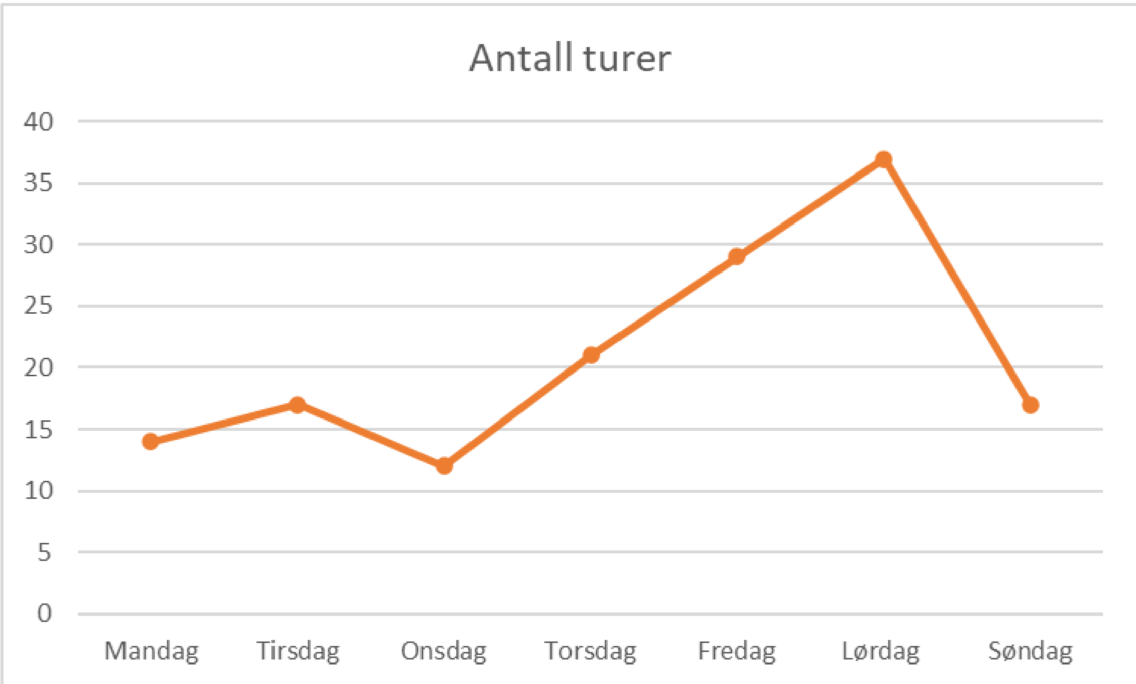
1. Marker tallene i tabellen.

2. Trykk på «Sett inn».

3. Trykk på «Sett inn linje- eller arealdiagram».

4. Velg det diagrammet du ønsker.

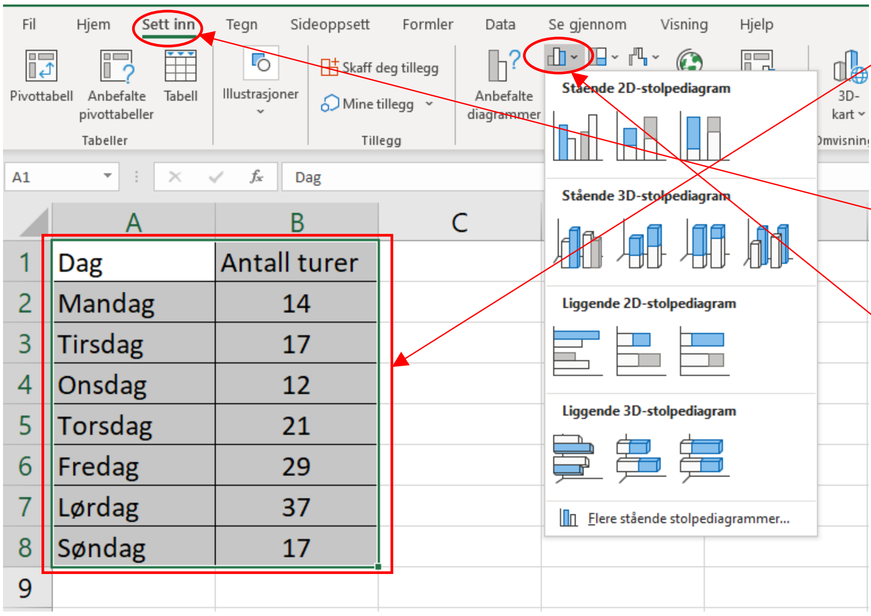
Utviklingen i antall turer gjennom uka blir slik:



Klarer du å lage dette diagrammet i ExCel?

Søylediagram:

Dersom vi ønsker å vise forskjellen i antall turer gjennom uka, kan vi bruke et **søylediagram**.



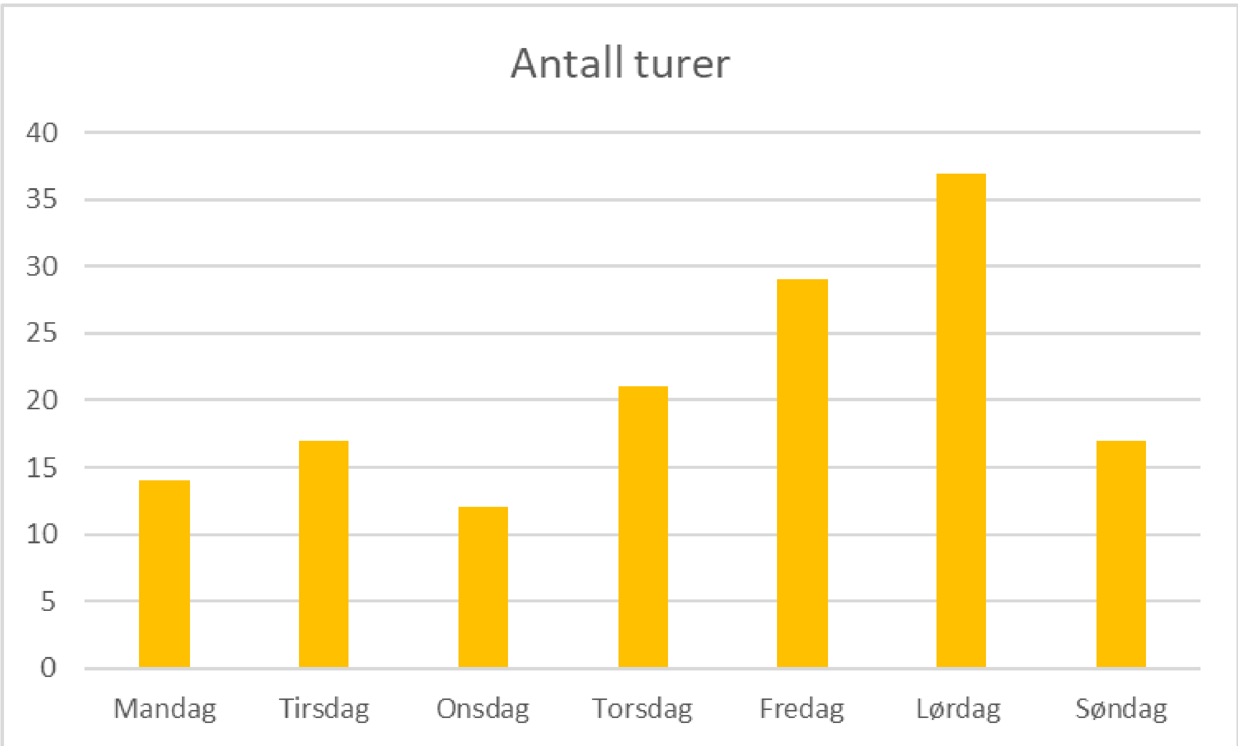
1. Marker tallene i tabellen.

2. Trykk på «Sett inn».

3. Trykk på «Sett inn stående eller liggende stolpediagram».

4. Velg det diagrammet du ønsker.

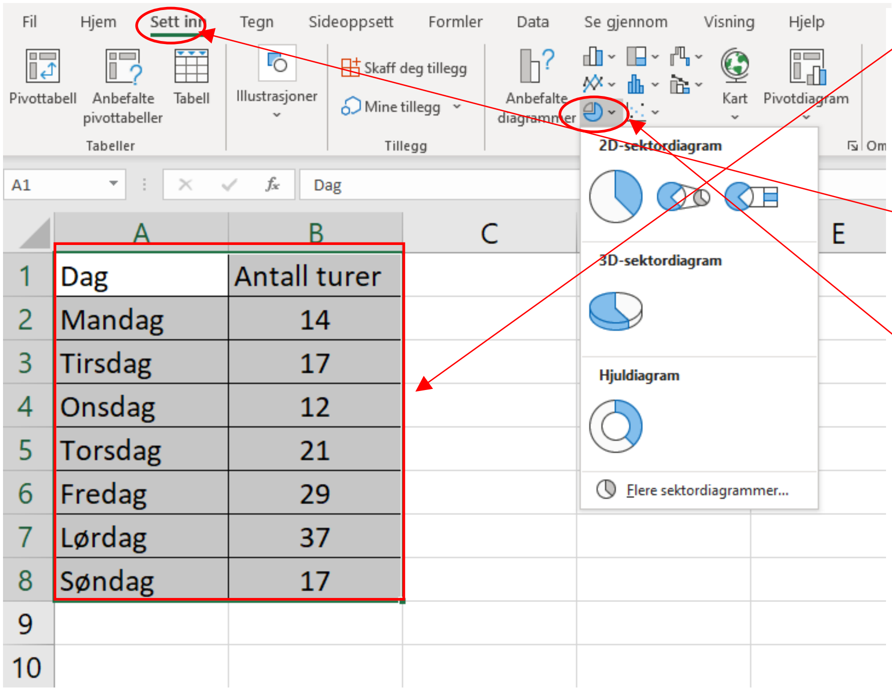
Antall turer fra mandag til søndag blir slik:



Klarer du å lage dette diagrammet i ExCel?

Sektordiagram:

Dersom vi ønsker å vise den prosentvise fordelingen av antall turer, kan vi bruke et **sektordiagram**.



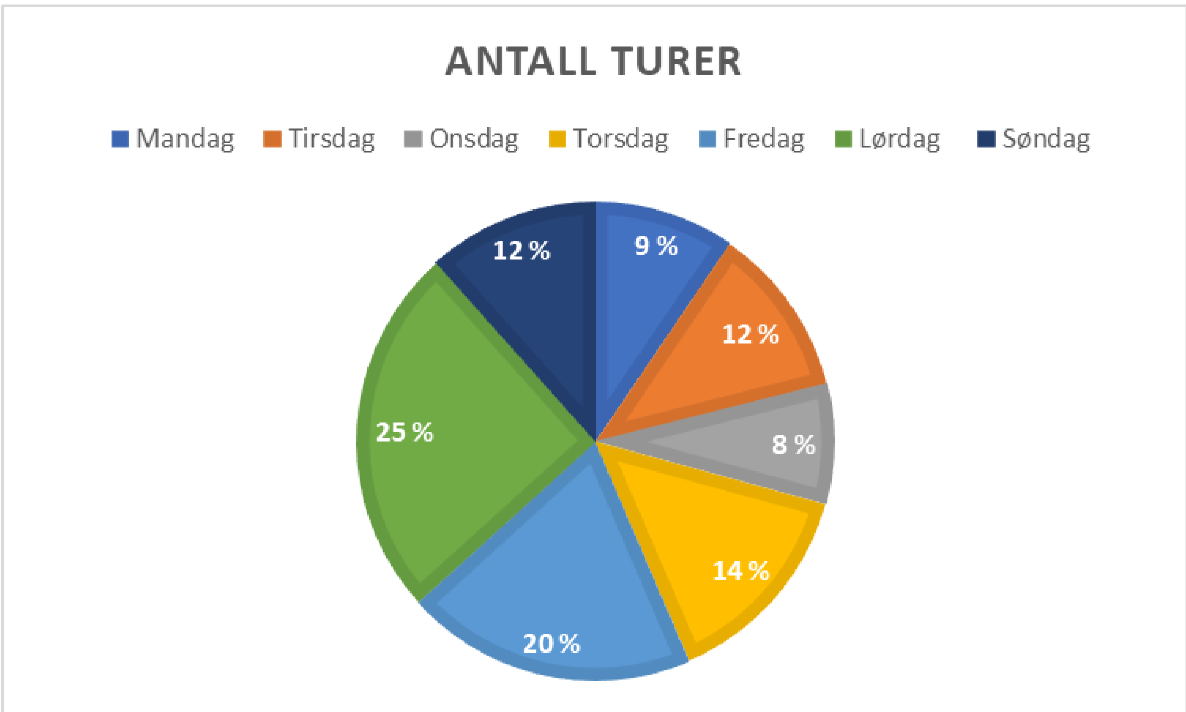
1. Marker tallene i tabellen.

2. Trykk på «Sett inn».

3. Trykk på «Sett inn sektor- eller hjuldiagram».

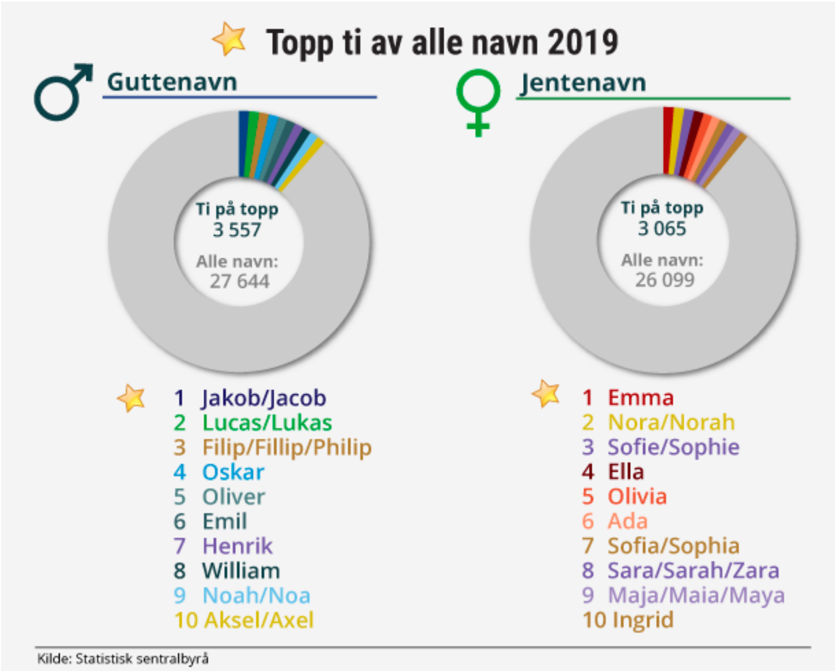
4. Velg det diagrammet du ønsker. Husk å inkludere prosent.

Den prosentvise fordelingen av antall turer blir slik:

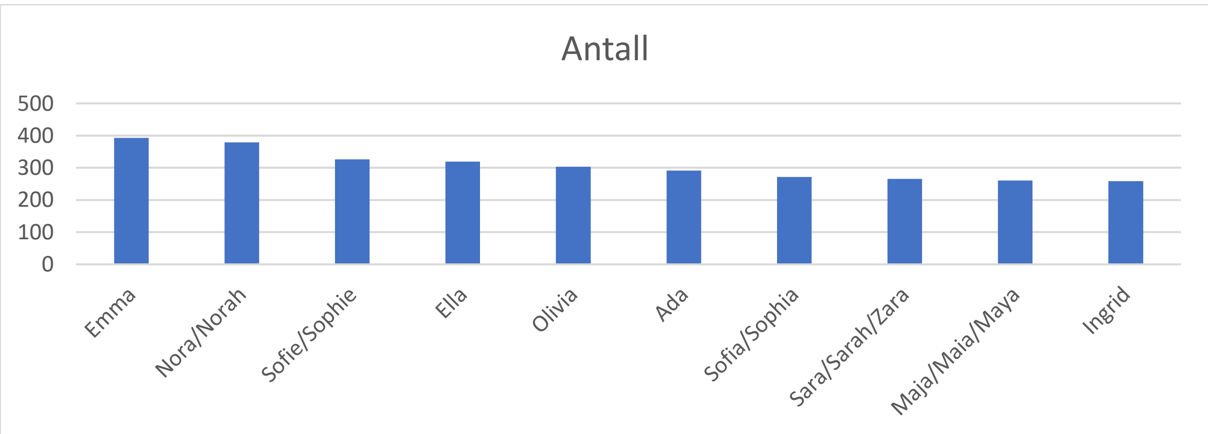


Klarer du å lage dette diagrammet i ExCel?

Spørsmål til diskusjon: nedenfor har vi presentert en liste over de 10 mest populære gutte- og jentenavnene i 2019 på tre ulike måter. Hvilken informasjon gir de ulike presentasjonsmetodene? Hvilken metode liker du best?



Topp ti, jentenavn og guttenavn. 2019					
Jentenavn	Antall	Per 1 000	Guttenavn	Antall	Per 1 000
Emma	393	15	Jakob/Jacob	423	15
Nora/Norah	379	14	Lucas/Lukas	392	14
Sofie/Sophie	326	12	Filip/Fillip/Philip/Phillip	387	13
Ella	319	12	Oskar/Oscar	358	12
Olivia	303	11	Oliver	353	12
Ada	291	11	Emil	347	12
Sofia/Sophia	271	10	Henrik	339	12
Sara/Sarah/Zara	265	10	William	333	12
Maja/Maia/Maya	260	9	Noah/Noa	314	11
Ingrid	258	9	Aksel/Axel	311	11



Oppgave 1

På Wikipedia kan vi finne følgende informasjon om antall nordmenn som er bekreftet smittet av Covid-19 i ukene 40 – 45:

Uke	Antall bekreftet smittet av Covid-19
40	742
41	1 072
42	915
43	1 096
44	3 402
45	4 162

a) Bestem hvilket poeng du ønsker å få frem, og lag et passende diagram.

b) Hvorfor passer det ikke å bruke et sektordiagram til dette datamaterialet?

Oppgave 2

En lærer spurte klassen hvor mange transportmidler elevene vanligvis bruker frem og tilbake til skolen. Læreren systematiserte svarene i tabellen nedenfor:

Antall transportmidler	Frekvens
0	4
1	3
2	8
3	1
4	6
5	3
6	2

a) Bestem hvilket poeng du ønsker å få frem, og lag et passende diagram.

b) Hvorfor passer det ikke å bruke et linjediagram til dette datamaterialet?

Oppgave 3

I løpet av første termin hadde en klasse gjennomført 3 prøver i matematikk. Læreren hadde registrert følgende karakterer på prøvene:

Karakter	Frekvens første prøve	Frekvens andre prøve	Frekvens tredje prøve
1	0	2	1
2	3	4	4
3	5	7	6
4	8	5	4
5	4	3	4
6	1	0	2

Bestem hvilket poeng du ønsker å få frem, og lag et passende diagram.

ANALYSE

Når vi har skaffet oss et datamateriale kan vi gjøre mer enn å bare presentere resultatene. Vi kan også gjøre noen analyser av informasjonen. Nedenfor har vi listet opp noen spørsmål som kan være naturlig å stille til datamaterialet fra taxi-sjåføren.

Hvilket resultat er i midten?

Dersom vi skal finne hva som er i midten må vi først sette resultatene i rekkefølge, for eksempel fra lavest til høyest:

12 – 14 – 17 – 17 – 21 – 29 – 37

Her ser vi at 17 turer er det resultatet i midten. Dette kalles for øvrig for **median**.

Spørsmål til diskusjon: hva om det er 2 i midten? Når inntreffer dette?

Hva er det vanligste resultatet?

Er det et resultat som kommer oftere enn andre? I datamaterialet til taxi-sjåføren ser vi at 17 turer er det resultatet som forekommer oftest. Dette kalles for øvrig for **typetall**.

Spørsmål til diskusjon: hva om det er flere observasjoner som forekommer oftest? Hva om ingen observasjoner forekommer flere ganger?

Hva om alle resultatene hadde vært like?

Tenk om sjåføren kunne fordelt turene slik at det ble kjørt like mange turer hver dag, istedenfor mange turer noen dager og få turer andre dager? Dette kalles for øvrig for **gjennomsnitt**.

I så fall må vi først finne ut hvor mange turer sjåføren kjørte til sammen. Deretter må vi fordele disse turene på antall dager. Dette kan skrives slik:

Gjennomsnitt = $\frac{sum\ data}{antall\ \ observasjoner} = \frac{sum\ turer}{antall\ dager} = \frac{147}{7} = 21$

Spørsmål til diskusjon: for hvilke typer undersøkelser er det ikke mulig å regne gjennomsnitt?

Disse tre analysene kalles for **sentralmål**. Blir du bedt om å finne **sentralmålene** til et datamateriale er det disse analysene du skal gjøre.

Hva om vi legger sammen resultatene underveis?

Det kan kanskje være interessant å vite hvor mange turer sjåføren har kjørt fra mandag til onsdag, eller fra mandag til fredag. Dette kalles for øvrig **kumulativ frekvens.** Kumulativ kommer av ordet akkumulere, som betyr å samle opp.

Vi kunne naturligvis skrevet det slik:

Kumulativ frekvens for mandag: antall turer mandag.

Kumulativ frekvens for tirsdag: antall turer mandag + tirsdag

Kumulativ frekvens for onsdag: antall turer mandag + tirsdag + onsdag

osv…

men det er mer fornuftig å gjøre dette i en tabell:

	A	B	C
1	Dag	Antall turer	Kumulativ frekvens
2	Mandag	14	14
3	Tirsdag	17	31
4	Onsdag	12	43
5	Torsdag	21	64
6	Fredag	29	93
7	Lørdag	37	130
8	Søndag	17	147

Spørsmål til diskusjon: nedenfor har vi vist formlene som ble brukt for å regne ut den kumulative frekvensen for dette datamaterialet. Hvordan er regnearket bygd opp?

	A	B	C
1	Dag	Antall turer	Kumulativ frekvens
2	Mandag	14	=B2
3	Tirsdag	17	=C2+B3
4	Onsdag	12	=C3+B4
5	Torsdag	21	=C4+B5
6	Fredag	29	=C5+B6
7	Lørdag	37	=C6+B7
8	Søndag	14	=C7+B8

Hvor stor (prosent)andel utgjør hvert resultat?

Det kan kanskje være interessant for sjåføren å vite hvor mange prosent av turene som ble kjørt på hver av dagene. Vi har tidligere sett at vi kan finne dette ved å lage et sektordiagram, men det kan også gjøres ved regning.

Dette kalles **relativ frekvens**, og dersom vi legger sammen prosentene underveis kalles dette **kumulativ relativ frekvens**. Dette er også fornuftig å gjøre i en tabell:

	A	B	C	D
1	Dag	Antall turer	Relativ frekvens	Kumulativ relativ frekvens
2	Mandag	14	9,5 %	9,5 %
3	Tirsdag	17	11,6 %	21,1 %
4	Onsdag	12	8,2 %	29,3 %
5	Torsdag	21	14,3 %	43,5 %
6	Fredag	29	19,7 %	63,3 %
7	Lørdag	37	25,2 %	88,4 %
8	Søndag	17	11,6 %	100,0 %
9	Sum turer	147	100,0 %	

Spørsmål til diskusjon: nedenfor har vi vist formlene som ble brukt for å regne ut den relative frekvensen for dette datamaterialet. Hvordan er regnearket bygd opp?

	A	B	C
1	Dag	Antall turer	Relativ frekvens
2	Mandag	14	=B2/$B$9
3	Tirsdag	17	=B3/$B$9
4	Onsdag	12	=B4/$B$9
5	Torsdag	21	=B5/$B$9
6	Fredag	29	=B6/$B$9
7	Lørdag	37	=B7/$B$9
8	Søndag	17	=B8/$B$9
9	Sum turer	=SUMMER(B2:B8)	=B9/$B$9

Er det stor forskjell på resultatene?

Hvilken dag kjører sjåføren færrest turer? Hvor mange turer kjører sjåføren på den travleste dagen? Hvor stor er forskjellen mellom det høyeste og det laveste antall turer? Dette kalles for øvrig **variasjonsbredde**, og er en del av det som kalles **spredningsmål.**

Vi ser at sjåføren kjører 37 turer på den travleste dagen, og 12 turer på den roligste dagen. Vi kan dermed regne ut **variasjonsbredden** slik:

Variasjonsbredde = høyest resultat – lavest resultat = 37 turer – 12 turer = 25 turer.

Oppgave 4

Nedenfor ser du karakterene til en elev på vurderinger i første termin på VG1:

3 – 4 – 2 – 4 – 5 – 2 – 3 – 6 – 3 – 4 – 5 – 3

a) Hvilken karakter er den midterste karakteren til denne eleven?

b) Hva er den vanligste karakteren denne eleven har fått?

c) Hvor høy er gjennomsnittskarakteren til denne eleven?

d) På hvor mange prosent av vurderingene fikk eleven karakteren 5?

e) Hvor stor var forskjellen på den høyeste og den laveste karakteren for denne eleven?

Oppgave 5

Vi spurte 8 elever hvor mye penger de hadde brukt i kantina i storefri. Nedenfor finner du svarene de ga (i kroner):

55, 70, 45, 60, 130, 50, 65 og 70

a) Hvor stor var forskjellen i pengebruk mellom den som brukte mest og den som brukte minst?

b) Hvor mye brukte hver av elevene i gjennomsnitt?

c) Hva er midtpunktet til dette datamaterialet?

d) Hvor mange prosent av elevene brukte mer penger enn gjennomsnittet? Hvor mange prosent av elevene brukte mindre penger enn gjennomsnittet?

Oppgave 6

Finn sentralmål og spredningsmål til datamaterialet i oppgave 1.

En eksamensoppgave (del 1)

Petter har spurt 10 ungdommer hvor mange ganger de brukte elsparkesykkel i løpet av en uke. Svarene deres ser du nedenfor.

20	17	0	0	15	13	4	0	26	0

Bestem medianen, gjennomsnittet, typetallet og variasjonsbredden for dette datamaterialet.

En eksamensoppgave (del 1)

En morgen førte Thale statistikk over hvor mange biler som passerte på grønt lys i lyskrysset ved skolen. Hun fikk med seg ti perioder med grønt lys. Nedenfor ser du hvor mange biler som passerte i hver av disse ti periodene.

10	20	12	18	7	33	12	38	20	10

a) Bestem medianen og gjennomsnittet for antall biler som passerte i løpet av en periode med grønt lys.

b) Bestem den kumulative frekvensen for 18 passerte biler.
Hva forteller dette tallet?

Trafikketaten vurderer å korte ned tiden det er grønt lys, med 10 %.

c) Gjør nødvendige antakelser og beregninger, og anslå hva gjennomsnittet og medianen for Thales tall ville vært om tiden med grønt lys var kortet ned med 10 %.

ANALYSE I ExCel

ExCel kan forenkle analysearbeidet for oss dersom vi kjenner kommandoene. Nedenfor finner du en oversikt over hvordan du kan bruke ExCel til å finne **sentralmå**l og **spredningsmå**l til et datamateriale.

Dersom du skal skrive inn kommandoen gjør du det i følgende rekkefølge:

1. Begynn med å skrive = [kommandoen]

2. Dobbelklikk på kommandoen som kommer opp.

3. Marker tallene du ønsker at ExCel skal analysere

4. Trykk «Enter»

Hvilken analyse	Kommando
Gjennomsnitt	=gjennomsnitt(datamaterialet)
Median	=median(datamaterialet)
Typetall	=modus(datamaterialet)
Variasjonsbredde	=maksa(datamaterialet) – min(datamaterialet)
Standardavvik	=stdav.p

Standardavvik er et **spredningsmål**. Ved å regne ut **standardavviket** til et **tallmateriale** sammenligner vi hver enkelt **observasjon** med **gjennomsnittet**, og **standardavviket** vil være en samlet vurdering av denne forskjellen. Det betyr at jo mer hver enkelt **observasjon** avviker fra **gjennomsnittet**, jo høyere blir **standardavviket**. Det motsatte gjelder også: jo høyere **standardavvik**, jo større spredning blant **observasjonene.**

Merk: disse kommandoene fungerer kun når datamaterialet er skrevet som en liste med tall, slik det er gjort i eksempelet med taxi-turer.

Dersom du skal finne **sentral- og spredningsmål** når data er samlet i kategorier, som i oppgave 2 og 3 må dette løses på en annen måte. Dette skal du lære senere i kapittelet.

ExCel-analyse av taxi-turene:

	A	B
1	Dag	Antall turer
2	Mandag	14
3	Tirsdag	17
4	Onsdag	12
5	Torsdag	21
6	Fredag	29
7	Lørdag	37
8	Søndag	17
9	Sum	147
10		
11	Median	17
12	Typetall	17
13	Gjennomsnitt	21
14	Variasjonsbredde	25
15	Standardavvik	8,3

	A	B
1	Dag	Antall turer
2	Mandag	14
3	Tirsdag	17
4	Onsdag	12
5	Torsdag	21
6	Fredag	29
7	Lørdag	37
8	Søndag	17
9	Sum	=SUMMER(B2:B8)
10		
11	Median	=MEDIAN(B2:B8)
12	Typetall	=MODUS(B2:B8)
13	Gjennomsnitt	=GJENNOMSNITT(B2:B8)
14	Variasjonsbredde	=B7-B4
15	Standardavvik	=STDAV.P(B2:B8)

Legg merke til at vi forklarer hvilke analyser vi utfører.

Oppgave 7

Bruk datamaterialet du finner i oppgave 1, og gjør en analyse av sentralmål og spredningsmål ved hjelp av ExCel.

Spørsmål til diskusjon: kommandoer er ment for å forenkle arbeidet. Er det noen av kommandoene som fremstår som en mer tungvint metode enn å utføre analysen selv? Kan dette variere ut fra størrelsen på datamaterialet?

En eksamensoppgave (del 2)

By	Antall innbyggere
São Paulo	11 968 000
Mexico City	8 919 000
Lima	8 894 000
New York	8 550 000
Bogotá	7 862 000
Rio de Janeiro	6 477 000
Santiago	5 507 000
Los Angeles	3 972 000
Caracas	3 290 000
Buenos Aires	3 054 000
Salvador	2 921 000
Brasília	2 914 000
Toronto	2 826 000
Chicago	2 721 000

Tabellen ovenfor viser hvor mange innbyggere det er i hver av de 14 største byene i Sør- og Nord-Amerika.

a) Bestem gjennomsnittet, medianen, variasjonsbredden og standardavviket for antall innbyggere i disse byene.

Tabellen nedenfor viser gjennomsnittet, medianen, variasjonsbredden og standardavviket for antall innbyggere i de 14 største byene i Europa.

Gjennomsnitt	4 808 000
Median	2 898 000
Variasjonsbredde	13 662 000
Standardavvik	4 256 000

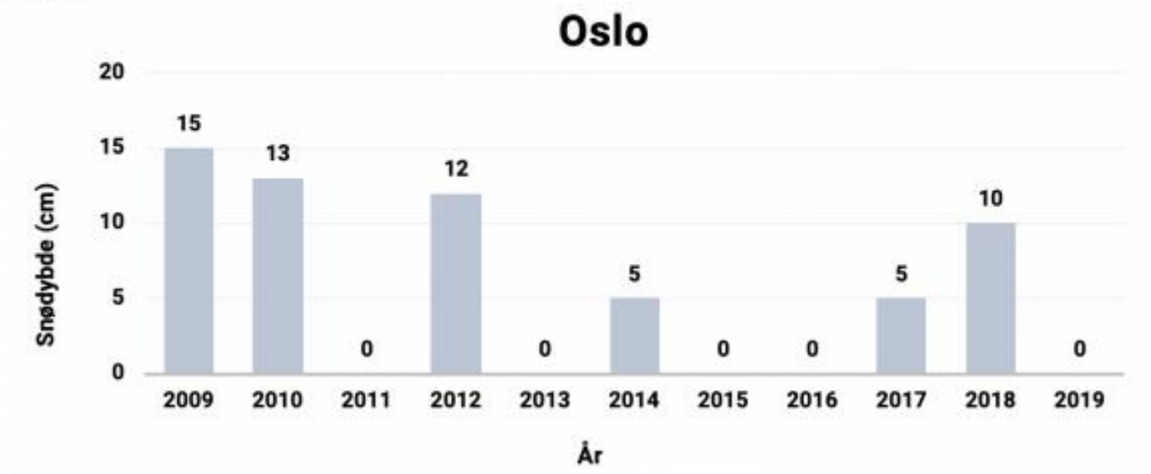
b) Hva kan du si om størrelsen på byene i Europa sammenliknet med størrelsen på byene i Sør- og Nord-Amerika?

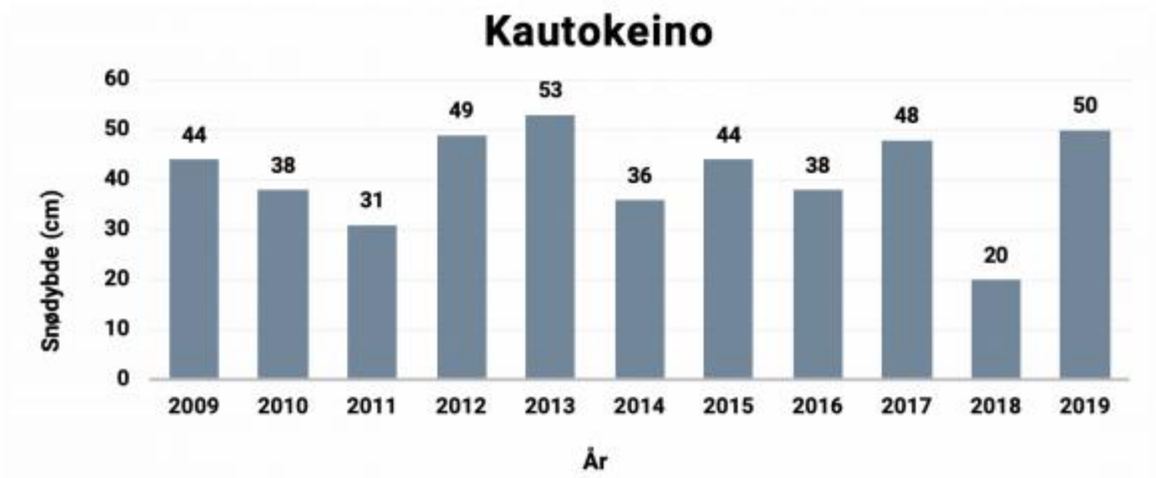
I beregningene ovenfor er Istanbul tatt med som en by i Europa.
Istanbul har 15 519 000 innbyggere og er da Europas største by.

c) Bestem gjennomsnittet for antall innbyggere i de 13 byene i Europa som har flest innbyggere dersom vi ser bort fra Istanbul.

En eksamensoppgave (del 2)

Diagrammene nedenfor viser snødybden i Oslo og i Kautokeino julaften de 11 siste årene.





a) Bestem gjennomsnittet og standardavviket for snødybdene i Oslo og for snødybdene i Kautokeino.

Etter å ha regnet ut gjennomsnittet for Oslo og Kautokeino kom Isak med følgende påstand:

«Siden gjennomsnittet for Kautokeino ble høyere enn gjennomsnittet for Oslo, må standardavviket for Kautokeino også bli høyere enn standardavviket for Oslo. Det er alltid slik at det datamaterialet som har høyest gjennomsnitt, også har høyest standardavvik.»

b) Er påstanden riktig? Begrunn svaret ditt.

ANALYSE AV KATEGORIER

En lærer spurte klassen hvor mange transportmidler elevene vanligvis bruker frem og tilbake til skolen. Læreren registrerte følgende svar, skrevet i stigende rekkefølge:

0 0 0 0 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 3 4 4 4 4 4 4 4 4 4 5 5 6 6

Læreren systematiserte svarene i tabellen nedenfor:

X kategori	f frekvens
Antall transportmidler	**Antall elever**
0	4
1	4
2	8
3	1
4	9
5	2
6	1

Når flere av svarene er like kan de samles i kategorier. Dette gir en mer ryddig presentasjon av resultatene, men medfører en utfordring når vi skal utføre en analyse over sentra- og spredningsmål.

I kategori-kolonnen (**X**) skrives hvilke svar som har blitt registrert.

I frekvens-kolonnen (**f**) skrives hvor mange som har gitt dette svaret.

Læreren ønsket deretter å gjøre en analyse av datamaterialet, og læreren ønsket å gjøre dette ut fra informasjonen presentert i tabellen.

Median
Median er det midterste svaret i en ordnet rekkefølge. I dette tilfellet har det blitt avgitt 29 svar og svaret i midten blir dermed svar nummer 15. Hva står det på dette svaret?

Vi ser at de fire første svarene er 0, deretter er det fire som har svart 1. Dette blir til sammen 8 svar. Videre er det åtte som ha svart 2, og til sammen utgjør dette de 16 første svarene.

Læreren var ute etter svar nummer 15, og ut fra opptellingen ovenfor skjønner læreren at svar nummer 15 var 2 transportmidler.

Medianen i tallmaterialet er dermed 2.

Spørsmål til drøfting: hva blir medianen dersom det er to svar i midten, og disse havner i hver sin kategori?

Typetall
Typetall er den kategorien med høyest frekvens. I dette tilfellet betyr det hvilket svar som ble gitt flest ganger.

I tabellen ser vi at 4 transportmidler ble svart 9 ganger, og dette svaret er det som ble avgitt flest ganger.

Typetallet i datamaterialet er dermed 4.

Spørsmål til diskusjon: hva blir typetallet dersom flere kategorier har den høyeste frekvensen?

Gjennomsnitt
Gjennomsnitt regnes ved å dividere **sum data** på **antall observasjoner**.

I dette tilfellet blir regnestykket: $\frac{sum\ transportmidler}{antall\ elever}$.

Det var 29 elever som svarte på undersøkelsen, men hvor mange transportmidler brukte klassen til sammen? For å finne ut dette må vi regne ut antall transportmidler fra hver kategori, og legge sammen disse svarene:

0 transportmidler · 4 = 0 transportmidler
1 transportmidler · 4 = 4 transportmidler
2 transportmidler · 8 = 16 transportmidler
3 transportmidler · 1 = 3 transportmidler
4 transportmidler · 9 = 36 transportmidler
5 transportmidler · 2 = 10 transportmidler
6 transportmidler · 1 = 6 transportmidler

Til sammen benytter klassen 75 transportmidler frem og tilbake til skolen. I gjennomsnitt blir dette:

$\frac{sum\ transportmidler}{antall\ elever} = \frac{75\ transportmidler}{29\ elever}$ = 2,6 transportmidler per elev.

Gjennomsnittet i datamaterialet er dermed 2,6.

Variasjonsbredde
Variasjonsbredde betyr forskjellen på høyeste og laveste kategori. I dette tilfellet blir det forskjellen på flest og færrest transportmidler.

Vi ser i tabellen at det høyeste svaret var 6 transportmidler, mens det laveste svaret var 0 transportmidler. Forskjellen mellom disse svarene blir: 6 – 0 = 6.

Variasjonsbredden i datamaterialet er dermed 6.

Oppgave 8

Bruk datamaterialet du finner i oppgave 2, og gjør en analyse av sentralmål og spredningsmål til tallmaterialet.

En eksamensoppgave (del 1)

Tabellen nedenfor viser karakterfordelingen ved en skole ved norskeksamen våren 2017.

Karakter	Antall elever
1	3
2	12
3	25
4	12
5	6
6	2

a) Hvor mange prosent av elevene fikk karakteren 1 eller 2?

b) Bestem mediankarakteren.

c) Bestem gjennomsnittskarakteren.

ANALYSE AV KATEGORIER I ExCel

En analyse av et datamateriale, også når informasjonen er kategorisert, kan gjøres raskere og mer oversiktlig i ExCel.

Nedenfor har vi gjennomført analysen av lærerens undersøkelse av antall transportmidler elevene i klassen bruker for å reise frem og tilbake til skolen:

	A	B	C	D
1	*Kolonnen brukes til å finne:*			
2	*Variasjonsbredde*	*Typetall*	*Median*	*Gjennomsnitt*
3	**X** Antall transportmidler	**f** Antall elever	Kumulativ frekvens	**X · f**
4	0	4	4	0
5	1	4	8	4
6	2	8	16	16
7	3	1	17	3
8	4	9	26	36
9	5	2	28	10
10	6	1	29	6
11	Sum	29		75
12				
13	**Median**	2		
14	**Typetall**	4		
15	**Gjennomsnitt**	2,6		
16	**Variasjonsbredde**	6		

	A	B	C	D
1	*Kolonnen brukes til å finne:*			
2	*Variasjonsbredde*	*Typetall*	*Median*	*Gjennomsnitt*
3	**X** Antall transportmidler	**f** Antall elever	Kumulativ frekvens	**X · f**
4	0	4	=B4	=A4*B4
5	1	4	=C4+B5	=A5*B5
6	2	8	=C5+B6	=A6*B6
7	3	1	=C6+B7	=A7*B7
8	4	9	=C7+B8	=A8*B8
9	5	2	=C8+B9	=A9*B9
10	6	1	=C9+B10	=A10*B10
11	Sum	=SUMMER(B4:B10)		=SUMMER(D4:D10)
12				
13	**Median**	=A6		
14	**Typetall**	=A8		
15	**Gjennomsnitt**	=D11/B11		
16	**Variasjonsbredde**	=A10-A4		

Klarer du å lage denne tabellen i ExCel?

Oppgave 9

A - og B – klassen gjennomførte en prøve. Nedenfor ser du karakterene på de 50 elevene som gjennomførte prøven:

2 3 1 3 3   5 1 2 2 4   6 2 2 1 2   3 1 2 4 4   5 2 2 3 3   1 2 4 2 5   4 4 1 2 3   2 2 3 1 5   4 2 1 5 2   3 2 4 3 1

Dette ser uoversiktlig ut, og datamaterialet gir lite informasjon slik resultatene er skrevet. Du får i oppgave å hjelpe lærerne med å presentere og analysere resultatet fra prøven.

a) Presenter resultatene i tabellen nedenfor. Pass på at du får med alle 50 resultatene.

X Karakter	**f** Frekvens
Sum	

b) Bestem hvilket poeng du ønsker å få frem, og lag et passende diagram. Lim gjerne diagrammet nederst på siden.

c) Lag en analyse av resultatene. Du velger selv om du vil gjøre det manuelt eller ved hjelp av ExCel. Skriv eller lim gjerne inn analysen nederst på siden.

Oppgave 10

Høsten 2020 har vært preget av fravær knyttet til Covid – 19. Både klasser og programfagsgrupper ble satt i karantene dersom en eller flere elever i klassen/gruppa fikk påvist sykdommen.

Hellerud vgs laget en oversikt over hvor mange ganger hver elev ble satt i karantene. Denne oversikten finner du nedenfor.

X Antall ganger i karantene	**f** Frekvens
0	75
1	225
2	100
3	175
4	25

Lag en presentasjon og en analyse av datamaterialet i tabellen ovenfor.

Presentasjonen skal vise den prosentvise fordelingen av elver over antall ganger de har vært i karantene.

Oppgave 11
I løpet av første termin hadde en klasse gjennomført 3 prøver i matematikk. Læreren hadde registrert følgende karakterer på prøvene:

Karakter	Frekvens første prøve	Frekvens andre prøve	Frekvens tredje prøve
1	0	2	1
2	3	4	4
3	5	7	6
4	8	5	4
5	4	3	4
6	1	0	2

Lag en analyse av de tre prøvene, og kommenter resultatene.

ANALYSE AV DATA I GRUPPER

Noen undersøkelser produserer et datamateriale hvor mange av observasjonene er nesten like, men ikke helt identiske. Dersom vi skal presentere resultater fra slike undersøkelser kan det være hensiktsmessig å samle relativt like observasjoner i grupper.

I slike grupper må vi spesifisere nederste og øverste verdi, slik at det er tydelig hvilke observasjoner som skal registreres. Vi bruker gjerne formuleringene «fra og med» og «opp til». Husk: en observasjon skal ikke registreres i 2 ulike grupper.

Tenk deg at skolen ønsker å kjøpe skolegenser til alle elevene på skolen, og at disse genserne er tilgjengelig i størrelsene S, M, L og XL. Skolens innkjøpsansvarlig antar at størrelsene avgjøres av høyden til elevene, og sendte følgende bestillingsskjema:

X Høyde i cm	Størrelse	**f** frekvens
[140 – 150>	S	
[150 – 165>	M	
[165 – 184>	L	
[184 – 200>	XL	

Lærerne for påbygg registrerte følgende høyder på elevene sine, målt i hele cm og ordnet i stigende rekkefølge:

142, 144, 144, 147, 148, 148, 150, 151, 151, 153, 154, 156, 156, 156, 156, 157, 157, 159, 159, 159, 160, 161, 163, 163, 164, 164, 165, 165, 165, 166, 166, 167, 167, 167, 168, 168, 169, 169, 170, 170, 170, 171, 171, 172, 172, 172, 173, 173, 173, 173, 174, 175, 175, 176, 177, 178, 178, 179, 179, 179, 180, 180, 180, 181, 181, 181, 182, 182, 184, 184, 184, 185, 185, 186, 186, 187, 187, 188, 189

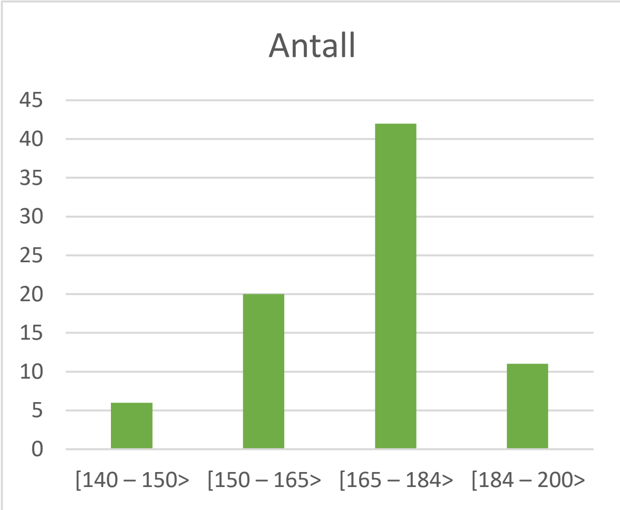
Spørsmål til diskusjon: i hvilken gruppe skal personer som måler 150, 165 og 184 plasseres?

Spørsmål til diskusjon: hvordan ville et søylediagram laget av datamaterialet ovenfor sett ut?

Kan du fullføre bestillingen til lærerne for påbygg?

Lærerne fra påbygg returnerte følgende bestilling:

X Høyde i cm	Størrelse	**f** frekvens
[140 – 150>	S	6
[150 – 165>	M	20
[165 – 184>	L	42
[184 – 200>	XL	11



Da innkjøpsansvarlig mottok bestillingen kom det et ønske om å finne gjennomsnittshøyden og medianhøyden til elevene på påbygg. Innkjøpsansvarlig har ikke informasjon om høyden til hver enkelt elev, og denne analysen må gjøres på bakgrunn av datamaterialet presentert i tabellen ovenfor.

Gjennomsnitt i et gruppert materiale
På side 35 viste vi hvordan vi kunne finne «sum data» i et kategorisert datamateriale, ved å multiplisere verdien av kategorien med frekvensen.

Når informasjonen er presentert i et gruppert materiale vet vi kun hvor mange elever som er registrert i hver gruppe, men vi har ingen mulighet til å finne informasjon om hver enkelt elevs høyde. Dermed må vi anta at elevenes høyde fordeler seg slik innenfor en gruppe at vi kan tillegge alle elevene i den gruppa en høyde som er midt i gruppa. Dette kalles gruppas midtpunkt.

Det er registrert 6 elever i gruppa [140 – 150>. Når vi skal regne den samlete høyden til disse 6 elevene antar vi at alle 6 elevene er 145 cm høye, fordi 145 cm er midt mellom 140 cm og 150 cm. Tilsvarende gjelder for de andre gruppene.

Deretter blir regningen identisk med regningen på side 35. Vi har valgt å utføre regningen ved hjelp av ExCel:

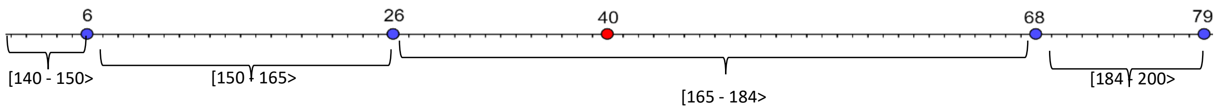
	A	B	C	D	E
1	Høyde		**Xm**	**f**	
2	Fra og med	Opp til	Midtpunkt	Frekvens	**Xm · f**
3	140	150	145	6	870
4	150	165	157,5	20	3150
5	165	184	174,5	42	7329
6	184	200	192	11	2112
7			Sum	79	13461
8					
9	Gjennomsnitt	170			

	A	B	C	D	E
1	Høyde		**Xm**	**f**	
2	Fra og med	Opp til	Midtpunkt	Frekvens	**Xm · f**
3	140	150	=(A3+B3)/2	6	=C3*D3
4	150	165	=(A4+B4)/2	20	=C4*D4
5	165	184	=(A5+B5)/2	42	=C5*D5
6	184	200	=(A6+B6)/2	11	=C6*D6
7			Sum	=SUMMER(D3:D6)	=SUMMER(E3:E6)
8					
9	Gjennomsnitt	=E7/D7			

Spørsmål til diskusjon: hvorfor har vi brukt parenteser i utregningen i kolonne C?

Median i et gruppert materiale
Informasjonen i tabellen forteller at det er 79 elever på vg2. Medianhøyden er høyden til elev nummer 40 i ordnet rekkefølge.

Steg 1 – i hvilken gruppe finner vi medianhøyden?
Ved å bruke kumulativ frekvens finner vi at elev nummer 40 er i gruppen med høyde [165 – 184>. Dette kan også visualiseres ved en tallinje. Tallene skrevet med blått markerer høyeste elev i hver gruppe. Tallet skrevet med rødt markerer eleven med medianhøyden.



Steg 2 – hvor i gruppa finner vi medianhøyden?
For å kunne si noe mer spesifikt om medianhøyden må vi gjøre en antakelse. Vi må anta at høyden til elevene er fordelt jevnt utover gruppa. Tallinjen ovenfor viser at medianhøyden sannsynligvis finnes i gruppas nedre halvdel, og nærmere 165 cm enn 184 cm.

Steg 3 – kan vi anslå en tilnærmet verdi?
Gruppa hvor vi finner medianen har en bredde på 19 cm. Antall elever som fikk registrert høyden sin i denne gruppa er 42. Medianens nummer i gruppa er 14.
Vi antar at elevenes høyde er jevnt fordelt utover gruppa. I vårt tilfelle betyr det at gruppebreddens 19 cm fordeles jevnt over høyden til de 42 elevene som ble registrert i gruppa. Det betyr at vi tenker at hver elev er 0,45 cm høyere enn forrige elev.

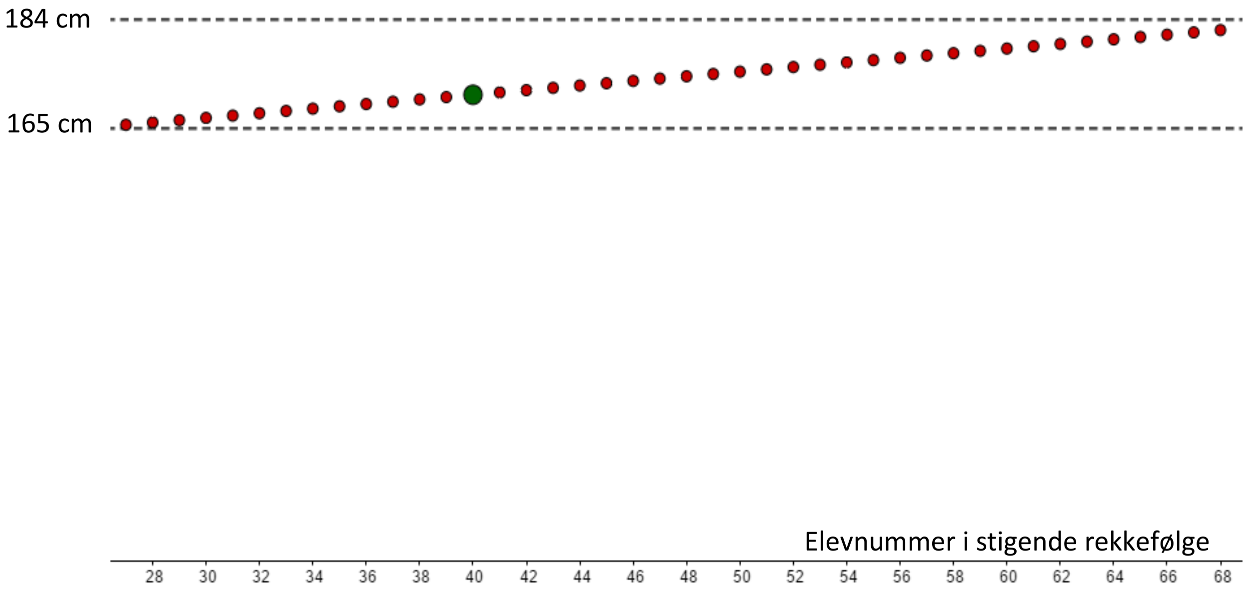
Gruppens nedre grense er 165 cm. I og med at medianhøyden er nummer 14 i denne gruppa, betyr det at høyden har vokst med 0,45 cm fjorten ganger fra 165 cm. Vi kan dermed utføre følgende regnestykke:

165 cm + 0,45 cm · 14 = 165 cm + 6,3 cm = 171 cm.

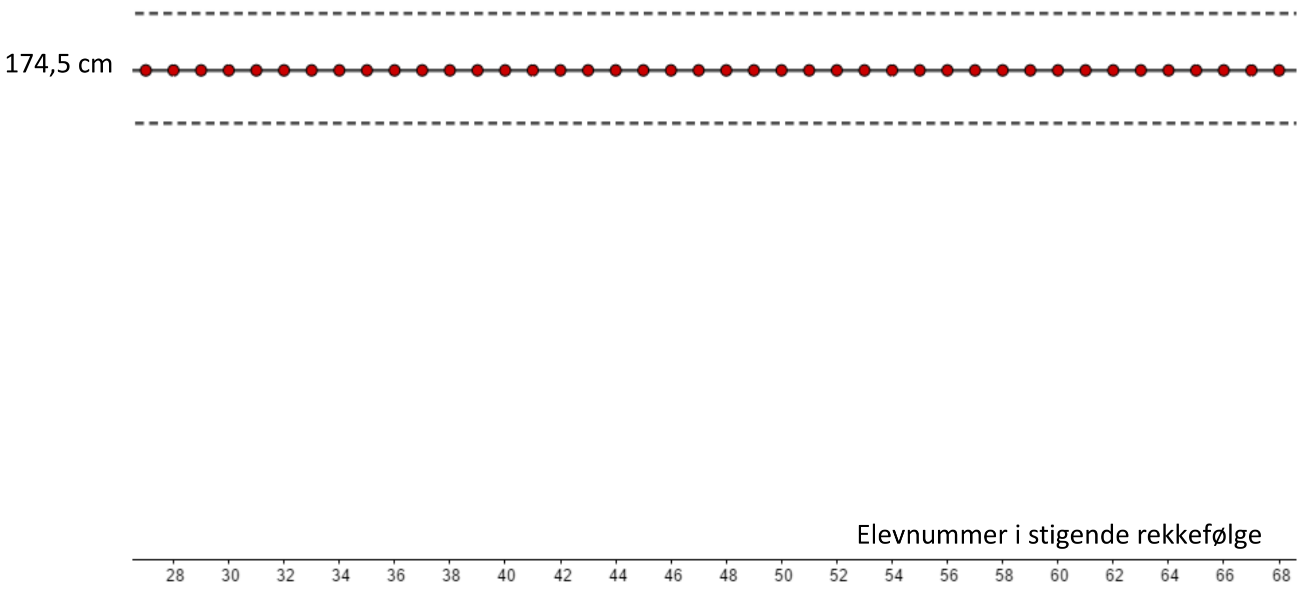
Generelt kan du regne ut medianen i gruppert materiale slik:

Median = $nedre\ grense + \frac{gruppebredden}{antall\ observasjoner\ i\ gruppa} \cdot medianens\ nummer\ i\ gruppa$

Visualisering av fordeling av høyder i gruppa [165 – 184>, median:
Ved å kun studere tabellen på side 41 har vi ingen mulighet til å vite høyden til hver enkelt elev. Vi antar dermed at høyden til den laveste eleven er 165 cm og at høyden til de andre elevene vokser jevnt opp mot 184 cm. De 42 elevene med høyde registrert i denne gruppa kan dermed visualiseres slik, hvor høyden på hver enkelt elev er markert med et rødt punkt:



Visualisering av fordeling av høyder i gruppa [165 – 184>, gjennomsnitt:
Ved å kun studere tabellen på side 41 har vi ingen mulighet til å vite høyden til hver enkelt elev. Vi antar dermed at høyden til alle elevene i denne gruppa er identisk med gruppas midtpunkt. Dette kan visualiseres slik:



‘

Oppgave 12

I oppgave 10 viste vi en oversikt over hvor mange ganger hver enkelt elev på Hellerud måtte være i karantene. Nedenfor finner du en oversikt over hvor mange dager hver enkelt elev har vært i karantene.

X Antall dager i karantene	**f** Frekvens
[0 – 5>	75
[5 – 10>	235
[10 – 20>	100
[20 – 30>	150
[30 – 35>	25

Lag en presentasjon og en analyse av datamaterialet. Du velger selv hvilket diagram du ønsker å bruke. I analysen skal du presentere relevante sentralmål.

Oppgave 13

Tabellen nedenfor viser gruppering av årsinntekt for lønnsmottakere i en tenkt kommune i Norge. Inntekten er oppgitt i antall 1 000 kroner.

Inntekt	**Frekvens**
[0, 100>	467
[100, 200>	678
[200, 300>	1490
[300, 400>	2653
[400, 500>	3785
[500, 750>	4106
[750, 1000>	987
[1000, 5000>	45

Finn gjennomsnittslønnen og medianlønnen for lønnsmottakere i denne kommunen.

Histogram

Når vi skal presentere resultatene fra et klassedelt materiale i et diagram, bruker vi histogram. Histogram ser ut som et søylediagram hvor søylen er tegnet inntil hverandre. Imidlertid er det størrelsen (arealet) på søylen som viser antall observasjoner (og ikke høyden, som ved et søylediagram). Vi må derfor regne ut både **klassebredden** og **søylehøyden**.

Klassebredden er forskjellen mellom nedre og øvre grense i klassen. **Søylehøyden** regner vi ved å dividere **frekvens** på **klassebredde**.

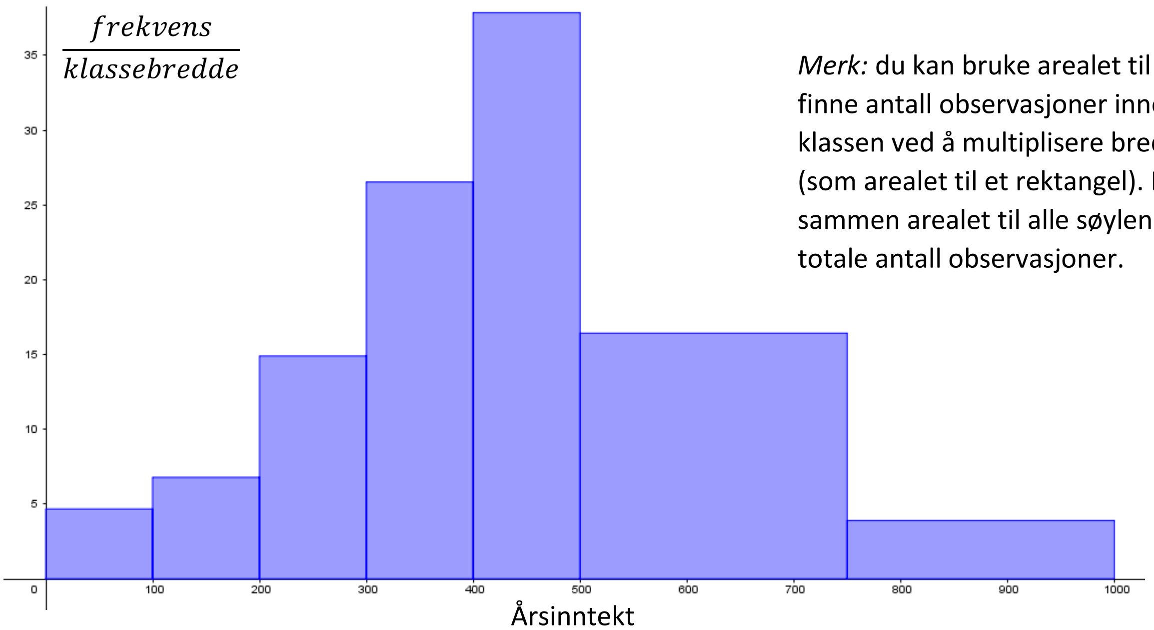
$$\frac{frekvens}{klassebredde} = søylehøyde$$

Eksempel:

Fremstill resultatene fra undersøkelsen om årsinntekt i et histogram.

Inntekt	Frekvens	Klassebredde	Søylehøyde
[0, 100>	467	100	4,67
[100, 200>	678	100	6,78
[200, 300>	1490	100	14,9
[300, 400>	2653	100	26,53
[400, 500>	3785	100	37,85
[500, 750>	4106	250	16,43
[750, 1000>	987	250	3,9

Resultatet blir da slik:



Merk: du kan bruke arealet til en søyle for å finne antall observasjoner innenfor den klassen ved å multiplisere bredden og høyden (som arealet til et rektangel). Legger du sammen arealet til alle søylene finner du det totale antall observasjoner.

En eksamensoppgave (del 1)

Lise har hentet inn informasjon om høyden på husene i området der hun bor.

Høyde (meter)	Antall hus
$[3,5\rangle$	2
$[5,7\rangle$	8
$[7,9\rangle$	10
$[9,13\rangle$	8

a) Bestem gjennomsnittshøyden på husene i området der Lise bor.

b) Framstill datamaterialet i et histogram.

En eksamensoppgave (del 1)

Tabellen nedenfor viser en oversikt over høydene til elevene ved en skole.

Høyde i cm	Frekvens
$[150,160\rangle$	10
$[160,170\rangle$	30
$[170,180\rangle$	50
$[180,200\rangle$	10

a) Bestem gjennomsnittshøyden til elevene ved skolen.

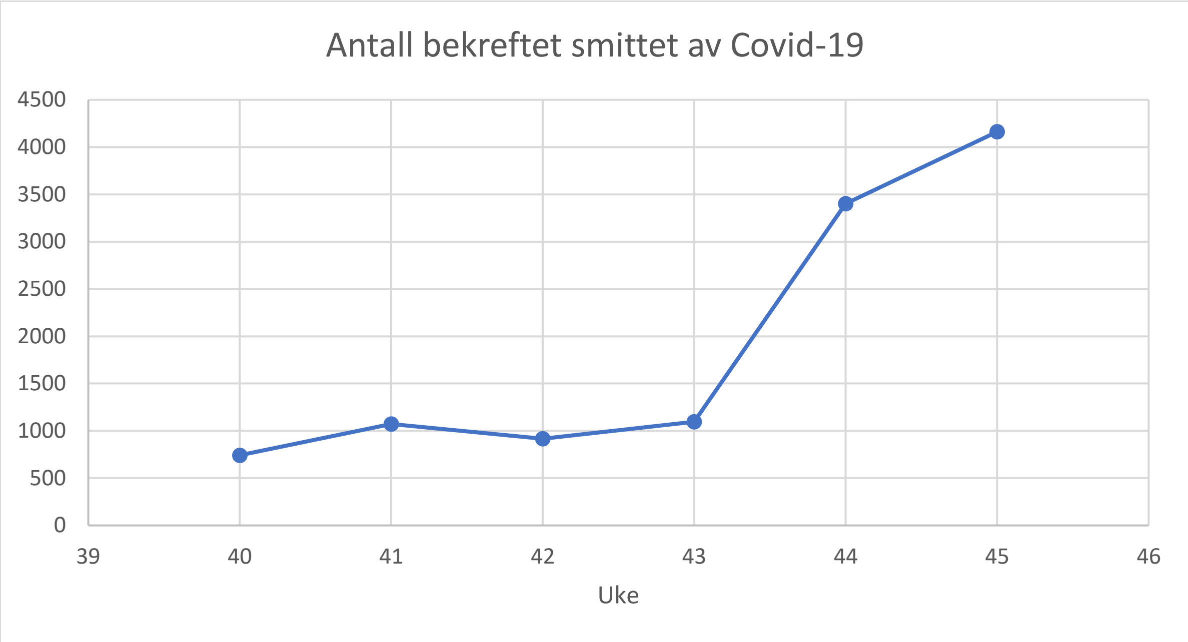
b) Lag et histogram som viser fordelingen av høydene.

Fasit presentasjon og analyse

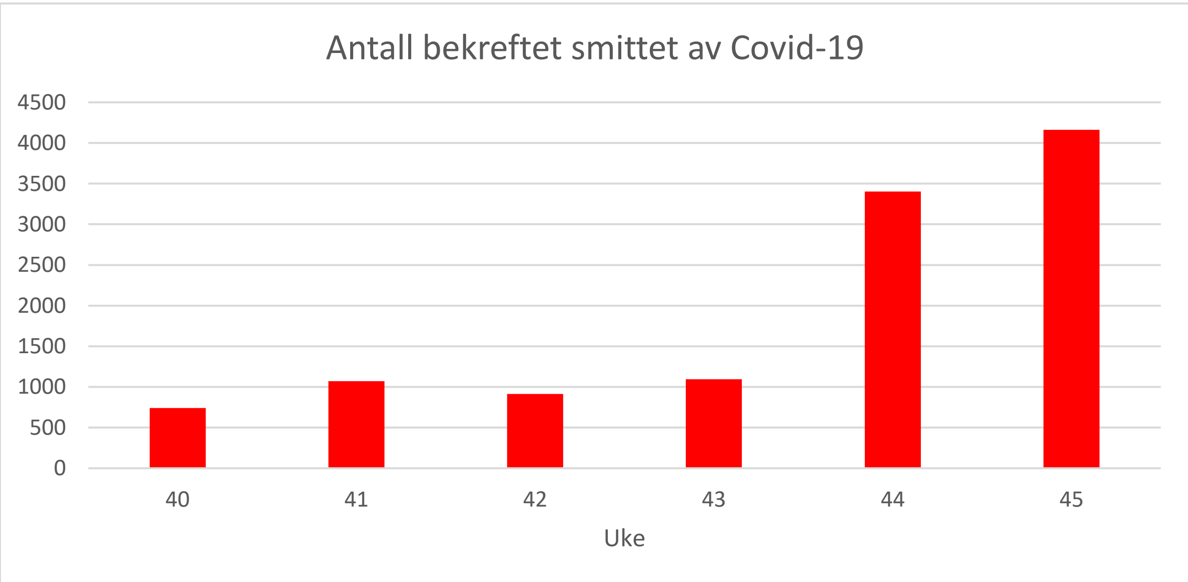
Oppgave 1

a)

Dersom man ønsker å vise utvikling i smitte disse ukene:



Dersom man ønsker å vise antall smitte disse ukene:

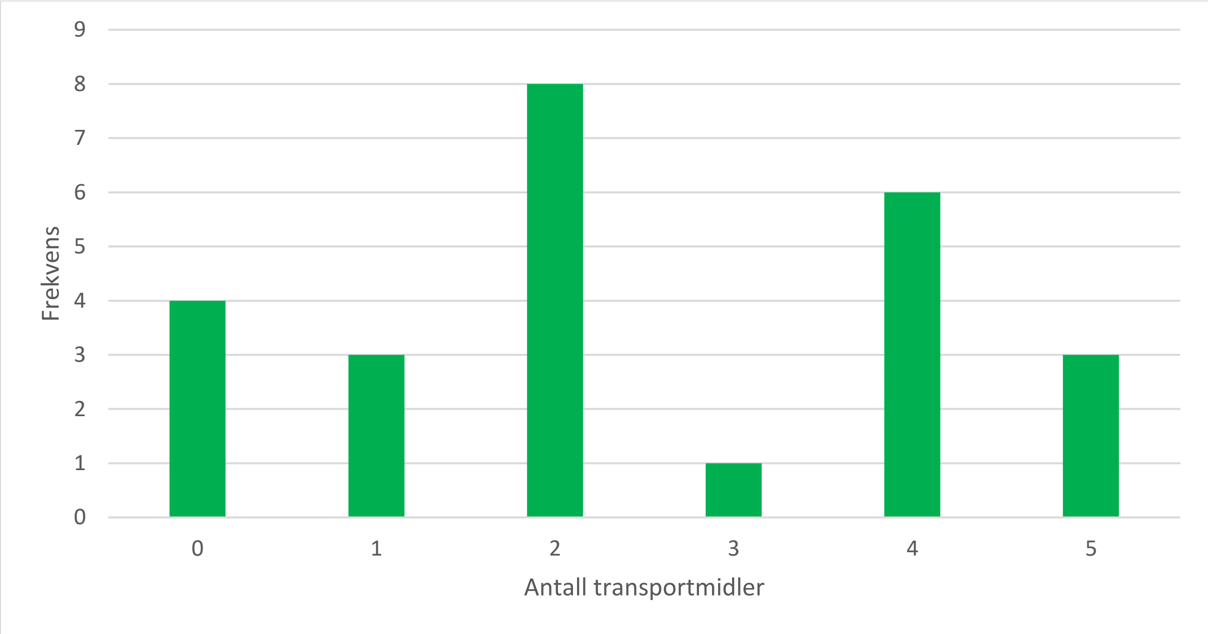


b) Det passer ikke med et sektordiagram fordi datamaterialet kun gir informasjon om antall smittete i enkelte uker

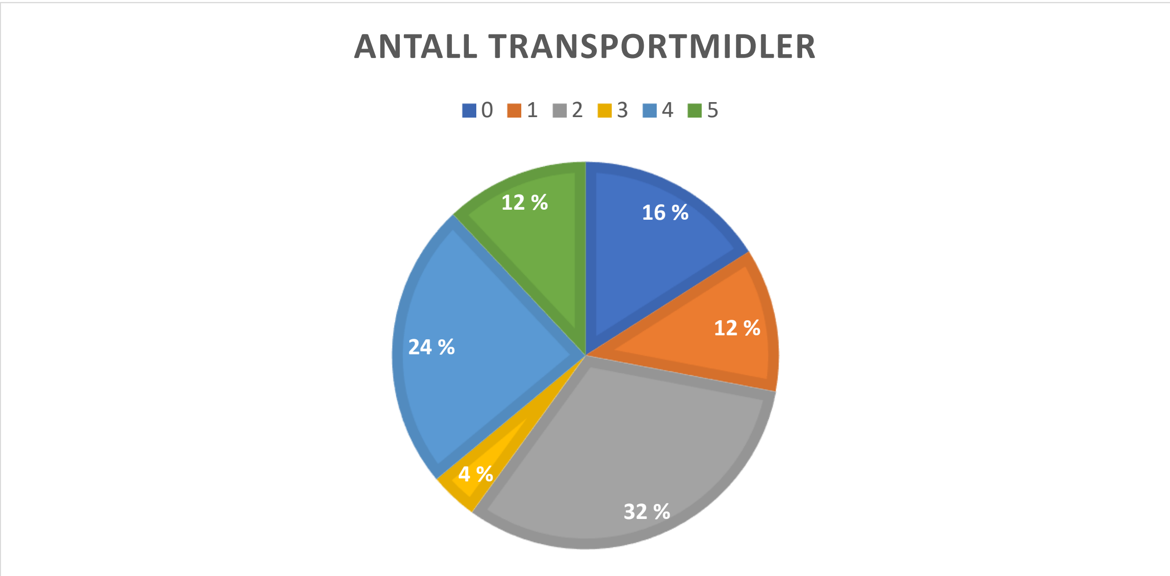
Oppgave 2

a)

Dersom man ønsker å frekvensen til antall transportmidler:

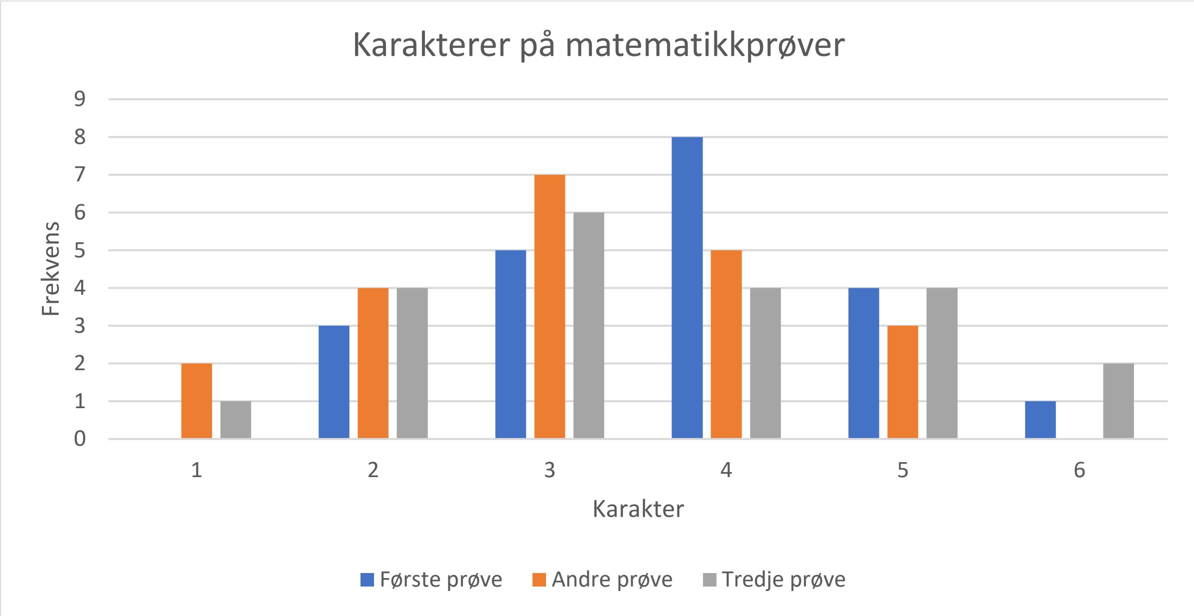


Dersom man ønsker å vise fordelingen i bruk av antall transportmidler:



b) Det passer ikke med et linjediagram fordi datamaterialet ikke viser utvikling over tid.

Oppgave 3



Oppgave 4

a) Det er to karakterer i midten (3 og 4). Medianen blir da 3,5.

b) Denne eleven fikk flest 3-ere.

c) Gjennomsnittskarakteren er 3,7.

d) Eleven fikk karakteren 5 på omtrent 17 % av prøvenen.

e) Den beste prøven var 4 karakterer bedre enn den dårligste.

Oppgave 5

a) Den som brukte mest penger brukte 85 kroner mer enn den som brukte minst.

b) I gjennomsnitt brukte elevene omtrent 68 kroner.

c) Midtpunktet til datamaterialet er 62,50 kroner.

d) 37,5 % av elevene brukte mer enn gjennomsnittet, mens 62,5 % av de spurte brukte mindre enn gjennomsnittet.

Oppgave 6

I gjennomsnitt ble det registrert 1 898 nye smittetilfeller hver uke i perioden.
Median for antall smittede per uke i perioden er 1 084.
Uka med flest smittede registrerte 3 420 flere smittede enn uka med færrest smittede.

Eksamensoppgaver, side 29

Sorterer tallene i stigende rekkefølge:

0 0 0 0 4 13 15 17 20 26

Median: $\frac{4+13}{2}=\frac{17}{2}=8{,}5$

Gjennomsnitt: $\frac{0+0+0+0+4+13+15+17+20+26}{10}=\frac{95}{10}=9{,}5$

Typetall: Tallet 0 forekommer flest ganger i

Variasjonsbredde: $26-0=26$

<u>Medianen er 8,5, gjennomsnittet er 9,5, typetallet er 0 og variasjonsbredden er 26.</u>

a)

Rangerer tallene i stigende rekkefølge:

7 10 10 12 12 18 20 20 33 38

Medianen er gjennomsnittet av de to midterste tallene: $\frac{12+18}{2}=\frac{30}{2}=15$

Gjennomsnitt: $\frac{7+10+10+12+12+18+20+20+33+38}{10}=\frac{180}{10}=18$

Medianen er 15 og gjennomsnittet er 18 for antall bilder som passerte i løpet av en periode med grønt lys.

b)

Hvis vi ser på den sorterte listen i a), ser vi at 18 er det sjette tallet. Det betyr at den kumulative frekvensen for 18 passerte biler er 6. Det forteller oss at det passerte 18 eller færre biler i løpet av en periode med grønt lys i 6 av observasjonene.

c)

Dersom tiden med grønt lys var kortet ned med 10 %, antar jeg at medianen og gjennomsnittet også ville synke med 10 %.

Ny median: $15-\frac{10\cdot 15}{100}=15-1,5=13,5$ passerte biler i løpet av en periode med grønt lys.

Oppgave 7

	A	B
1	Uke	Smittede
2	40	742
3	41	1072
4	42	915
5	43	1096
6	44	3402
7	45	4162
8	Sum	11389
9		
10	Gjennomsnitt	1898
11	Median	1084
12	Typetall	#I/T
13	Variasjonsbredde	3420
14	Standardavvik	1355

	A	B
1	Uke	Smittede
2	40	742
3	41	1072
4	42	915
5	43	1096
6	44	3402
7	45	4162
8	Sum	=SUMMER(B2:B7)
9		
10	Gjennomsnitt	=GJENNOMSNITT(B2:B7)
11	Median	=MEDIAN(B2:B7)
12	Typetall	=MODUS(B2:B7)
13	Variasjonsbredde	=MAKSA(B2:B7)-MIN(B2:B7)
14	Standardavvik	=STDAV.P(B2:B7)

Eksamensoppgave, side 32

a) Legger inn alle innbyggertallene i regnearket i GeoGebra, velger analyse av variabel og "vis statistikk".

	A
1	11968000
2	8919000
3	8894000
4	8550000
5	7862000
6	6477000
7	5507000
8	3972000
9	3290000
10	3054000
11	2921000
12	2914000
13	2826000
14	2721000

Statistikk

n	14
Gjennomsnitt	5705357.1429
σ	2948402.6573
s	3059702.037
Σx	79875000
Σx^2	577418497000000
Min	2721000
Q1	2921000
Median	4739500
Q3	8550000
Maks	11968000

Regner ut variasjonsbredden: $11968000 - 2721000 = 9247000$

Gjennomsnittet er 5 705 357 innbyggere, medianen er 4 739 500, variasjonsbredden er 9 247 000 og standardavviket er 2 948 403.

b) Både gjennomsnitt og median er lavere for de europeiske byene, så de 14 største byene i Europa har færre innbyggere til sammen enn de 14 største i Sør- og Nord-Amerika. Samtidig ser vi at standardavviket og variasjonsbredden er større for de europeiske byene, sammenlignet med byene i Sør- og Nord-Amerika, noe som indikerer at det er større variasjon i innbyggertallene til de europeiske byene. Variasjonsbredden forteller at den største byen i Europa har flere innbyggere enn den største byen i Sør- og Nord-Amerika.

c) Gjennomsnittet for de 14 største byene i Europa, inkludert Istanbul, er 4 808 000. Det betyr at det totale antallet innbyggere i de 14 byene er

$4808000 \cdot 14 = 67312000$

Trekker fra innbyggertallet i Istanbul, og deler på 13.

$$\frac{67312000 - 15519000}{13} = 3984076{,}923 \approx 3984077$$

Gjennomsnittet for de 13 største byene i Europa, når vi ser bort fra Istanbul, er 3 984 077 innbyggere.

Eksamensoppgave, side 33

Bruker Excel.

	A	B	C
1	**Snødybde (cm) på julaften**		
2	**År**	**Oslo**	**Kautokeino**
3	2009	15	44
4	2010	13	38
5	2011	0	31
6	2012	12	49
7	2013	0	53
8	2014	5	36
9	2015	0	44
10	2016	0	38
11	2017	5	48
12	2018	10	20
13	2019	0	50
14	**Gjennomsnitt**	**5,45**	**41,00**
15	**Std.av.**	**5,73**	**9,24**

	A	B	C
1	**Snødybde (cm) på julaften**		
2	**År**	**Oslo**	**Kautokeino**
3	2009	15	44
4	2010	13	38
5	2011	0	31
6	2012	12	49
7	2013	0	53
8	2014	5	36
9	2015	0	44
10	2016	0	38
11	2017	5	48
12	2018	10	20
13	2019	0	50
14	**Gjennomsnitt**	**=GJENNOMSNITT(B3:B13)**	**=GJENNOMSNITT(C3:C13)**
15	**Std.av.**	**=STDAV.P(B3:B13)**	**=STDAV.P(C3:C13)**

Gjennomsnittlig snødybde på julaften i Oslo de 11 siste årene er 5,45 cm. Standardavviket er 5,73 cm.

Gjennomsnittlig snødybde på julaften i Kautokeino de 11 siste årene er 41 cm. Standardavviket er 9,24 cm.

b)

Påstanden er ikke riktig. Standardavviket sier noe om spredningen i tallmaterialet. Vi kan ha et datamateriale med høyt gjennomsnitt, men med mange tilnærmet like verdier; da vil standardavviket være lite selv om gjennomsnittet er høyt. Omvendt kan det være et datamateriale med mange veldig forskjellige verdier, som gir et høyt standardavvik uavhengig av gjennomsnittet.

Oppgave 8

	A	B
1	Uke	Antall bekreftet smittet av Covid-19
2	40	742
3	41	1 072
4	42	915
5	43	1 096
6	44	3 402
7	45	4 162
8		
9	Gjennomsnitt	1898
10	Median	1084
11	Variasjonsbredde	3 420

9	Gjennomsnitt	=GJENNOMSNITT(B2:B7)
10	Median	=MEDIAN(B2:B7)
11	Variasjonsbredde	=MAKSA(B2:B7)-MIN(B2:B7)

Eksamensoppgave, side 36

a)

Det var 15 elever som fikk en eller to, av totalt 60 elever. Det utgjør:

$\frac{15}{60} \cdot 100\% = 25\%$

b)

Medianelevene er elev nr. 30 og 31. Begge disse ligger i gruppen som fikk karakter 3, derfor er median = 3.

c)

Multipliserer respektive karakterer med tilsvarende antall elever, summerer og deler på 60:

$$\frac{3+24+75+48+30+12}{60} = \frac{192}{60} = 3,2$$

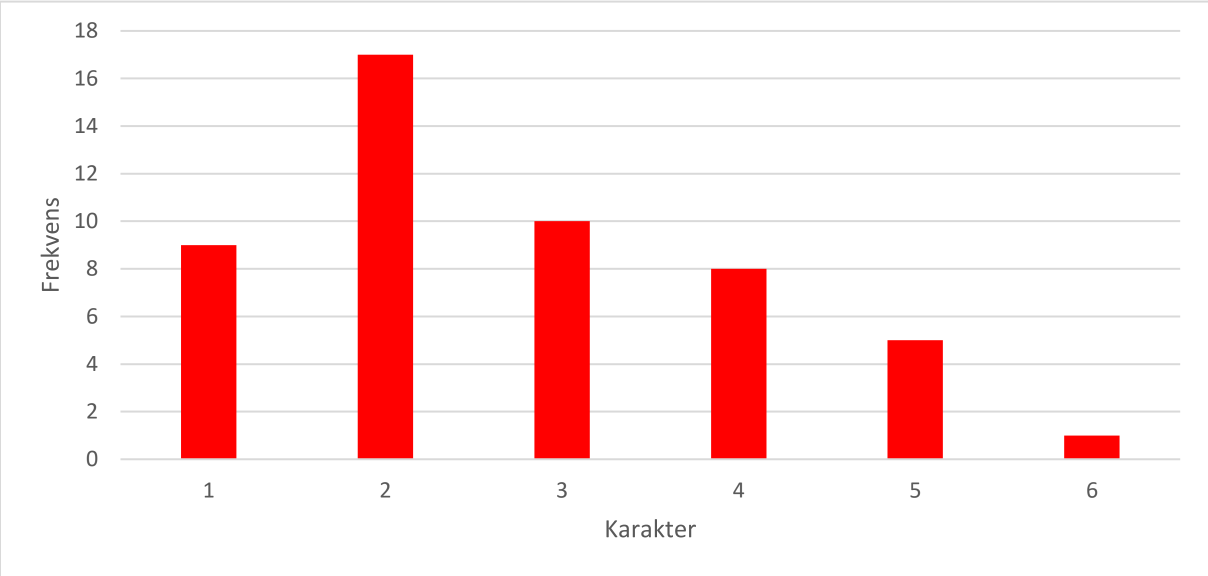
Oppgave 9

a)

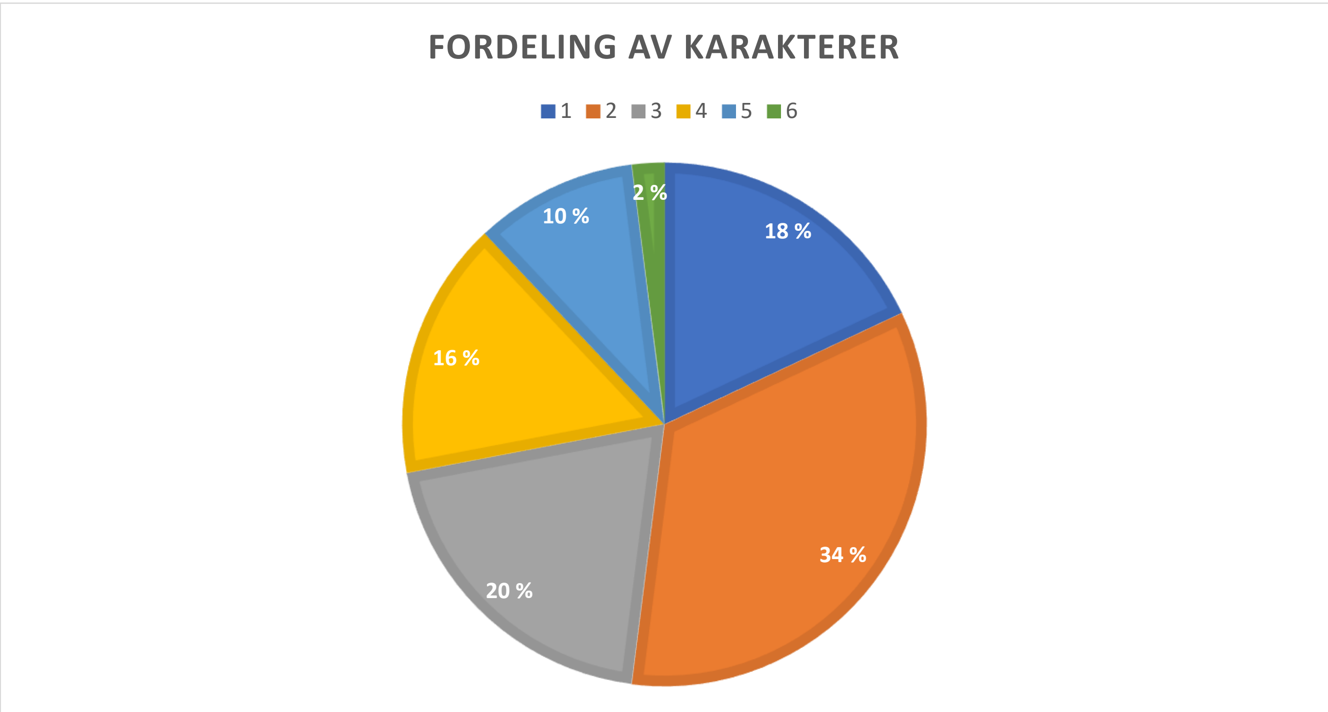
X Karakter	f Frekvens
1	9
2	17
3	10
4	8
5	5
6	1
Sum	50

b) Presentasjon av resultatet:

Antall:



Prosentvis fordeling av karakterer:



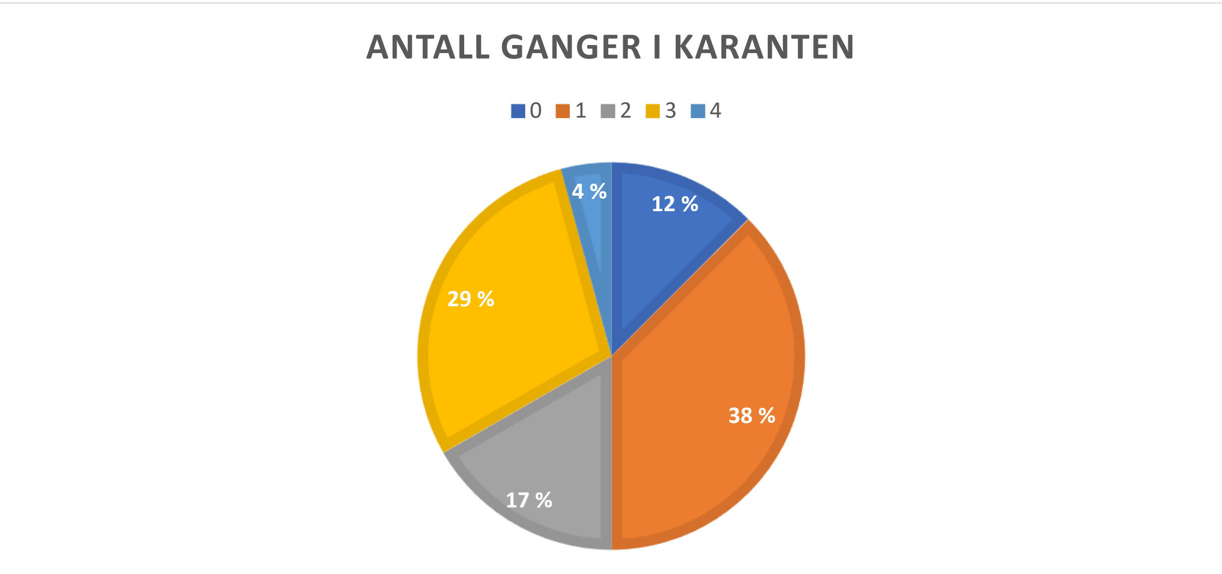
c) Analyse i ExCel:

	A	B	C	D
1	**X**	**f**	Kumulativ	
2	Karakter	Frekvens	frekvens	**X · f**
3	**1**	9	9	9
4	**2**	17	26	34
5	**3**	10	36	30
6	**4**	8	44	32
7	**5**	5	49	25
8	**6**	1	50	6
9	Sum	50		136
10				
11	Gjennomsnitt	2,7		
12	Median	2		
13	Typetall	2		
14	Variasjonsbredde	5		

	A	B	C	D
1	**X**	**f**		
2	Karakter	Frekvens	Kumulativ frekvens	**X · f**
3	**1**	9	=B3	=A3*B3
4	**2**	17	=C3+B4	=A4*B4
5	**3**	10	=C4+B5	=A5*B5
6	**4**	8	=C5+B6	=A6*B6
7	**5**	5	=C6+B7	=A7*B7
8	**6**	1	=C7+B8	=A8*B8
9	Sum	=SUMMER(B3:B8)		=SUMMER(D3:D8)
10				
11	Gjennomsnitt	=D9/B9		
12	Median	=A4		
13	Typetall	=A4		
14	Variasjonsbredde	=A8-A3		

Oppgave 10

a) Prosentvis fordeling av antall ganger i karantene:



b) Analyse av antall ganger i karantene:

	A	B	C	D
1	X	f		
2	Antall ganger i karantene	Frekvens	Kumulativ frekvens	X · f
3	0	75	75	0
4	1	225	300	225
5	2	100	400	200
6	3	175	575	525
7	4	25	600	100
8	Sum	600		1050
9				
10	Gjennomsnitt	1,8		
11	Median	2,5		
12	Typetall	1		
13	Variasjonsbredde	4		

	A	B	C	D
1	X	f		
2	Antall ganger i karantene	Frekvens	Kumulativ frekvens	X · f
3	0	75	=B3	=A3*B3
4	1	225	=C3+B4	=A4*B4
5	2	100	=C4+B5	=A5*B5
6	3	175	=C5+B6	=A6*B6
7	4	25	=C6+B7	=A7*B7
8	Sum	=SUMMER(B3:B7)		=SUMMER(D3:D7)
9				
10	Gjennomsnitt	=D8/B8		
11	Median	=(A5+A6)/2		
12	Typetall	=A4		
13	Variasjonsbredde	=A7-A3		

Oppgave 11

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		Første prøve			Andre prøve			Tredje prøve		
2	Karakter	Frekvens	Kumulativ frekvens	X · f	Frekvens	Kumulativ frekvenes	X · f	Frekvens	Kumulativ frekvens	X · f
3	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1
4	2	3	3	6	4	6	8	4	5	8
5	3	5	8	15	7	13	21	6	11	18
6	4	8	16	32	5	18	20	4	15	16
7	5	4	20	20	3	21	15	4	19	20
8	6	1	21	6	0	21	0	2	21	12
9	Sum	21		79	21		66	21		75
10										
11	Gjennomsnitt		3,8			3,1			3,6	
12	Median		4			3			3	
13	Typetall		4			3			3	
14	Variasjonsbredde		4			4			5	

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		Første prøve			Andre prøve			Tredje prøve		
2	Karakter	Frekvens	Kumulativ frekvens	X · f	Frekvens	Kumulativ frekvenes	X · f	Frekvens	Kumulativ frekvens	X · f
3	1	0	=B3	=A3*B3	2	=E3	=A3*E3	1	=H3	=A3*H3
4	2	3	=C3+B4	=A4*B4	4	=F3+E4	=A4*E4	4	=I3+H4	=A4*H4
5	3	5	=C4+B5	=A5*B5	7	=F4+E5	=A5*E5	6	=I4+H5	=A5*H5
6	4	8	=C5+B6	=A6*B6	5	=F5+E6	=A6*E6	4	=I5+H6	=A6*H6
7	5	4	=C6+B7	=A7*B7	3	=F6+E7	=A7*E7	4	=I6+H7	=A7*H7
8	6	1	=C7+B8	=A8*B8	0	=F7+E8	=A8*E8	2	=I7+H8	=A8*H8
9	Sum	=SUMMER(B3:B8)		=SUMMER(D3:D8)	=SUMMER(E3:E8)		=SUMMER(G3:G8)	=SUMMER(H3:H8)		=SUMMER(J3:J8)
10										
11	Gjennomsnitt		=D9/B9			=G9/E9			=J9/H9	
12	Median		=A6			=A5			=A5	
13	Typetall		=A6			=A5			=A5	
14	Variasjonsbredde		=A8-A4			=A7-A3			=A8-A3	

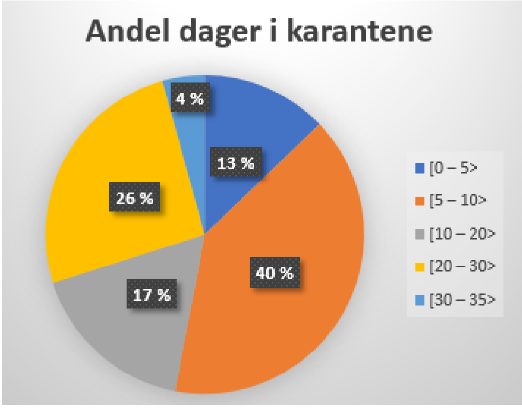
Kommentar:

- Vi kan se at elevene har best resultater på den første prøven, og lavest resultater på prøve nummer 2.
- Det er mest variasjon i resultatene på den tredje prøven.
- Medianen og typetallet er likt for alle prøvene
- Gjennomsnittet skiller seg mest ut fra de andre sentralmålene for prøve nummer 3.

Oppgave 12

Antall registrerte i hver gruppe

Prosentvis fordeling av dager i karantene



	A	B	C	D	E	F
1	X		f			
2	Antall dager i karantene		Frekvens	Xm	Xm · f	Kumulativ frekvens
3	F.o.m	til				
4	0	5	75	2,5	187,5	75
5	5	10	235	7,5	1762,5	310
6	10	20	100	15	1500	410
7	20	30	150	25	3750	560
8	30	35	25	32,5	812,5	585
9		Sum	585		8012,5	
10						
11	Gjennomsnitt	14				
12	Median					
13	Steg 1	Er i gruppe [5 - 10>				
14	Steg 2	Er sannsynligvis høyt i gruppe [5 - 10>				
15	Steg 3	9,8				

	A	B	C	D	E	F
1	X		f			
2	Antall dager i karantene		Frekvens	Xm	Xm · f	Kumulativ frekvens
3	F.o.m	til				
4	0	5	75	=(A4+B4)/2	=D4*C4	=C4
5	5	10	235	=(A5+B5)/2	=D5*C5	=F4+C5
6	10	20	100	=(A6+B6)/2	=D6*C6	=F5+C6
7	20	30	150	=(A7+B7)/2	=D7*C7	=F6+C7
8	30	35	25	=(A8+B8)/2	=D8*C8	=F7+C8
9		Sum	=SUMMER(C4:C8)		=SUMMER(E4:E8)	
10						
11	Gjennomsnitt	=E9/C9				
12	Median					
13	Steg 1	Er i gruppe [5 - 1				
14	Steg 2	Er sannsynligvis				
15	Steg 3	=A5+(5/C5*225)				

Oppgave 13

	A	B	C	D	E	F
1	X		f			
2	Inntekt		Frekvens	Xm	Xm · f	Kumulativ frekvens
3	F.o.m	til				
4	0	100	467	50	23350	467
5	100	200	678	150	101700	1145
6	200	300	1490	250	372500	2635
7	300	400	2653	350	928550	5288
8	400	500	3785	450	1703250	9073
9	500	750	4106	625	2566250	13179
10	750	1000	987	875	863625	14166
11	1000	5000	45	3000	135000	14211
12		Sum	14211		6694225	
13						
14	Gjennomsnitt	471				
15	Median	Person nummer 7 106				
16	Steg 1	Er i gruppe [400 - 500>				
17	Steg 2	Er omtrent midt i gruppe [400 - 500]				
18	Steg 3	448				

	A	B	C	D	E	F
1	X		f			
2	Inntekt		Frekvens	Xm	Xm · f	Kumulativ frekvens
3	F.o.m	til				
4	0	100	467	=(A4+B4)/2	=D4*C4	=C4
5	100	200	678	=(A5+B5)/2	=D5*C5	=F4+C5
6	200	300	1490	=(A6+B6)/2	=D6*C6	=F5+C6
7	300	400	2653	=(A7+B7)/2	=D7*C7	=F6+C7
8	400	500	3785	=(A8+B8)/2	=D8*C8	=F7+C8
9	500	750	4106	=(A9+B9)/2	=D9*C9	=F8+C9
10	750	1000	987	=(A10+B10)/2	=D10*C10	=F9+C10
11	1000	5000	45	=(A11+B11)/2	=D11*C11	=F10+C11
12		Sum	=SUMMER(C4:C11)		=SUMMER(E4:E11)	
13						
14	Gjennomsnitt	=E12/C12				
15	Median	Person nummer 7 1				
16	Steg 1	Er i gruppe [400 - 50				
17	Steg 2	Er omtrent midt i gr				
18	Steg 3	=A8+(100/C8*1818)				

Eksamensoppgaver, side 46

a)

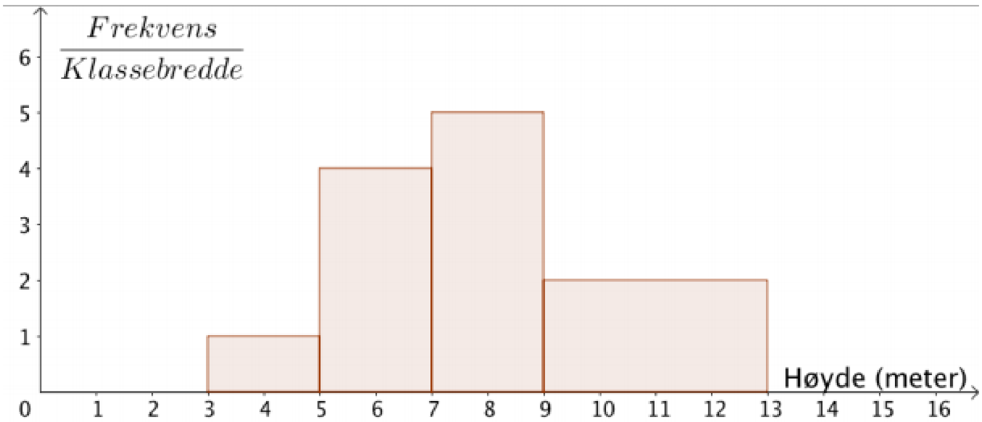
$$\frac{4\cdot 2+6\cdot 8+8\cdot 10+11\cdot 8}{2+8+10+8}=\frac{8+48+80+88}{28}=\frac{224}{28}=\frac{112}{14}=\frac{56}{7}=8$$

Gjennomsnittshøyden på husene i området der Lise bor er 8 meter.

b) Regner ut histogramhøydene, som er gitt ved $\frac{\text{Frekvens}}{\text{Klassebredde}}$

$\frac{2}{2}=1 \quad \frac{8}{2}=4 \quad \frac{10}{2}=5 \quad \frac{8}{4}=2$

Tegner histogrammet:



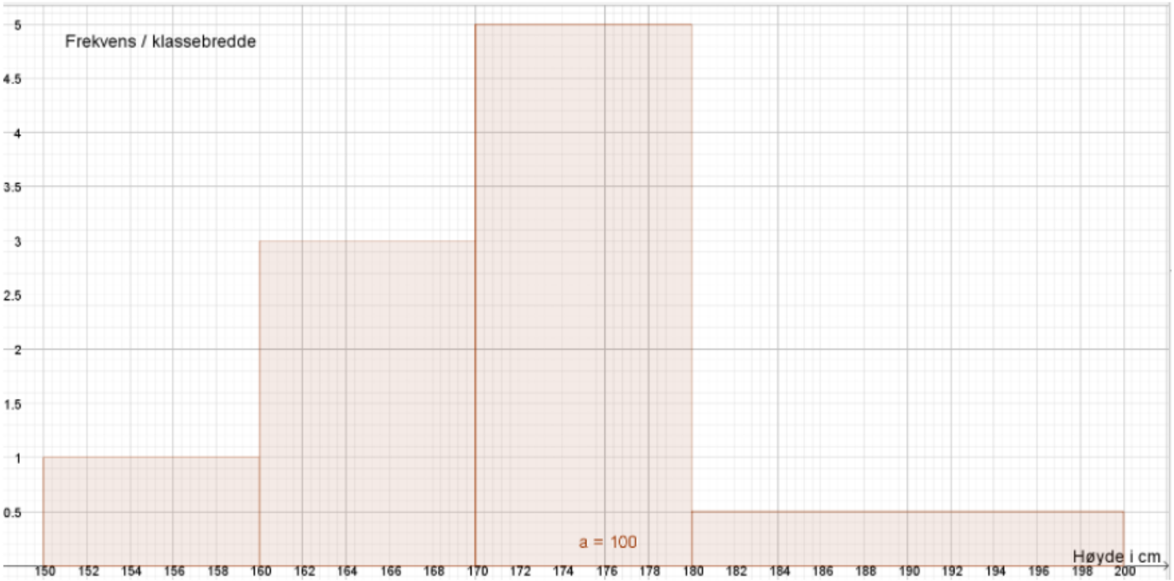
a)

Høyde i cm	Klassemidtpunkt, x_m	Frekvens, f	$f\cdot x_m$
$[150,160\rangle$	155	10	1550
$[160,170\rangle$	165	30	4950
$[170,180\rangle$	175	50	8750
$[180,200\rangle$	190	10	1900
Sum		100	17150

Gjennomsnitt: $\frac{17150}{100}=171,5\,cm$

Gjennomsnittshøyden til elevene ved skolen er 171,5 cm.

Høyde i cm	Klassebredde, b	Frekvens, f	Histogramhøyde, $\frac{f}{b}$
$[150, 160\rangle$	$160 - 150 = 10$	10	$\frac{10}{10} = 1$
$[160, 170\rangle$	$170 - 160 = 10$	30	$\frac{30}{10} = 3$
$[170, 180\rangle$	$180 - 170 = 10$	50	$\frac{50}{10} = 5$
$[180, 200\rangle$	$200 - 180 = 20$	10	$\frac{10}{20} = 0,5$



PS: du må tegne histogrammet for hånd, siden dette er del 1.

	A	B
1	**Uke**	**Antall bekreftet smittet av Covid-19**
2	40	742
3	41	1 072
4	42	915
5	43	1 096
6	44	3 402
7	45	4 162
8		
9	Gjennomsnitt	1898
10	Median	1084
11	Variasjonsbredde	3 420

9	Gjennomsnitt	=GJENNOMSNITT(B2:B7)
10	Median	=MEDIAN(B2:B7)
11	Variasjonsbredde	=MAKSA(B2:B7)-MIN(B2:B7)

Dekadiske enheter

1 000 000 000 000 000
1 000 000 000 000
1 000 000 000
1 000 000
1 000
100
10
0,1
0,01
0,001
0,000 001
0,000 000 001
0,000 000 000 001
0,000 000 000 000 001

Målet for opplæringen er at eleven skal kunne:

- Regne med tall på standardform med positive og negative eksponenter, og bruke dette i praktiske sammenhenger

Tierpotens og tall på standardform

Dersom størrelsen til en mengde enten er veldig stor eller veldig liten kan tallet foran måleenheten bli langt, og kan være vanskelig å både lese og uttale. Skal vi måle lengden til New York eller størrelsen til et atom vil tallet foran meter bli omtrent uleselig. I slike tilfeller bruker vi enten **et prefiks** eller en **tierpotens**.

Et prefiks er ofte et latinsk ord for et tall, mens en **tierpotens** forteller hvor mange nuller en dekadisk enhet inneholder.

Et prefiks eller **en tierpotens** erstatter et bestemt antall nuller slik at tallet blir enklere å forstå.

Dekadisk enhet	Tierpotens	Navn	Prefiks	Forkortes	
1 000 000 000 000	10^{12}	billion	Terra	T	
1 000 000 000	10^{9}	milliard	Giga	mrd.	G
1 000 000	10^{6}	million	Mega	mill.	M
1 000	10^{3}	tusen	kilo	k	
100	10^{2}	hundre	hekto	h	
10	10^{1}	ti	deka	dk	
1	10^{0}				
0,1	10^{-1}	tidel	desi	d	
0,01	10^{-2}	hundredel	centi	c	
0,001	10^{-3}	tusendel	milli	m	
0,000001	10^{-6}	milliondel	mikro	µ	
0,000000001	10^{-9}	milliarddel	nano	n	
0,000000000001	10^{-12}	billiondel	piko	p	

Når vi forteller hvor mange vi har av en tierpotens kalles dette å skrive et tall på standardform.

Å skrive et tall på standardform betyr å fortelle hvor mange vi har av en tierpotens

Eksempel på **standardform**:

Dette tallet skal være større enn 1, og mindre enn 10.

$4\,000 = 4 \cdot 1\,000 = 4 \cdot 10^3$

$12\,000 = 1{,}2 \cdot 10\,000 = 1{,}2 \cdot 10^4$

Oppgave 1

Skriv på standardform:

a) 8 000 = b) 30 000 = c) 4 000 000 =

d) 8 500 = e) 38 000 = f) 4 250 000 =

Oppgave 2

Skriv på standardform:

a) 0,07 = b) 0,0006 = c) 0,0000002 =

d) 0,075 = e) 0,00063 = f) 0,00000024 =

Eksempel på praktisk bruk av prefiks og standardform

Jordens omkrets er beregnet til å være omtrent 40 000 000 meter. På en mer hensiktsmessig måte kan dette skrives som:
40 000 km, eller 4 000 mil, eller $4 \cdot 10^7$ m.

Rødt lys har en bølgelengde på omtrent 0,00000071 m. På en mer hensiktsmessig måte kan dette skrives som:
710 nanometer (710 nm) eller $7{,}1 \cdot 10^{-7}$ m.

Oppgave 3

Skriv størrelsene på en mer hensiktsmessig måte.

a) I en dL h-melk er det omtrent 0,0044 g natrium
b) En voksen blåhval kan veie opp mot 150 000 000 g
c) Størrelsen til et atom kan variere mellom 0,0000000001 m og 0,00000000005 m
d) Det lever omtrent 7 800 000 000 mennesker på jorda.
e) Man antar at vår galakse, Melkeveien, inneholder 300 000 000 000 stjerner
f) I 2020 kjøpte nordmenn omtrent 460 000 000 liter brus.

Finn egne eksempler på tall som har så høy verdi eller lav verdi at det er hensiktsmessig å skrive dem på **standardform**.

Regneregler ved regning av tall på standardform

Regel	Eksempel
$10^x \cdot 10^y = 10^{x+y}$	$10^3 \cdot 10^4 = 10^{3+4} = 10^7$
$10^x : 10^y = 10^{x-y}$	$10^5 : 10^2 = 10^{5-2} = 10^3$
$\frac{10^x}{10^y} = 10^{x-y}$	$\frac{10^5}{10^2} = 10^{5-2} = 10^3$
$a \cdot 10^x \cdot b \cdot 10^y = a \cdot b \cdot 10^{x+y}$	$2 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^5 = 12 \cdot 10^8 = 1{,}2 \cdot 10 \cdot 10^8 = 1{,}2 \cdot 10^9$

Oppgave 4

Regn ut, og skriv på standardform.

a) $10^3 \cdot 10^6 =$

b) $10 \cdot 10^3 =$

c) $10^4 \cdot 10^{-2} =$

d) $10^5 : 10^2 =$

e) $\frac{10^6}{10^2} =$

f) $10^3 : 10^5 =$

Oppgave 5

Regn ut, og skriv på standardform.

a) $2 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^5 =$

b) $4 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^3 =$

c) $7 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^5 =$

d) $6 \cdot 10^4 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-2} =$

e) $\frac{6 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^2} =$

f) $\frac{8 \cdot 10^6}{4 \cdot 10^{-2}} =$

g) $9 \cdot 10^2 : (2 \cdot 10^5) =$

h) $2 \cdot 10^6 : (4 \cdot 10^2) =$

Eksempler på praktisk regning med tall på standardform

Det er anslagsvis 300 000 000 000 stjerner i Melkeveien. En teori sier at hver stjerne i solsystemet i gjennomsnitt har 3,5 planeter i omløp. Dersom det stemmer vil antall planeter i Melkeveien være:

$3{,}5 \cdot 3 \cdot 10^{11} = 10{,}5 \cdot 10^{11} = 1{,}05 \cdot 10^{12}$

Det lever omtrent 7 800 000 000 mennesker på jorda. Anta at gjennomsnittsvekten for en person er 40 kg. Jordas befolkning veier dermed:

$4 \cdot 10$ kg $\cdot\ 7{,}8 \cdot 10^{9} = 4 \cdot 7{,}8 \cdot 10 \cdot 10^{9}$ kg $= 31{,}2 \cdot 10^{10}$ kg $= 3{,}12 \cdot 10^{11}$ kg

I 2015 måtte myndighetene i Paris fjerne alle hengelåsene som var hengt på brua Pont des Arts. Til sammen ble 45 tonn med hengelåser fjernet.

Dersom vi går ut fra at hver hengelås veier 50 g, ble så mange hengelåser fjernet:

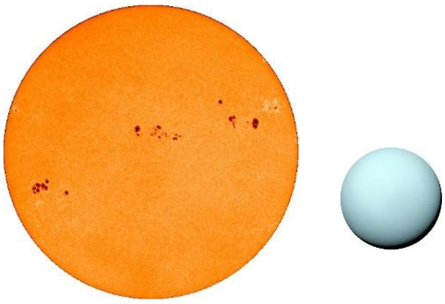
$\frac{45\ \text{tonn}}{50\ \text{g per hengelås}} = \frac{45 \cdot 10^{6}\ g}{5 \cdot 10\ \text{g per hengelås}} = \frac{45}{5} \cdot \frac{10^{6}}{10} = 9 \cdot 10^{5}$ hengelåser

Oppgave 6
Det er 5,3 millioner innbygger i Norge. I gjennomsnitt kaster hver innbygger 180 plastposer hvert år. Normal tykkelse på plasten i en pose er 0,035 mm.
Tenk deg at vi legger alle disse plastposene oppå hverandre i en stabel. Omtrent hvor høy ville stabelen blitt?

Oppgave 7
Anta at det drikkes 1 920 000 L kaffe i Norge hver dag, og at én kopp rommer 1,5 dL.
Hvor mange kopper drikkes det da i Norge hver dag?

Oppgave 8
I en kjøkkensvamp er det 40 milliarder bakterier per kubikkcentimeter. Svampen har et volum på 150 cm^3.
Hvor mange bakterier er det i hele svampen?

Oppgave 9



Solens volum er beregnet til å være omtrent $1{,}4 \times 10^{18}$ km³.
Planeten Uranus, som er solsystemets nest største planet, har et volum på omtrent $7 \cdot 10^{13}$ km³.

Hvor mange ganger større er Solen enn Uranus?

En eksamensoppgave (del 1)

Start med det minste tallet, og sorter tallene i stigende rekkefølge.

250 millioner

$2500 \cdot 10^{7}$

$0{,}025 \cdot 10^{-2}$

$0{,}25 \cdot 10^{10}$

$0{,}250 \cdot 10^{-5}$

0,0025 %

Fasit dekadiske enheter

Oppgave	Svar	Oppgave	Svar
1	a) $8 \cdot 10^3$ b) $3 \cdot 10^4$ c) $4 \cdot 10^6$ d) $8{,}5 \cdot 10^3$ e) $3{,}8 \cdot 10^4$ f) $4{,}25 \cdot 10^6$	**4**	a) 10^9 b) 10^4 c) 10^2 d) 10^3 e) 10^3 f) 10^{-2}
2	a) $7 \cdot 10^{-2}$ b) $6 \cdot 10^{-4}$ c) $2 \cdot 10^{-7}$ d) $7{,}5 \cdot 10^{-2}$ e) $6{,}3 \cdot 10^{-4}$ f) $2{,}4 \cdot 10^{-7}$	**5**	a) $6 \cdot 10^8$ b) $2 \cdot 10^7$ c) $4{,}2 \cdot 10^9$ d) $1{,}5 \cdot 10^3$ e) $3 \cdot 10^3$ f) $2 \cdot 10^8$ g) $4{,}5 \cdot 10^{-3}$ h) $5 \cdot 10^3$
3	a) $4{,}4 \cdot 10^{-3}$ g eller 4,4 mg b) $1{,}5 \cdot 10^8$ g eller 150 tonn	**6**	$\approx 6{,}7 \cdot 10^7$ meter = 67 000 km
	c) 10^{-10} til $5 \cdot 10^{-10}$ eller 0,1 nm til 0,5 nm	**7**	$\approx 1{,}3 \cdot 10^7$ kopper = 13 mill. kopper
		8	$6 \cdot 10^{13}$ bakterier = 60 billioner bakt.
	d) $7{,}8 \cdot 10^9$ eller 7,8 mrd	**9**	$2 \cdot 10^4$ = 20 000 ganger større
	e) $3 \cdot 10^{11}$ eller 300 mrd		
	f) $4{,}6 \cdot 10^8$ L eller 460 millioner L		

Eksamensoppgave side 66

$$\begin{aligned}
250 \text{ millioner} &= 250000000 \\
0{,}25 \cdot 10^{10} &= 2500000000 \\
2500 \cdot 10^7 &= 25000000000 \\
0{,}250 \cdot 10^{-5} &= 0{,}00000250 \\
0{,}025 \cdot 10^{-2} &= 0{,}00025 \\
0{,}0025\% &= 0{,}000025
\end{aligned}$$

Sortert i stigende rekkefølge får vi da:

$$\underline{\underline{0{,}250 \cdot 10^{-5} \quad 0{,}0025\% \quad 0{,}025 \cdot 10^{-2} \quad 250 \text{ millioner} \quad 0{,}25 \cdot 10^{10} \quad 2500 \cdot 10^7}}$$

Sammenheng og utvikling

Målet for opplæringen er at eleven skal kunne:

- Forklare begrepet lineær vekst, vise gangen i slik vekst og bruke dette i praktiske eksempler, også digitalt
- Regne med vekstfaktor, gjøre suksessive renteberegninger og regne praktiske oppgaver med eksponentiell vekst
- Bruke digitale verktøy til å undersøke kombinasjoner av polynomfunksjoner, rotfunksjoner, potensfunksjoner og eksponentialfunksjoner som beskriver praktiske situasjoner, ved å bestemme nullpunkt, ekstremalpunkt og skjæringspunkt og finne gjennomsnittlig vekstfart og tilnærmingsverdier for momentan vekstfart
- Bruke funksjoner til å modellere, drøfte og analysere praktiske sammenhenger
- Utforske matematiske modeller, sammenligne ulike modeller som beskriver samme praktiske situasjon, og vurdere hvilken informasjon modellen kan gi, og hvilket gyldighetsområde og avgrensninger de har

Sammenheng mellom størrelser

I dette kapittelet vil vi bruke en del begreper som det er viktig at du forstår. Disse begrepene er markert med **fet skrift**, og du må be om forklaring dersom du leser et begrep som du ikke husker hva betyr.

Størrelse er et slikt begrep. Med **størrelse** mener vi noe som kan beskrives ved hjelp av tall, og eksempel på en **størrelse** kan være:

- Befolkning
- Penger
- Vekt
- Alder
- Avstand
- Volum

Dersom to **størrelser** henger sammen, kan vi beskrive denne **sammenhengen** ved hjelp av **funksjoner** eller **modeller**.

$\boldsymbol{Funksjoner}$ *og* $\boldsymbol{modeller}$ *beskriver* $\boldsymbol{sammenhengen}$ *mellom to* $\boldsymbol{størrelser}$

For å beskrive **sammenhengen** mellom to **størrelser**, kan vi bruke:

- **Tekst**
- **Tabell**
- **Funksjonsuttrykk, modell eller formel**
- **Graf**

I teoretisk matematikk er det vanlig å erstatte **størrelsene** med bokstavene x og y.

For at en **sammenheng** skal kunne beskrives ved hjelp av **funksjoner**, er det et krav om at **endring** i **verdien** til **størrelse** x fører til en **endring** i **verdien** til **størrelse** y.

Dersom dette er tilfelle, sier vi at y er en funksjon av x.

y *er en* $\boldsymbol{funksjon}$ *av* x *dersom* $\boldsymbol{endring}$ *i* x *fører til* $\boldsymbol{endring}$ *i* y

Det er denne **endringen** vi kaller **utvikling**; hva skjer med y når x øker?

Punkt

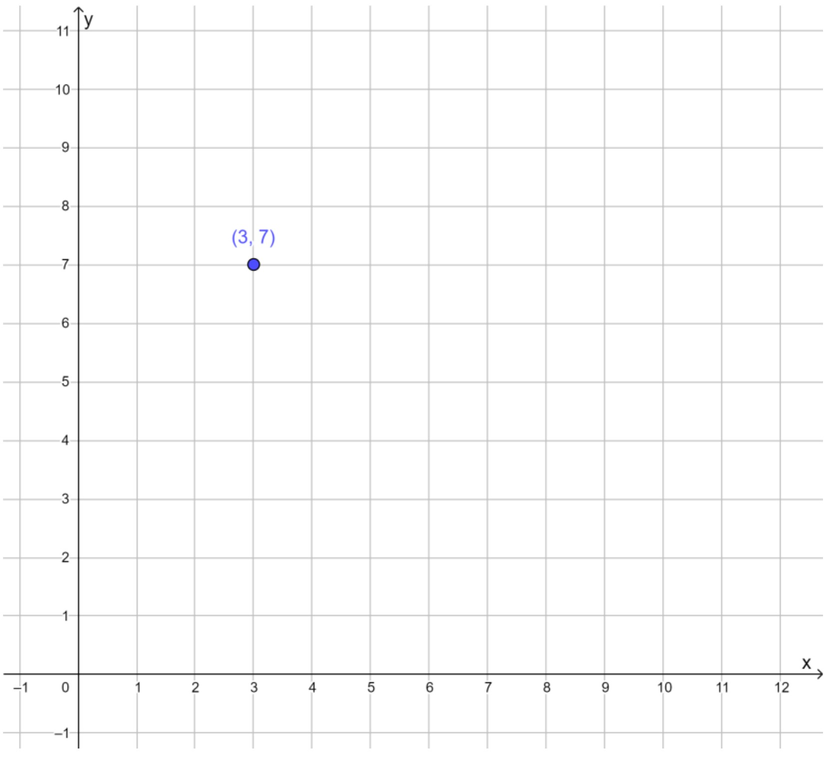
Et **punkt** består av en x- **verdi** og en y- **verdi**. Et **punkt** brukes til å beskrive **tilhørende** x- og y- **verdier**, og skrives på følgende måte:

$$(x, y)$$

Vi skiller x- **verdien** og y- **verdien** ved hjelp av et komma, og vi skriver punktet i en parentes slik at det ikke skal feiltolkes som et desimaltall.

Som et eksempel vil skrivemåten $(3,7)$ fortelle at:

- det er et punkt, fordi det står skrevet i en parentes
- når x-**verdien** er 3, er y-**verdien** 7



Du vil møte tre ulike innfallsvinkler angående **punkter**:

- når du får oppgitt både x- og y- **verdien**
- når du får oppgitt den ene **verdien**, og skal finne den andre **verdien**
- når du ikke får oppgitt noen av **verdiene**, og skal finne begge.

Når du får oppgitt begge verdiene

I 1P blir **punkter** ofte presentert i en **tabell**. I **tabellen** vil x- **verdiene** stå i øverste rad, mens y- **verdiene** står i raden under. En kombinasjon av en x- **verdi** med en **tilhørende** y- **verdi** utgjør et **punkt**.

Tabellen

x	4	7	10
y	9	15	24

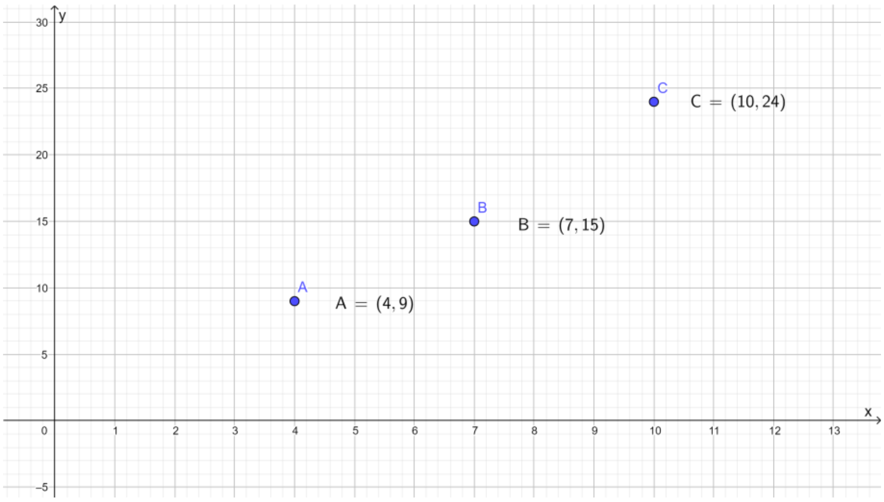
gir **punktene** (4,9), (7,15) og (10,24).

På neste side ser du hvordan du kan finne **punktene** i GeoGebra.

Fremgangsmåte:

1. Skriv **punktene** inn i inntastingsfeltet. Bruk parentes.
2. Trekk i **aksene** slik at alle punktene synes.
3. Sett navn på **aksene**

Du skal ende med et grafikkfelt som likner på dette:



Legg merke til at vi:

- Sprer punktene utover grafikkfeltet

- Kun viser positive x- **verdier**

- Viser **verdien** til hvert punkt

Oppgave 1

I tabellen nedenfor finner du **tilhørende** x- og y- **verdier**.

x	3	6	16
y	128	231	659

Skriv **punktene** inn i GeoGebra. Lag et oversiktlig grafikkfelt. Husk å sette navn på **aksene**.

Når du får oppgitt den ene verdien

Når du skal finne **tilhørende** x- og y- **verdier**, har du som regel først laget en **graf**. Derfor kommer vi tilbake til dette senere i kapittelet. Her nøyer vi oss med å beskrive metodene for hvordan dette gjøres.

<u>Metode som fungerer uansett</u>

1. Skriv inn den oppgitte x- eller y- **verdien**. Skriv det på formen $x =$ eller $y =$.
   GeoGebra vil da lage en linje fra den **verdien** du skrev inn.
2. Velg «Skjæring mellom to objekt». Trykk der linja krysser **grafen**.
3. Få frem **punktets verdi.**

<u>Metode som fungerer når x- **verdien** er oppgitt</u>

Vi kan få GeoGebra til å finne **funksjonsverdien** til en x- **verdi,** ved å skrive

$$(x - \boldsymbol{verdi}, navnet \text{ på } \boldsymbol{funksjonen}(x - \boldsymbol{verdi}))$$

Den første **funksjonen** som skrives inn i GeoGebra, gis automatisk navnet $\boldsymbol{f}$**.** Dersom vi ønsker å finne **funksjonsverdien** når $x = 3$, kan vi skrive følgende **punkt**:

$$(3, f(3))$$

GeoGebra vil da lage et **punkt** på grafen der x er 3 og y er **funksjonsverdien** når x er 3.

Når ingen av verdiene er oppgitt

Når du har laget en **graf** kan du bli bedt om å finne

- Høyest og lavest **funksjonsverdi**
- x- **verdien** der **grafen** skjærer x- **aksen**
- y- **verdien** der **grafen** skjærer y- **aksen**

Høyest og lavest **funksjonsverdi** kan du finne ved hjelp av «Ekstremalpunkt». Dersom høyest eller lavest **funksjonsverdi** finnes i et av **grafens** endepunkter, kan du finne **verdien** ved hjelp av «Punkt på objekt».

Du kan finne x- og y- **verdien** der **grafen skjærer aksene** ved å bruke «Skjæring mellom to objekt», og trykke i **skjæringspunktet** mellom **grafen** og **aksen**.

Vi kommer tilbake til dette senere i kapittelet.

Utvikling beskrevet med ulike typer modeller

Når vi skal beskrive **utviklingen** i y- **verdier** når x øker, kan vi beskrive dette ved hjelp av forskjellige typer **modeller**.

Nedenfor finner du en beskrivelse over de fire **modellene** som er pensum for dette kurset.

Modell	Funksjonsuttrykk	Beskriver
Lineær	$y = ax + b$	Endring med et fast tall
Eksponentiell	$y = a \cdot b^x$	Endring med en fast prosent
Potens	$y = a \cdot x^b$	
Polynom	Den høyeste eksponenten avgjør graden.	Den eneste **modellen** hvor endring i y- **verdi** kan være både positiv og negativ.
2. grad	$y = ax^2 + bx + c$	
3. grad	$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$	
4. grad	$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$	

Det skal komme klart frem i oppgaven hvilken **modell** du skal velge. Dette kan enten opplyses ved navn, **funksjonsuttrykk** eller en beskrivelse av **utviklingen.**

Felles for alle **modellene** er at de beskriver en **utvikling** med tre ulike innfallsvinkler:

- En nøyaktig representasjon utfra **punkter**
- En tilnærmet representasjon utfra **punkter**
- Utfra et **funksjonsuttrykk**

Dersom **utviklingen** er beskrevet gjennom et **funksjonsuttrykk**, er **funksjonen** som regel avgrenset til å være **gyldig** for en viss mengde x- **verdier.** Dette kalles **definisjonsmengden** for **funksjonen**, og skrives slik inn i GeoGebra:

$$funksjonsuttrykk, start \leq x \leq slutt$$

Dersom **utviklingen** er beskrevet gjennom **punkter**, må du skrive **punktene** inn i regnearket til GeoGebra. Deretter må du gjennomføre en regresjonsanalyse for å få frem den **modellen** du ønsker. I slike tilfeller blir du ofte bedt om å vurdere **modellens gyldighetsområde**.

Lineær utvikling: $y = ax + b$

Dersom y **endres** *fra* et startpunkt *med* et fast tall for hver gang x øker med 1, sier vi at **utviklingen** er **lineær**. Både startpunktet og det faste tallet har en praktisk betydning, og du vil bli bedt om å kommentere begge.

Lineær utvikling utfra punkter

Tenk deg at en lærer gjorde følgende demonstrasjon foran elevene sine:

Læreren hadde med seg en pappkopp, en bunke med 30 identiske terninger og en vekt. Læreren nullstilte vekta og plasserte deretter pappkoppen på vekta.

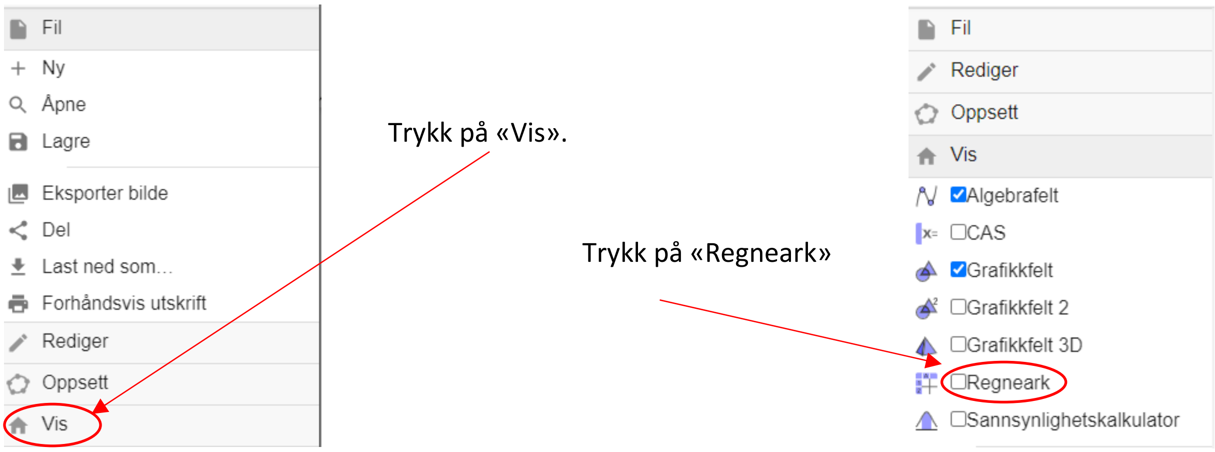
Læreren la et ulikt antall terninger i koppen, og noterte den samlede vekten av terninger + koppen i **tabellen** nedenfor.

Utstyr:	Antall terninger (x)	Samlet vekt i gram (y)
	1	17
	4	32
	7	47
	10	62

Klarer du utfra **tabellen** å finne ut vekten til pappkoppen, og vekten av hver enkelt terning?

Det kan godt hende du allerede har funnet svaret på spørsmålet ovenfor. Likevel skal vi vise hvordan du kan bruke GeoGebra til å finne denne informasjonen.

Steg 1 – åpne regnearket i GeoGebra

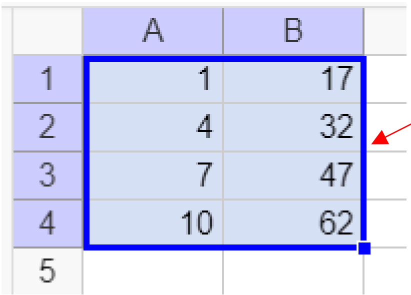


Steg 2 – skriv inn punktene fra tabellen

	A	B
1	1	17
2	4	32
3	7	47
4	10	62

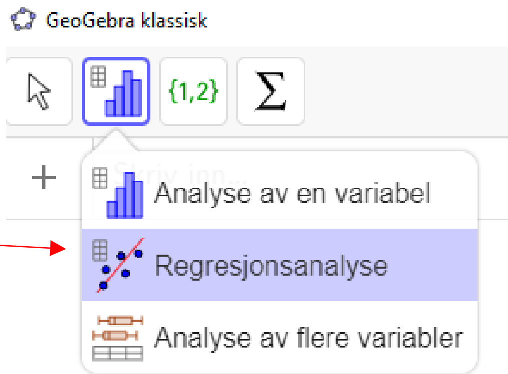
Vi skriver x- **verdiene** i A-kolonnen, og y-**verdiene** i B-kolonnen

Steg 3 – marker punktene og lag en regresjonsanalyse

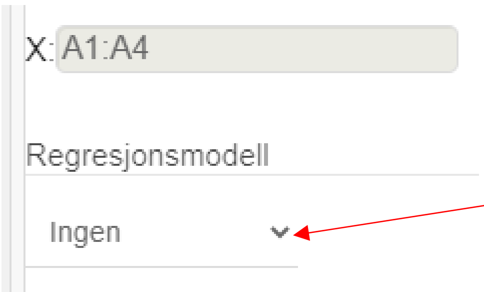


Marker tallene

Trykk på «Regresjonsanalyse

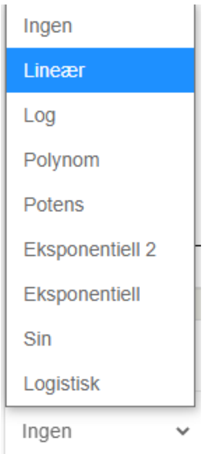


Steg 4 – velg riktig modell



Trykk på denne pila

Velg «Lineær»



Dermed får du opp dette bildet:

Her er **modellen**, eller **funksjonsuttrykket**, som skal hjelpe oss til å finne informasjonen som ble etterspurt. Hva betyr så dette **funksjonsuttrykket**?

Vi har følgende **sammenheng** mellom antall terninger + koppen, og den samlede vekten:

$$samlet\ vekt = vekt\ per\ terning\ \cdot antall\ terninger + koppens\ vekt$$

I tabellen på side 74 har vi definert y som samlet vekt, og x som antall terninger. Vi kan derfor beskrive **sammenhengen** mellom antall terninger +koppen, og den samlede vekten slik:

$$y = vekt\ per\ terning\ \cdot x + koppens\ vekt$$

Regresjonsanalysen i GeoGebra ga oss følgende **modell** på formen $y = ax + b$:

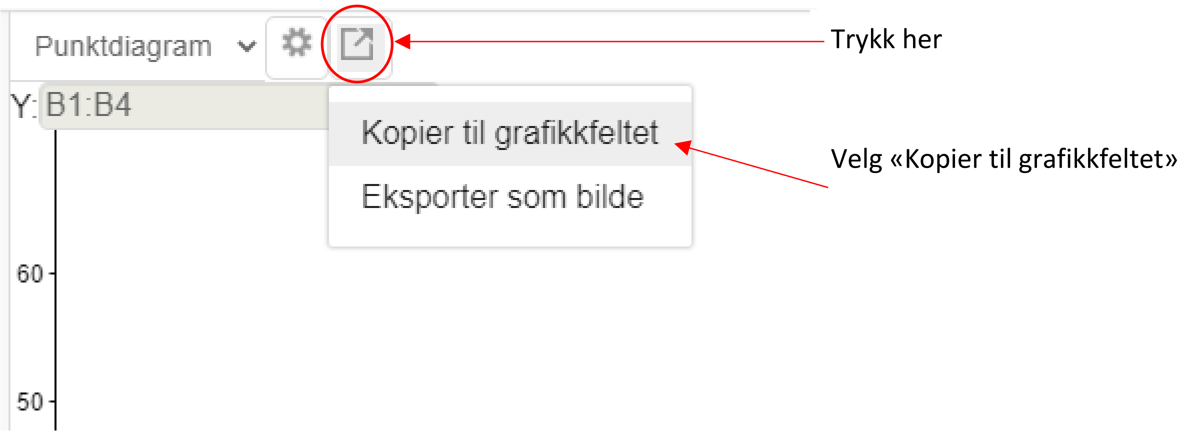
$$y = 5x + 12$$

Dette betyr at hver terning veier 5 gram, mens koppen veier 12 gram.

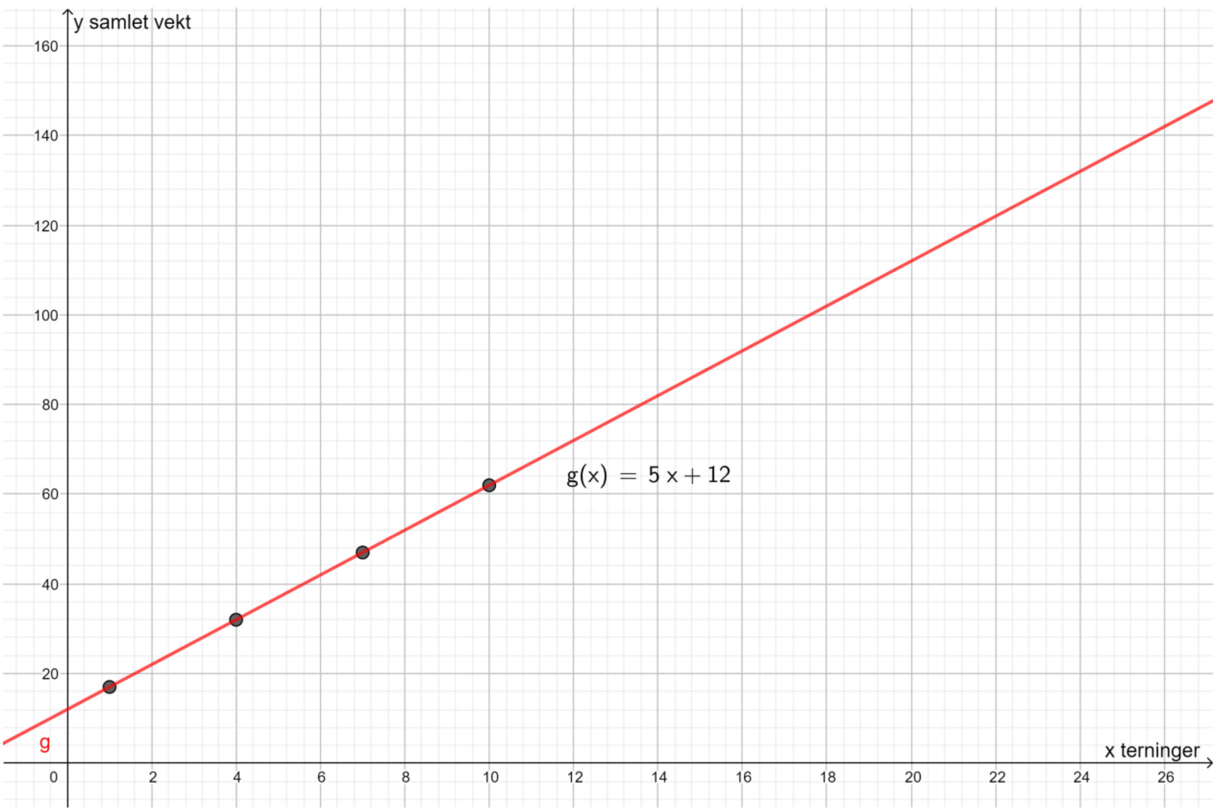
Dermed kan vi si at den samlede vekten starter på 12 gram, og øker med 5 gram for hver terning.

12 er **funksjonens** startpunkt. Dette kalles **funksjonens konstantledd**, og forkortes b
5 er **funksjonens endringsverdi**. Dette kalles **funksjonens stigningstall**, og forkortes a

Hvordan finne konstantledd og stigningstall i GeoGebra



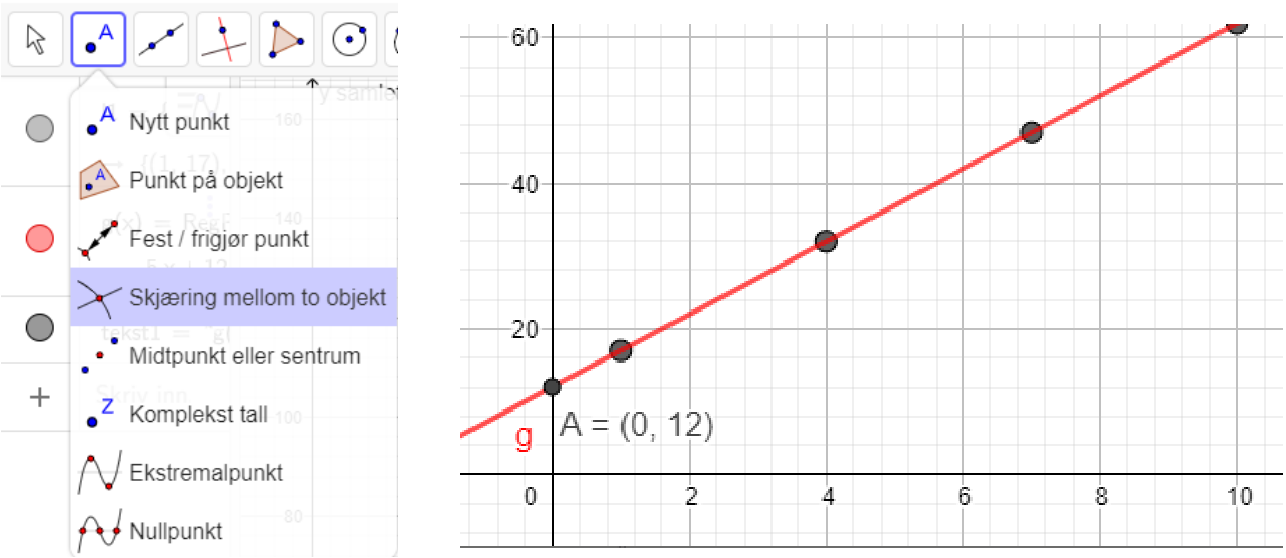
Du kan lukke regresjonsanalysen, og fjerne regnearket. Med justeringer av x- og y- **aksene**, kan grafikkfeltet se slik ut:



Den røde linja kalles en **graf**. **Grafen** viser **utviklingen** i y- **verdier** når **x** øker, og brukes til å finne **tilhørende** x- og y- **verdier**.

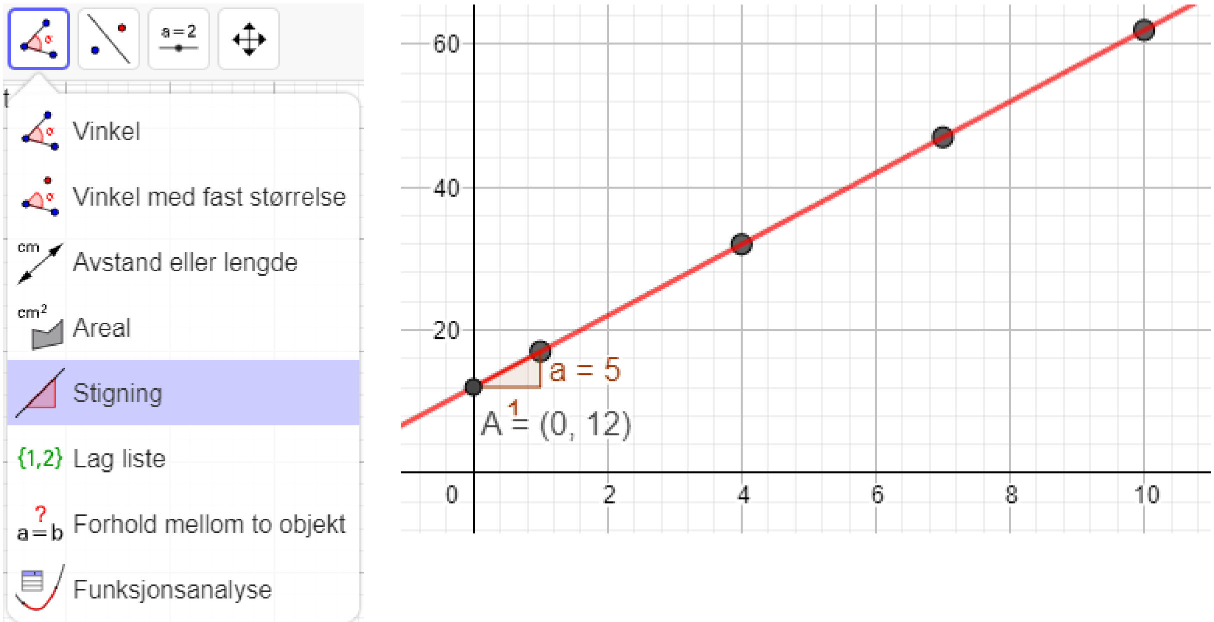
Legg merke til at vi har skrevet navn på **aksene**, og trukket **funksjonsuttrykket** inn i grafikkfeltet.

Vi finner **funksjonens konstantledd** der **grafen** krysser y- **aksen**. Velg «Skjæring mellom to objekt, og trykk der **grafen** krysser y- **aksen:**



Punktet A forteller oss at når antall terninger er 0, vil den samlede vekta være 12.

Vi finner **stigningstallet** til en rett linje ved å be GeoGebra analysere stigningen til **grafen**. Velg «Stigning», og trykk på **grafen**.

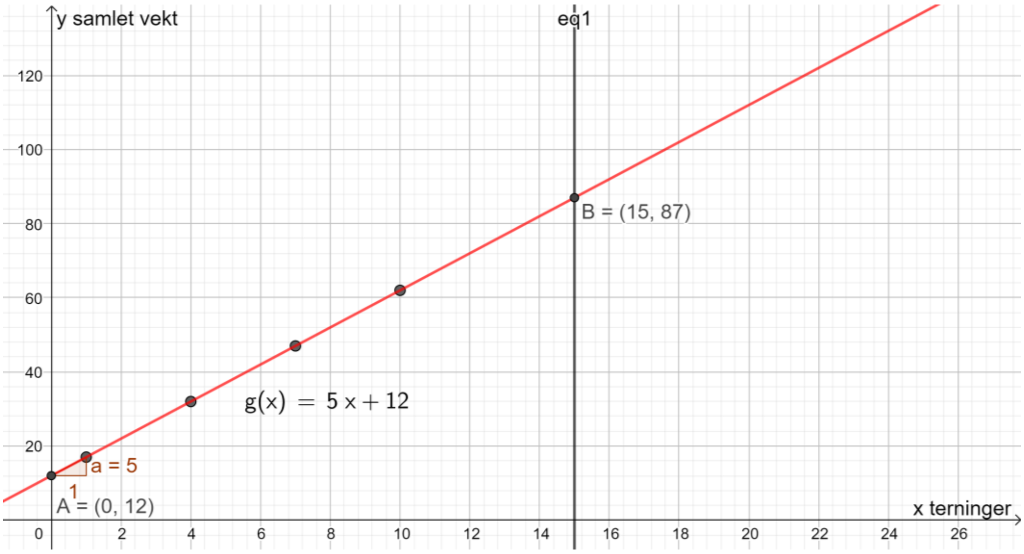


Stigningstallet a forteller oss at y øker med 5 hver gang x øker med 1.

Hvordan finne tilhørende x- og y- verdier?

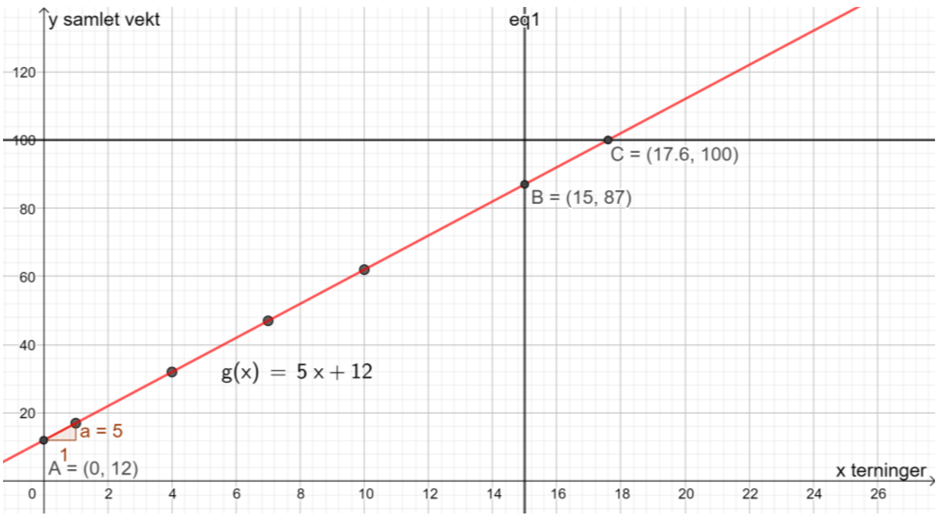
Vi kan nå bruke **grafen** til å finne **tilhørende** x- og y- **verdier**.

Tenk deg at vi ønsker å finne den samlede vekten dersom vi legger 15 terninger i koppen. Dette betyr at vi skal finne den **tilhørende** y- **verdien** når x = 15. I inntastingsfeltet må vi skrive at $x = 15$, og bruke «Skjæring mellom to objekt».



Punkt B forteller at samlet vekt med 15 terninger vil veie 87 gram.
Fremgangsmåte: skrev x = 15, brukte «Skjæring mellom to objekt»

Dersom vi ønsker å finne ut hvor mange terninger vi må legges i koppen for at den samlede vekten skal overstige 100 gram, må vi finne den **tilhørende** x- **verdien** når $y = 100$. I inntastingsfeltet må vi skrive $y = 100$, og bruke «Skjæring mellom to objekt».



En tolkning av **punkt** C forteller oss at vi må legge 18 terninger i koppen for at den samlede vekten skal overstige 100 gram.
Fremgangsmåte: skrev $y = 100$, brukte «Skjæring mellom to objekt».

Modellens gyldighetsområde

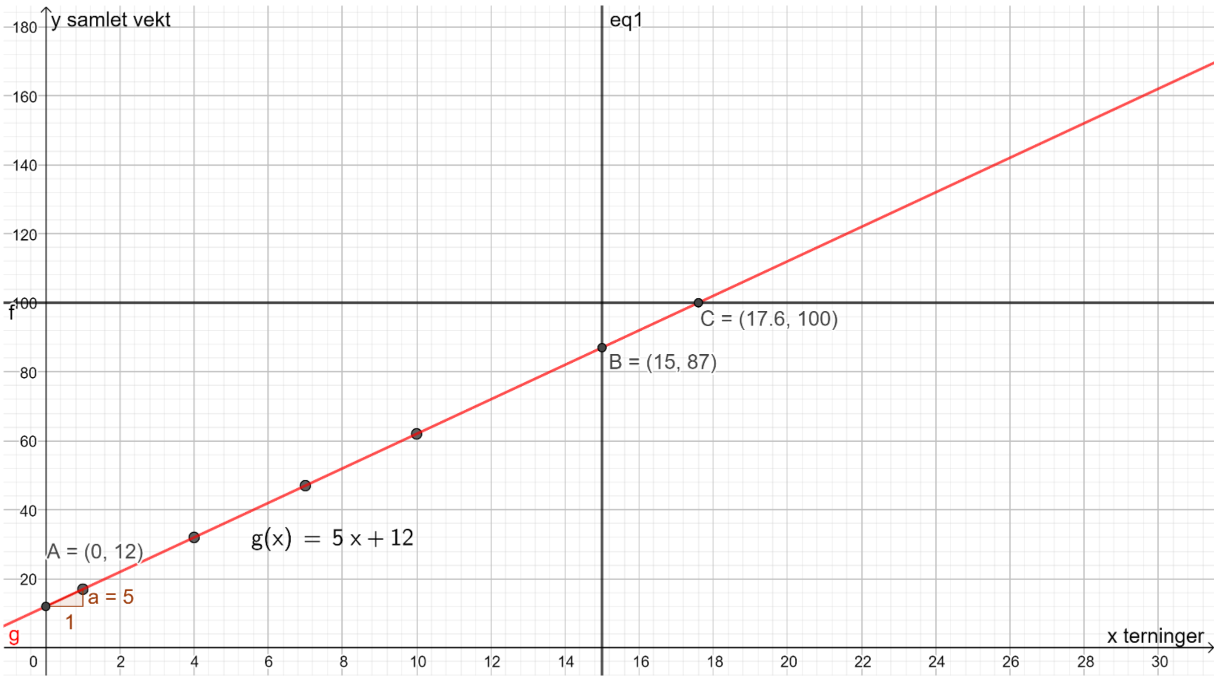
Ytterst få **modeller** brukt i praktiske situasjoner er **gyldige** for alle x- **verdier.** Kanskje er det noen begrensninger som gjør at **modellen** har en nedre eller øvre grense. Kanskje er det slik at **modellen** bli mer usikker etter hvert som x- **verdiene øker**.

I noen oppgaver er begrensningene oppgitt. I noen oppgaver skal du vurdere **modellen** opp mot et reelt **punkt**. I noen oppgaver må du gjøre selvstendige vurderinger.

I eksempelet med læreren som måler den samlede vekten av terninger pluss en kopp, står det innledningsvis at læreren har med en bunke på 30 identiske terninger. Det betyr at **modellen** vi har funnet har en øvre grense på 30. Det er i tillegg ikke mulig å legge på et negativt antall terninger. Dermed blir den nedre grensen 0.

Dette betyr at **modellen** er **gyldig** for x- **verdier** fra og med 0, og til og med 30.

I det endelige grafikkfeltet bør du vise **grafen** for hele **gyldighetsområdet.**



Oppgave 2

En lærer har med seg en eske med 20 identiske penner, en kopp og en vekt. Læreren plasserer koppen på vekta, og måler den samlede vekten av noen penner og koppen. Resultatet fra målingen finner du i tabellen nedenfor:

Antall penner	4	9	12
Gram samlet vekt	230	330	390

Bruk tallene i tabellen til å lage en lineær modell som beskriver sammenhengen mellom antall penner og den samlede vekten.

Hva i oppgaveteksten er det som avgjør at dette er en lineær modell? Hva vil du si er gyldighetsområdet til denne modellen?

Bruk modellen du laget til å finne:

- Hvor mye hver penn veier
- Hvor mye koppen veier
- Den samlede vekten til 7 penner
- Om det er mulig at den samlede vekten overstiger 600 gram

Oppgave 3

En nyåpnet videregående skole presenterte følgende elevtall for to utvalgte år etter oppstart:

År etter oppstart	1	3
Elevtall	620	650

Skolens ledelse antar at utviklingen i skolens elevtall kan beskrives med en lineær modell, som er gyldig i noen år fremover.

Bruk tallene i tabellen til å lage en modell som kan brukes til å beskrive utviklingen i skolens elevtall. Hva forteller modellen om antall elever ved skolens oppstart, og den årlige økningen i skolens elevtall?

Etter 10 år var skolens elevtall 750. Vurder modellens gyldighetsområde, utfra denne opplysningen.

Oppgave 4

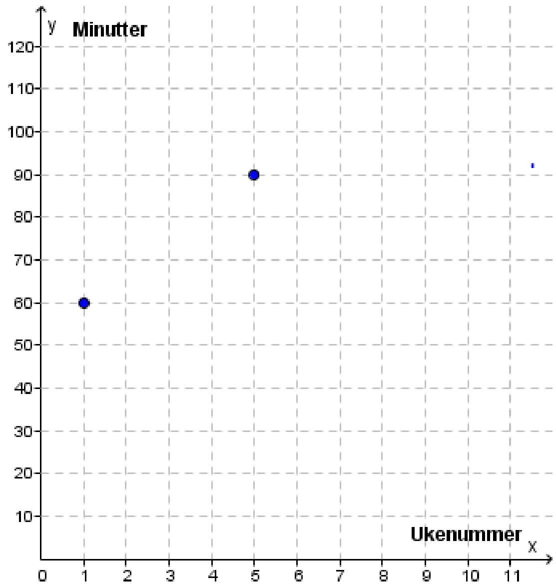
I dag er det 280 kaniner innenfor et avgrenset område. Anta at en sykdom brer seg blant kaninene, og at det om 20 måneder bare vil være 40 kaniner igjen i området.

Bruk informasjonen i teksten ovenfor til å lage en modell som viser hvor mange kaniner det vil være om x måneder dersom antallet avtar lineært.

Hva forteller modellen om den månedlige nedgangen i antall kaniner?

Vurder modellens gyldighetsområde.

Oppgave 5



I koordinatsystemet ovenfor har Liv markert hvor mange minutter hun trente i uke 1 og i uke 5. Liv har som mål at antall minutter hun trener, skal øke lineært for hver uke.

a) Bestem en modell som Liv kan bruke for å regne ut hvor mange minutter hun må øke treningen med hver uke framover for å nå dette målet.

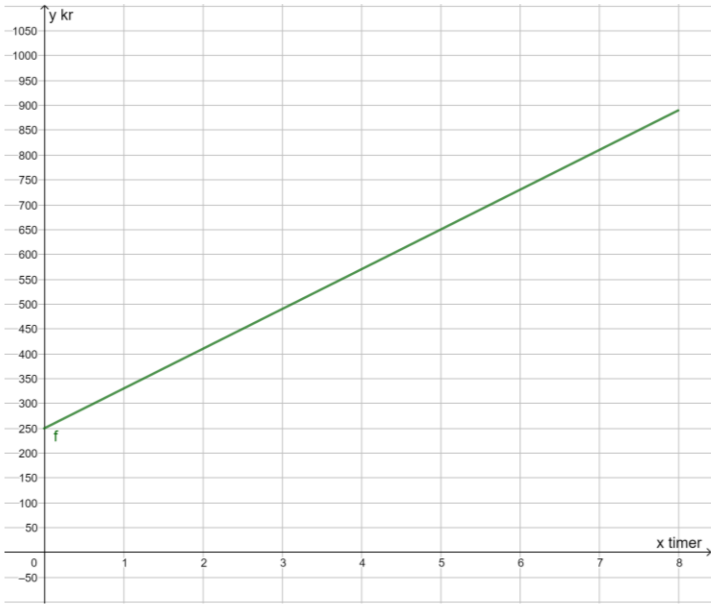
b) Hvor mange minutter må hun trene i uke 40 ifølge denne modellen?

c) Vurder modellens gyldighetsområde.

Oppgave 6

En ungdom har sittet barnevakt som deltidsjobb. Lønna beregnes ut fra et fast beløp for oppmøte, og et fast beløp for hver time ungdommen sitter barnevakt.

Grafen nedenfor viser sammenhengen mellom antall timer ungdommen sitter barnevakt, og hvor mye ungdommen får i lønn.



Velg to punkter fra grafen, og lag en modell som viser sammenhengen mellom antall timer og lønn.

Hvilken informasjon gir modellen?

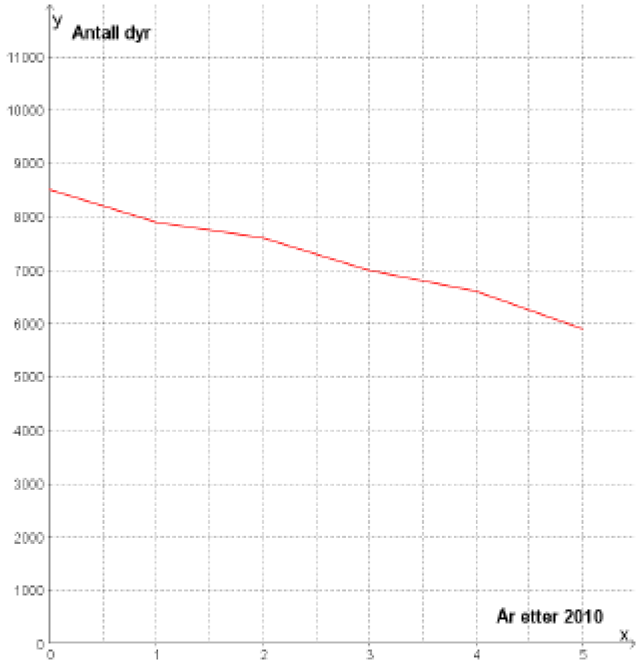
Er antall timer og lønn proporsjonale størrelser?

Oppgave 7

I 2021 er verdien av en leilighet 1 200 000 kroner.
Familien som eier antar at verdien vil stige med 80 000 kroner hvert år.

Lag en modell som viser verdien $f(x)$ kr til leiligheten *x* år etter 2021 dersom det går slik familien antar.

Oppgave 8



Linjediagrammet til venstre viser hvordan antall dyr av en art har avtatt innenfor et bestemt område i perioden 2010–2015.

Lag en lineær funksjon som tilnærmet beskriver utviklingen.

Bruk modellen og grafen du laget til å finne interessant informasjon angående utviklingen i antall dyr innenfor dette området.

Presentasjonsoppgave

Det blir stadig vanskeligere for ungdom å skaffe seg arbeid. Andelen ungdom med deltidsjobb har sunket jevnt siden år 2000, og det er foreløpig ingen tegn til at utviklingen endres.

Tabellen nedenfor viser andelen av 17 år gamle gutter og jenter som har deltidsjobb i noen utvalgte år.

År	2000	2005	2010	2015
Andel jenter	74	63,9	64,6	55,9
Andel gutter	73,9	61	56,2	48,5

Kilde: https://www.ssb.no

Bruk informasjonen i tabellen, og lag en modell for hvert av kjønnene som viser en jevn utvikling i andelen jenter og gutter som har deltidsjobb.

Hva forteller modellene om nedgangen i andelen ungdom som har deltidsjobb? Hvilket gyldighetsområde har modellene?

Lineær utvikling utfra funksjonsuttrykk

Tenk deg at en pakke kjøttdeig tas ut av fryseren, og legges på kjøkkenbenken.

Funksjonsuttrykket

$$T(x) = 2{,}5x - 18$$

kan brukes til å beregne kjøttdeigens temperatur $T(x)$ grader °C etter x timer på kjøkkenbenken.

Hvilken informasjon gir dette **funksjonsuttrykket**, og hva kan vi bruke **funksjonsuttrykket** til?

$$T(x) = 2{,}5x - 18$$

Først må vi skjønne symbolene x og $T(x)$.

x står for antall timer som har gått siden kjøttdeigen ble tatt ut, og x er den eneste **variabelen** vi kan bruke når vi skal løse funksjonsoppgaver i GeoGebra. Hvis ikke kunne vi brukt **variabelen** t for timer.

$T(x)$ uttales «T av x», og måler kjøttdeigens temperatur. Skrivemåten forteller at temperaturen er en **funksjon** av **variabelen** x, som betyr at temperaturen **endres** etter hvert som x øker.

Hva betyr tallene i **funksjonsuttrykket**?

Leddet som står alene er **funksjonens konstantledd**. I dette tilfellet forteller **konstantleddet** at kjøttdeigens temperatur er -18°C når den tas ut av fryseren.

Tallet foran **variabelen** x er **funksjonens stigningstall**. I dette tilfellet forteller **stigningstallet** at temperaturen stiger med 2,5 per time.

Hva kan vi bruke **funksjonsuttrykket** til?

Dersom vi tegner **grafen** til **funksjonsuttrykket** inn i GeoGebra, kan vi bruke **grafen** til å finne **tilhørende** x- og y- **verdier**.

Vi kan for eksempel finne ut hvor lang tid det tar før kjøttet har tint, eller hvilken temperatur kjøttet har etter 12 timer.

Tegne grafen for en definisjonsmengde

Definisjonsmengden er på mange måter det samme som **gyldighetsområde**.

Anta at kjøttdeigen når romtemperatur etter 16 timer. Det betyr at **definisjonsmengden** til **funksjonsuttrykket** er fra 0 til 16.

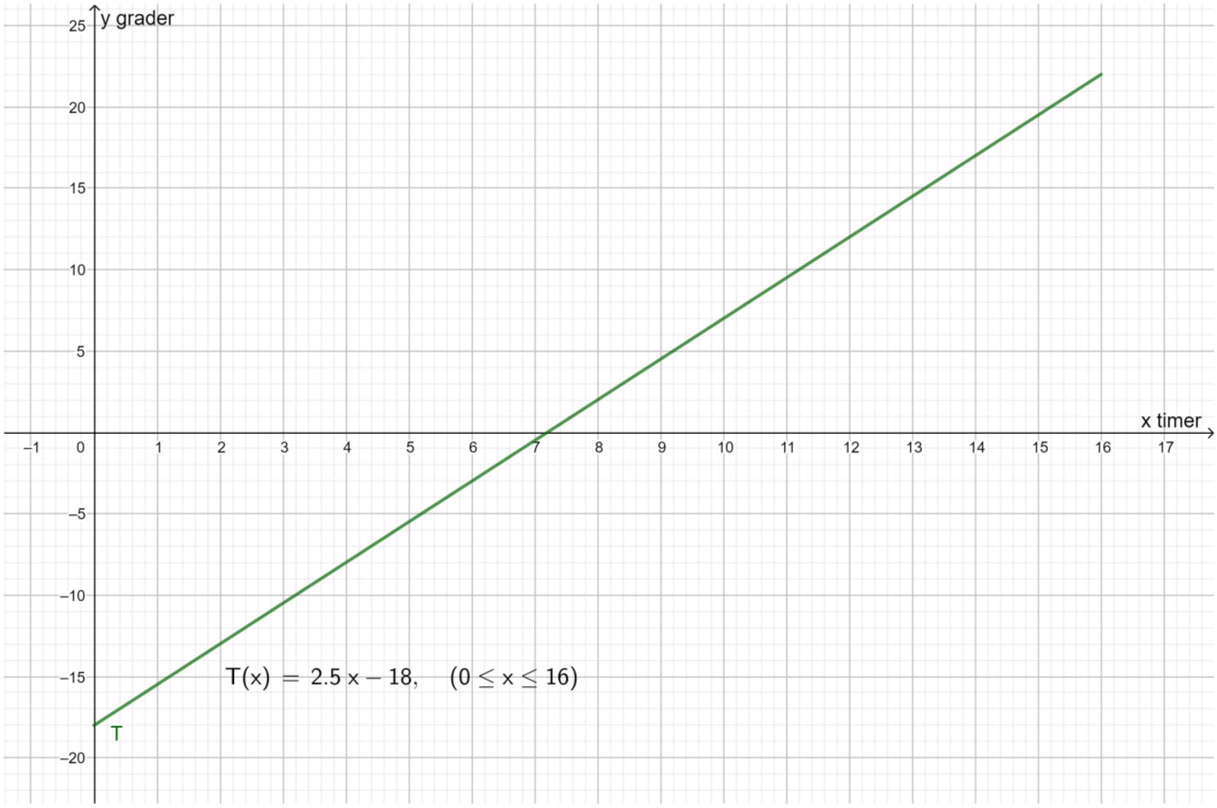
Dette kan også skrives slik:

$$0 \leq x \leq 16$$

Ofte blir **funksjonsuttrykket** og **definisjonsmengden** skrevet sammen slik:

$$T(x) = 2{,}5x - 18 \quad , \quad 0 \le x \le 16$$

Det er også slik vi skriver det inn i GeoGebra. Etter justeringer av x- og y- **aksen**, skal du få et grafikkfelt som likner på dette:



Husk å sette navn på **aksene**, og å trekke inn **funksjonsuttrykket**.

Vi kan nå finne **tilhørende** x- og y- **verdier**.

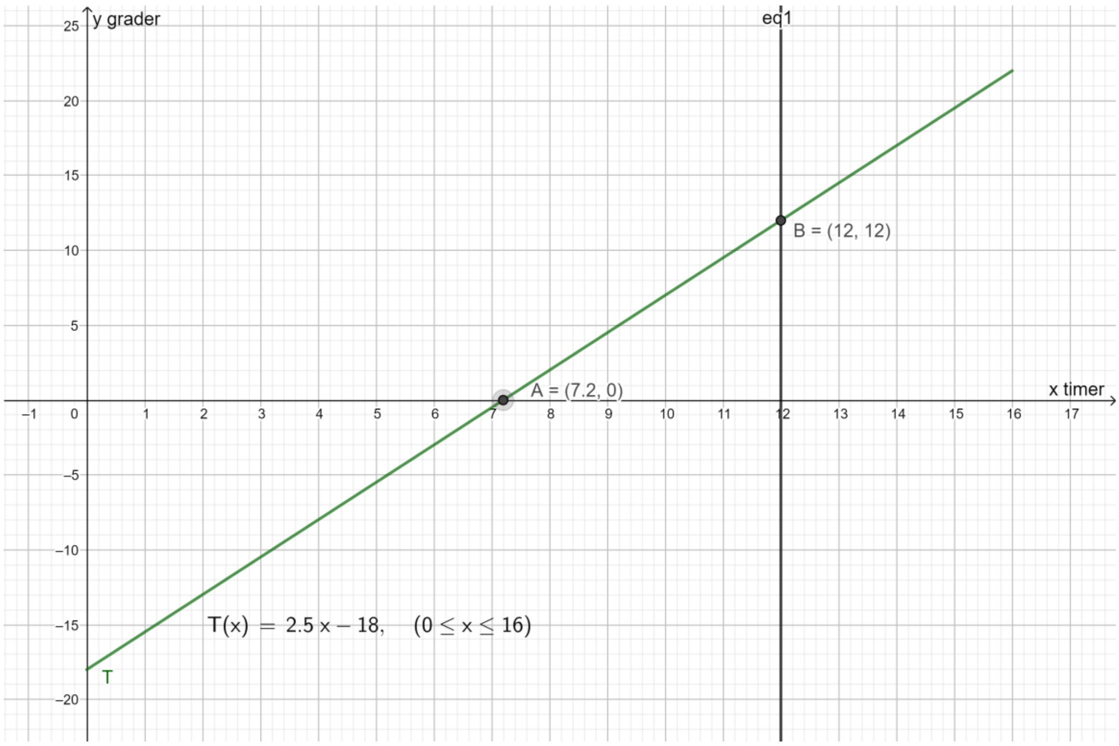
Skjæring mellom to objekt.

Hvor lang tid vil det ta før kjøttdeigen har tint. Hvilken temperatur har kjøttdeigen etter 12 timer?

Kjøttet har tint når det passerer 0°C. Dette finner vi ved å bruke «Skjæring mellom to objekt» og trykke der **grafen** skjærer x- **aksen**.

For å finne kjøttdeigens temperatur etter 12 timer må vi tenke at vii finner 12 timer på x- **aksen**. Derfor må vi skrive $x = 12$, og bruke «Skjæring mellom to objekt» der linja fra $x = 12$ skjærer **grafen**. Alternativt kan vi skrive (12,T(12)).

Dermed får vi disse **punktene** som vi må tolke:



Svar:

Kjøttdeigen tiner etter 7,2 timer. Fremgangsmåte: brukte «Skjæring mellom to objekt».

Etter 12 timer holder kjøttdeigen 12°C. Fremgangsmåte: skrev $x = 12$, brukte «Skjæring mellom to objekt».

Vurdere gyldighetsområde

Dersom **funksjonsuttrykket** ikke er avgrenset, må du selv vurdere **funksjonens gyldighetsområde**. Dette handler som regel om å tenke seg frem til fornuftige avgrensninger.

Oppgave 9

Mathias ønsker å spare til en reise. Han oppretter et fast månedlig trekk inn på en sparekonto, hvor det allerede står et beløp.

Funksjonsuttrykket

$$S(x) = 500x + 4500 \quad , \quad 0 \leq x \leq 12$$

kan brukes til å regne ut hvor mye han har på sparekontoen $S(x)$ kr når han har spart i x måneder.

Bruk informasjonen ovenfor til å vise at du kan:

- Tegne en avgrenset graf i GeoGebra
- Sette navn på x- og y- aksen
- Gi en praktisk tolkning av en funksjons stigningstall og konstantledd
- Finne tilhørende x- og y- verdier

Alle svar skal skrives i Word, og skal forklares med fremgangsmåte.

Oppgave 10

En del kommuner i Distrikts-Norge opplever en jevn nedgang i innbyggertallet.

Funksjonen

$$K(x) = -150x + 3800 \quad , \quad 0 \leq x \leq 10$$

kan brukes til å beregne innbyggertallet $K(x)$ i en kommune x år etter 2021.

Bruk informasjonen ovenfor til å vise at du kan:

- Tegne en avgrenset graf i GeoGebra
- Sette navn på x- og y- aksen
- Gi en praktisk tolkning av en funksjons stigningstall og konstantledd
- Finne tilhørende x- og y- verdier

Alle svar skal skrives i Word, og skal forklares med fremgangsmåte.

Oppgave 11

Tenk deg at du har en fulladet telefon, og at batteriprosenten synker med fast antall prosentpoeng per time ved normal bruk og temperatur. Fuksjonen B gitt ved

$$B(x) = -5x + 100$$

er en modell som viser batteriprosenten $B(x)$ til telefonen, x timer etter at telefonen var fulladet. Bruk informasjonen ovenfor til å vise at du kan:

- Tegne en graf i GeoGebra, og vurdere gyldighetsområdet til en modell
- Sette navn på x- og y- aksen
- Gi en praktisk tolkning av en funksjons stigningstall og konstantledd
- Finne tilhørende x- og y- verdier

Alle svar skal skrives i Word, og skal forklares med fremgangsmåte.

Oppgave 12

21. februar 2020 ble Covid-19 for første gang påvist hos en pasient i Norge. Etter dette steg antall smittede i et relativ raskt tempo.

Dersom vi antar at utviklingen i antall smittede nordmenn økte jevnt i perioden som fulgte, kan antall smittede nordmenn $S(x)$ beregnes ut fra modellen

$$S(x) = 97x$$

hvor x er antall dager etter 20. februar 2020.

22. mars var det registrert 2902 smittede nordmenn. 30. mars hadde dette tallet steget til 4898.

Bruk informasjonen ovenfor til å vise at du kan:

- Tegne en graf i GeoGebra, og vurdere gyldighetsområdet til en modell
- Sette navn på x- og y- aksen
- Gi en praktisk tolkning av en funksjons stigningstall og konstantledd
- Finne tilhørende x- og y- verdier
- Avgjøre om to størrelser er proporsjonale

Alle svar skal skrives i Word, og skal forklares med fremgangsmåte.

En eksamensoppgave

Jacob er selger.

Månedslønnen hans er gitt ved

$$M(x) = 0{,}075x + 32\,000$$

når han selger for x kroner i løpet av en måned.

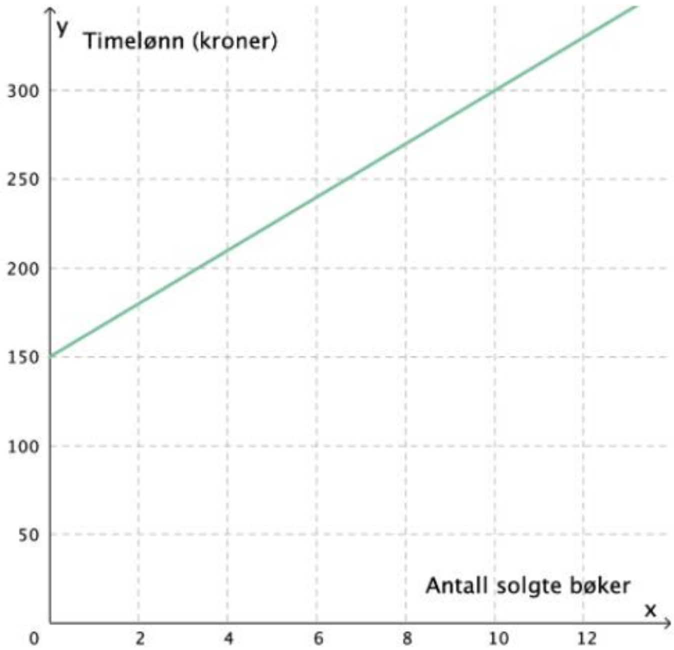
En måned selger Jacob for 150 000 kroner.

Bestem månedslønnen hans denne måneden.

En eksamensoppgave

Sarah har deltidsjobb som bokselger.

Modellen viser timelønnen hennes når hun selger x bøker i løpet av en time.



Hvor mange bøker må Sarah selge i løpet av en time for at timelønnen skal bli 450 kroner?

Eksponentiell utvikling: $\boldsymbol{y = a \cdot b^x}$

Dersom y **endres** *fra* et startpunkt *med* en fast **prosent** for hver gang x øker med 1, sier vi at **utviklingen** er **eksponentiell**. Både startpunktet og den faste prosenten har en praktisk betydning, og du vil bli bedt om å kommentere begge.

For å kunne forstå **eksponentielle modeller**, må du først arbeide med **vekstfaktor**.

Prosentvis endring – vekstfaktor

Det er vanlig at prisen på de fleste varer og tjenester øker for hvert år. Siden varer og tjenester med høy pris vil øke med et høyere kronebeløp enn varer og tjenester med lav pris, er det vanlig å beskrive prisveksten med et **prosenttall**.

Vi anser den **opprinnelige** prisen på hver enkelt vare til å være 100 %. I 2021 er den antatte prisveksten på 2,6 %. Det betyr at i gjennomsnitt blir alle varer og tjenester 2,6 % dyrere enn de var ved inngangen til 2021.

Dette betyr at ved utgangen av 2021 har prisen på varer og tjenester steget til 102,6 % i forhold til prisen ved inngangen til 2021. Dette kaller vi **ny verdi i prosent**.

Endringen i prosent kan også være negativ. Som en følge av koronapandemien sank antall pasienter med døgnopphold på norske sykehus med 7 % i 2020, ifølge SSB.

Vi anser det **opprinnelige** antall pasienter med døgnopphold til å være 100 %. Med en nedgang på 7 %, vil **ny verdi i prosent** være 93 %. Det betyr at antall pasienter med døgnopphold i 2020 var 93 % i forhold til antall pasienter med døgnopphold i 2019.

Finne vekstfaktoren

$$100\ \% \pm \boldsymbol{endring\ i}\ \% = \boldsymbol{ny\ verdi\ i}\ \%$$

I forrige kapittel lærte du å gjøre **prosenttallet** om til et **desimaltall**. Det er dette **desimaltallet** vi kaller **vekstfaktor**

$$\frac{\boldsymbol{ny\ verdi\ i}\ \%}{100\ \%} = \boldsymbol{vekstfaktor}$$

Oppgave 13

Fyll ut tabellen nedenfor. Ta utgangspunkt i at **opprinnelig verdi** er 100 %.

-7 %	=	93 %	=	0,93		=		=	0,978
+ 7 %	=	107 %	=	1,07	+ 0,4 %	=		=	
- 7,5 %	=		=		- 17,5 %	=		=	
+ 12,3%	=		=			=	300 %	=	
+ 20 %	=		=			=		=	3,5
- 10 %	=		=		- 100 %	=		=	
	=		=	0,87	- 1,2 %	=		=	
	=	140 %	=			=		=	1,007
+ 100 %	=		=			=	100,2 %	=	
	=	70 %	=		- 25 %	=		=	

Bruke vekstfaktoren

Dersom vi får opplyst **opprinnelig verdi** og **endringen i prosent**, kan vi regne **ny verdi** ved hjelp av følgende **regnemetode**:

$$\boldsymbol{Opprinnelig\ verdi\ \cdot ny\ verdi\ i\ \% = ny\ verdi}$$

I oppgave 13 trente du på å gjøre **prosent** om til **desimaltall**. Dersom vi bruker **desimaltallet** i utregningen istedenfor **prosenten**, bruker vi ordet **vekstfaktor** om **desimaltallet**. Da får vi følgende **regnemetode**:

$$\boldsymbol{Opprinnelig\ verdi\ \cdot vekstfaktor = ny\ verdi}$$

Anta at en vare i 2020 kostet 143 kroner, og at prisen steg med 2,6 % i løpet av 2021.
For å finne prisen i 2021 kan vi enten multiplisere med **ny verdi i prosent**:

$Pris\ 2021 = 143kr\ \cdot 102{,}6\ \% \approx 147\ kr$

eller ved å multiplisere med **vekstfaktoren**:

$Pris\ 2021 = 143kr\ \cdot 1{,}026 \approx 147\ kr$

I 2019 ble det registrert omtrent 750 000 pasienter med døgnopphold på norske sykehus. I 2020 var dette antallet 7 % lavere. For å finne antall pasienter med døgnopphold i 2021 kan vi enten multiplisere med **ny verdi i prosent**:

$Antall\ pasienter\ med\ døgnopphold\ 2020 = 750\ 000\ \cdot 93\ \% = 697\ 500$

eller ved å multiplisere med **vekstfaktoren**:

$Antall\ pasienter\ med\ døgnopphold\ 2020 = 750\ 000\ \cdot 0{,}93 = 697\ 500$

Du velger selv hvilken metode du ønsker å bruke. Det er imidlertid greit å vite hvilke metoder du kan bruke på de ulike digitale hjelpemidlene:

Digitale hjelpemidler	Vekstfaktoren	Ny verdi i %
ExCel	✓	✓
GeoGebra	✓	✓
CAS	✓	✓
Kalkulator	✓	Ikke alle

Løs noen av oppgavene på neste side ved hjelp av ExCel og CAS.

Oppgave 14

I 2018 ble en leilighet kjøpt for 2 450 000 kr. I 2021 hadde verdien av leiligheten steget med 15 %. Hvor høy er verdien av leiligheten i 2021?

Oppgave 15

Nypris på en moped var 12 000 kr. Etter ett år hadde verdien sunket med 20 %. Hva var verdien på mopeden etter ett år?

Oppgave 16

Hanne har en timelønn på 160 kr. Hun blir lovet en lønnsøkning på 4,3 %. Hva blir den nye timelønna hennes?

Oppgave 17

Prisen på en aksje var 68 kr. Dagen etter hadde verdien sunket med 2,8 %. Hva ble den nye verdien på denne aksjen?

Oppgave 18

En familie kjøpte en leilighet i 2008 for 1,8 millioner kroner. De antar at leilighetens verdi har steget med 150 % frem til i dag. Hvor høy er verdien på leiligheten dersom familien har rett?

Oppgave 19

a) I januar 2019 kjøpte en person akser for et visst beløp. Verdien på aksjene kunne i juni beregnes utfra regnestykket 15 000 · 1,05. Hva forteller tallene 15 000 og 1,05?

b) Høsten 2020 startet et visst antall elever på VG1. Antall elever som fullførte året kan beregnes utfra regnestykket 140 · 0,875. Hva forteller tallene 140 og 0,875?

Flere prosentvise endringer

Vi må forvente at prisen på varer og tjenester fortsetter å øke i årene som kommer. For hver prisstigning må vi multiplisere den nye prisen med **vekstfaktoren.** Selv om **endringen i prosent** er lik for hvert år, vil prisstigningen i kroner bli høyere for hvert år.

Anta at varen som kostet 147 kroner i 2021 øker med 2,6 % hvert år de neste 4 årene. For hver prisendring må vi multiplisere med **vekstfaktoren**, noe som gir dette regnestykket:

$$Pris\ etter\ 4\ endringer = 147\ kr\ \cdot \underbrace{1{,}026 \cdot 1{,}026 \cdot 1{,}026 \cdot 1{,}026}_{\text{Dette kan forenkles ved hjelp av potens}} \approx 163\ kr$$

Vi får dermed:

$$Pris\ etter\ 4\ endringer = 147\ kr\ \cdot 1{,}026^4 \approx 163\ kr$$

Anta at antall pasienter med døgnopphold ved norske sykehus fortsetter å synke med 7 % hvert år i de neste tre årene. Vi kan dermed regne ut at

$$Antall\ pasienter\ med\ døgnopphold = 697\ 500\ \cdot 0{,}93^3 = 561\ 039$$

Vi kan regne ut **ny verdi** etter den siste **prosentvise endringen** ved hjelp av følgende **regnemetode**:

$$\boldsymbol{Opprinnelig\ verdi\ \cdot vekstfaktor^x = ny\ verdi}$$
$$\boldsymbol{der\ x\ ertattes\ av\ antall\ endringer}$$

Du legger kanskje merke til at vi kun har vist utregning ved hjelp av **vekstfaktoren**, og ikke ved hjelp av **ny verdi i prosent**? Grunnen ser du her:

Digitale hjelpemidler	**Vekstfaktoren**	**Ny verdi i %**	Kalkulator lar deg ikke bruke **prosenttall** ved potensregning
ExCel	✔	✔	
GeoGebra	✔	✔	
CAS	✔	✔	
Kalkulator	✔	✘	

Løs noen av oppgavene nedenfor ved hjelp av ExCel og CAS.

Oppgave 20

Hvis vi setter 10 000 kr i banken 1. januar, vil vi etter ett år få *renter* av pengene slik at beløpet på kontoen øker. Renten er en bergenes prosentvis av det beløpet vi har på kontoen.

Hvor mye vil vi ha på kontoen etter 5 år dersom renta er på 3 % per år?

Oppgave 21

En bærbar PC koster 9800 kr som ny. Vi regner med at verdien minker med 25 % i året. Hvor mye er PC-en verdt etter 4 år?

Oppgave 22

Anta at en aksje, som i dag er verdt 118 kr, stiger med 2 % hver dag den neste uka. Hvor høy er verdien på aksjen etter en uke (7 dager)?

Oppgave 23

Anta at en nytraktet kopp med kaffe holder 93 °C, og at temperaturen synker med 6,5 % per minutt de første minuttene (i normal romtemperatur). Hvor varm vil kaffekoppen være etter 3 minutter?

Oppgave 24

Knut kjøper en bil, og han vet at bilens verdi synker en viss prosentandel hvert år. Han ser for seg å beholde bilen i noen år, og han lager følgende regnestykke for å beregne hvor mye han kan selge bilen for:

$$Salgspris = 320\,000 \cdot 0{,}85^4$$

Hvor mye kjøpte Knut bilen for, hvor mange prosent antar Knut at verdien synker hvert år, og hvor mange år tenker Knut å beholde bilen før han selger den?

Hvor mye regner Knut å selge bilen for?

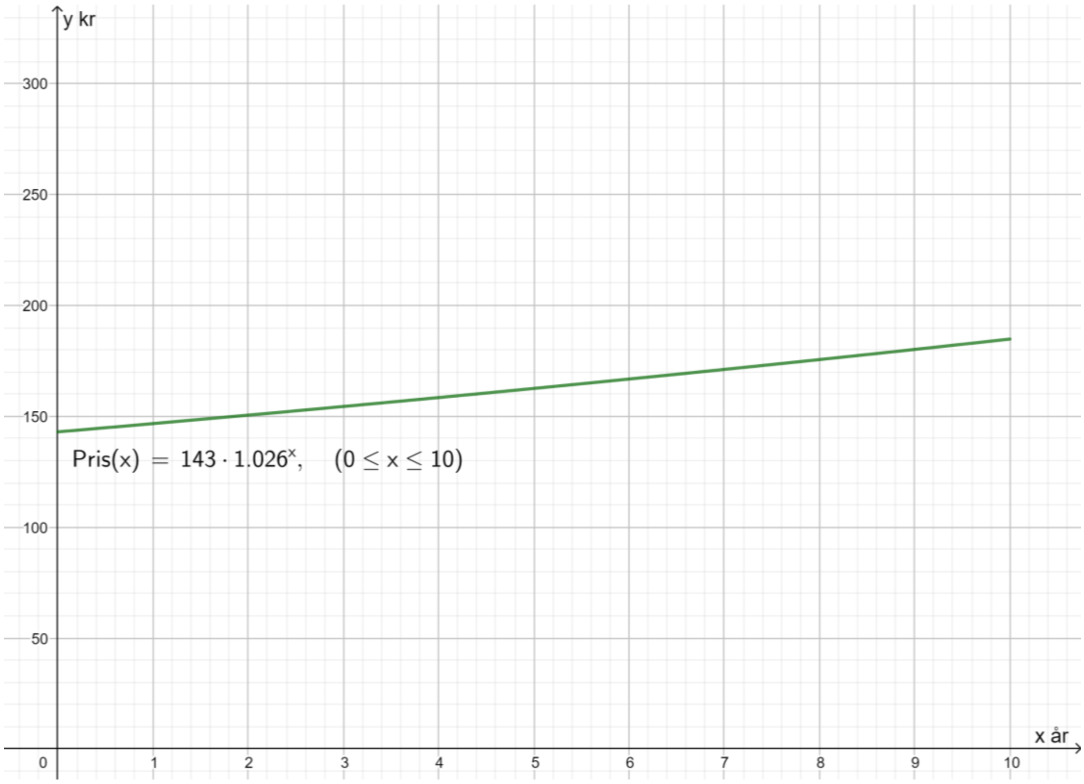
Ukjent antall endringer – eksponentiell utvikling

På de forrige sidene har vi sett på hvordan vi regner **ny verdi** etter et bestemt antall **prosentvise endringer**. Dersom vi ønsker å lage en **regnemetode** som gir oss mulighet til å finne **ny verdi** etter et ukjent antall **endringer**, må vi erstatte det kjente antallet **endringer** med variabelen x.

Nedenfor har vi beskrevet utviklingen i pris for varen fra tidligere eksempler.

Opprinnelig beløp	Etter 1 år	Etter 2 år	Etter 3 år	Etter x år
$143\ kr$	$143 \cdot 1{,}026^1$	$143 \cdot 1{,}026^2$	$143 \cdot 1{,}026^3$	$143 \cdot 1{,}026^x$

Grafisk vil utviklingen se slik ut:



For ordens skyld har vi avgrenset **modellen** til å være **gyldig** i 10 år fremover.

Funksjonsuttrykket $143 \cdot 1{,}026^x$ er skrevet på formen $y = a \cdot b^x$.

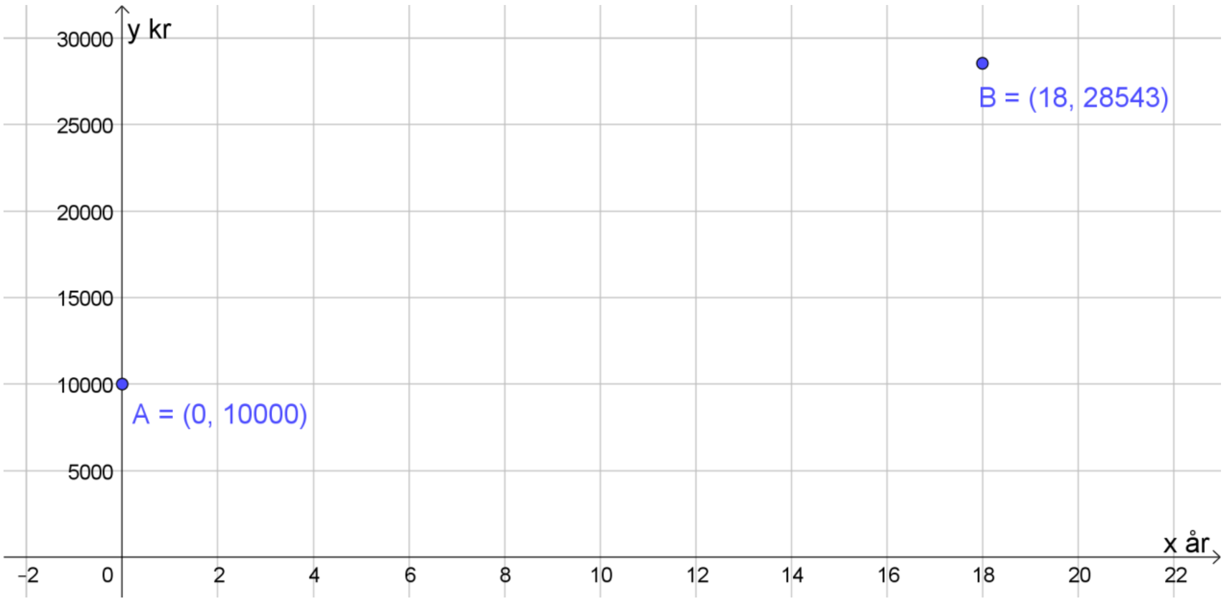
143 er **funksjonens opprinnelige verdi**, og forkortes a

1,026 er **funksjonens vekstfaktor**, og forkortes b.

I oppgaver vil du bli bedt om å tolke **funksjonsuttrykket.**

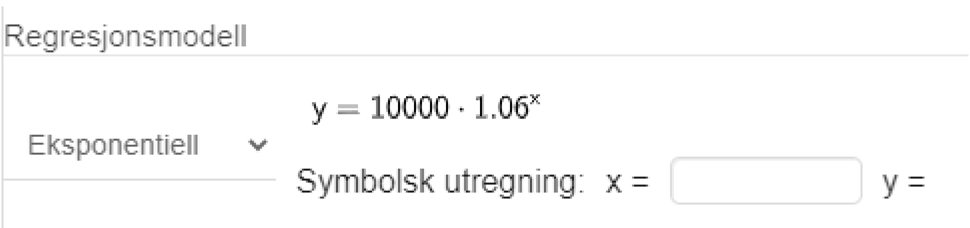
Eksponentielle modeller utfra punkter

Tenk deg at foreldrene til et nyfødt barn satte inn et beløp i et aksjefond da barnet ble født. Foreldrene forventer at verdien til aksjefondet stiger frem til barnet blir 18 år.



Kan **punktene** i **koordinatsystemet** ovenfor brukes til å finne aksjefondets årlige verdiøkning, dersom aksjefondet har steget med en fast **prosent** hvert år?

Vi skriver punktene inn i regnearket i GeoGebra, og ber GeoGebra utføre en regresjonsanalyse. Deretter velger vi en eksponentiell modell, og får dette funksjonsuttrykket:



Funksjonsuttrykket gir oss denne informasjonen:

10 000 er det opprinnelige beløpet foreldrene plasserte i aksjefondet da barnet ble født.

1,06 = 106 %, som betyr 6 % årlig verdiøkning.

Også her kan du bli bedt om å finne **tilhørende** x- og y- **verdier**, og det gjøres på samme måte som tidligere.
I tillegg kan du bli bedt om å finne **momentan-** og/eller **gjennomsnittlig vekstfart**.

Momentan vekstfart i ett punkt

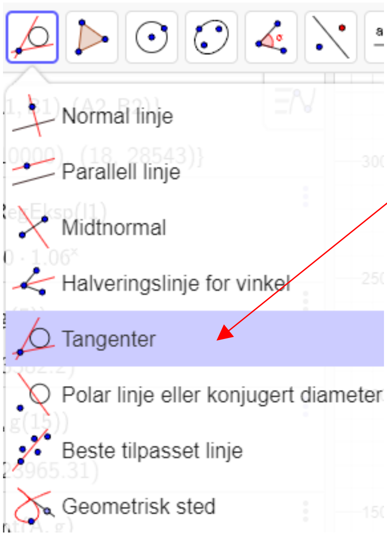
Det kan være interessant å beskrive **endringen** i y- verdi utfra ett bestemt **punkt**. Det er dette som kalles **momentan vekstfart**.

Tenk deg at vi ønsker å finne økningen i aksjefondets **verdi** i år 5 og i år 15, og sammenligne disse økningene.

For å finne den **momentane vekstfarten** til y i ett bestemt **punkt** må vi først skrive inn den oppgitte x- **verdien**. Som vi har beskrevet tidligere kan dette gjøres på flere måter. Vi velger her å skrive (5,g(5)) og (15,g(15)).

Deretter velger vi «Tangent», og trykker på **grafen** og **punktet** vi lagde. Dette må gjøres for begge **punktene**.

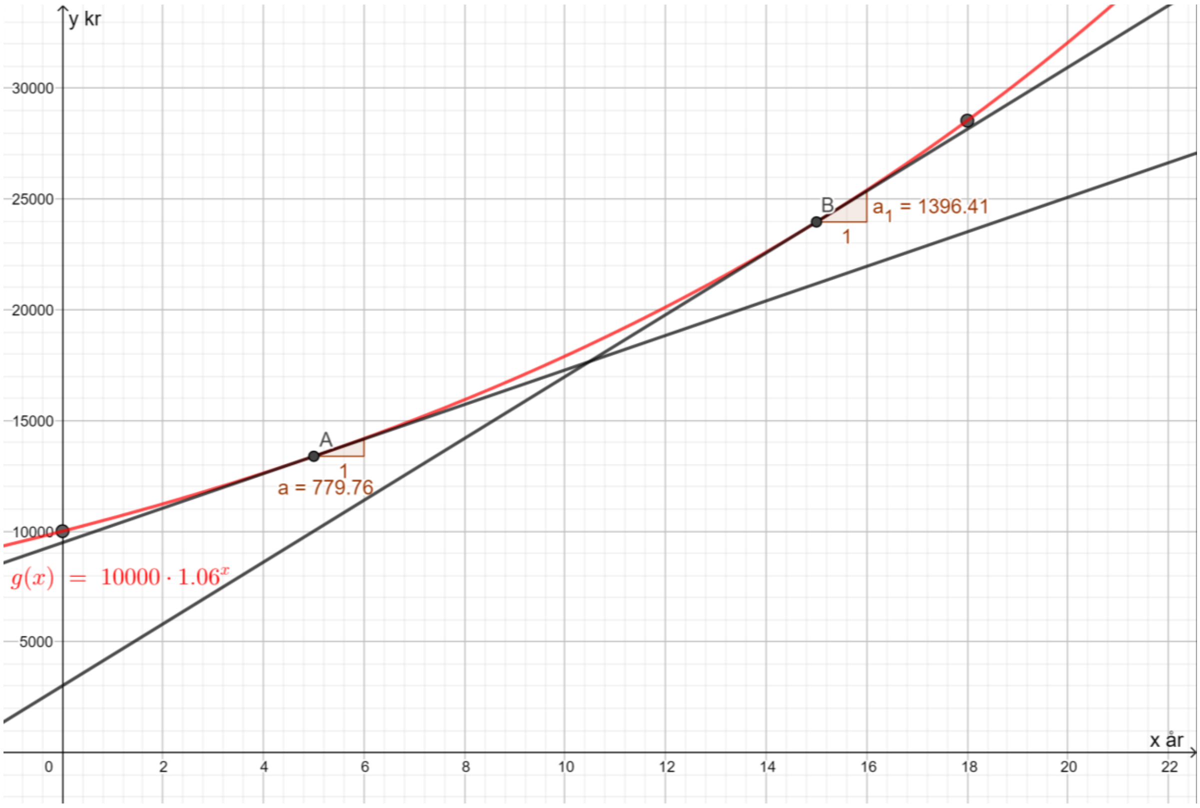
Vi er ute etter **stigningstallet** til denne tangenten. **Stigningstallet** forteller om **utviklingen** i y- **verdi** i akkurat dette **punktet**. Velg «Stigning», og trykk på begge tangentene.



Tangent finner du her:

Stigning finner du her:

Grafikkfeltet vil se slik ut:



Stigningstallet a forteller oss at i år 5 har aksjefondets **verdi** en vekst *tilsvarende* 779,76 kroner per år.

Stigningstallet a_1 forteller oss at i år 15 har aksjefondets **verdi** en vekst *tilsvarende* 1396,41 kroner per år.

Det er interessant å se at aksjefondets **verdi** stiger mer i år 15 enn i år 5, selv om den **prosentvise endringen** er lik. Dette er en egenskap ved **eksponentielle modeller** som viser **positiv utvikling**, og det som gjør at **grafen** har en buet form.

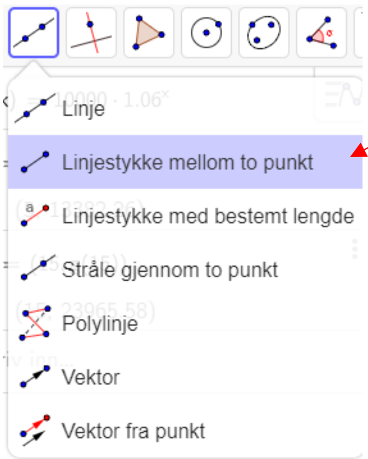
Dersom den **eksponentielle modellen** viser **negativ utvikling,** vil det motsatte gjelde. Jo høyere x-**verdi** vi velger, desto lavere blir nedgangen i y- **verdi**.

Gjennomsnittlig vekstfart mellom to punkter

Det kan også være interessant å beskrive **endringen** i y- verdi mellom to **punkter**. Det er dette som kalles **gjennomsnittlig vekstfart**.

Tenk deg at vi ønsker å finne den årlige økningen i aksjefondets **verdi** mellom år 5 og år 15.For å finne den **gjennomsnittlige vekstfarten** til y mellom to **punkter** må vi først lage **punktene**. I dette eksempelet skal vi bruke **punkter** vi allerede har funnet.

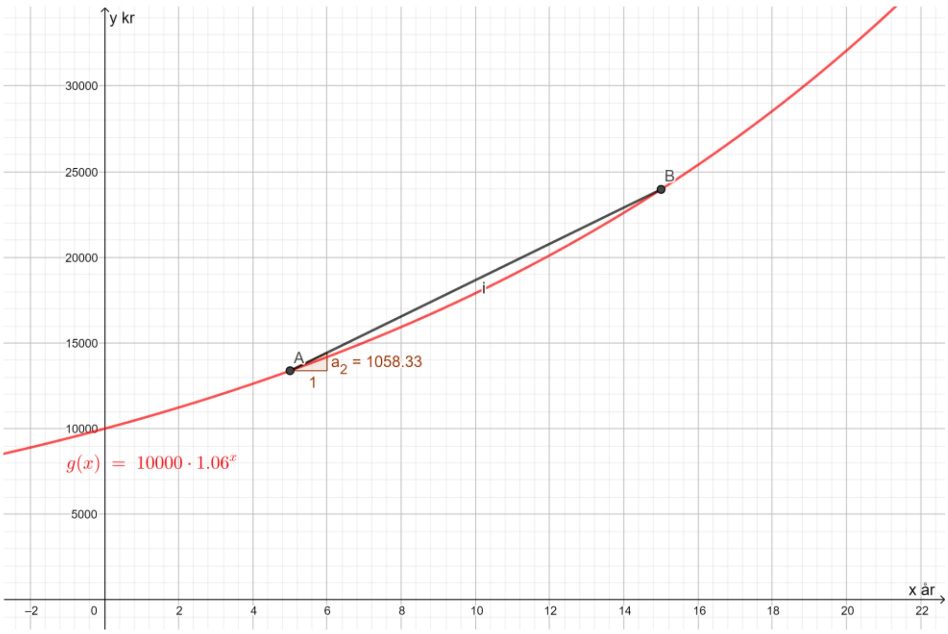
Deretter velger vi «Linjestykke mellom to punkt), og trykker på **punktene** vi lagde. Vi er ute etter **stigningstallet** til dette linjestykket. **Stigningstallet** forteller om gjennomsnittlig **utvikling** i y- **verdi** mellom disse **punktene**. Velg «Stigning», og trykk på linjestykket.



Linjestykke finner du her:

Stigning finner du her:

Grafikkfeltet vil se slik ut:



For ordens skyld har vi fjernet (men ikke slettet) tangentene vi lagde da vi fant **momentan vekstfart**.

Stigningstallet a_s forteller oss at mellom år 5 og 15 har aksjefondet i gjennomsnitt steget med 1 058,33 kroner per år.

Oppgave 25

En nyåpnet videregående skole presenterte følgende elevtall for to utvalgte år etter oppstart:

År etter oppstart	1	3
Elevtall	620	680

Skolens ledelse antar at utviklingen i skolens elevtall kan beskrives med en prosentvis endring som er gyldig i noen år fremover.

Bruk tallene i tabellen til å lage en modell som kan brukes til å beskrive utviklingen i skolens elevtall. Hva forteller modellen om den prosentvise endringen per år i skolens elevtall?

Bruk modellen til å vise at du kan:

- Finne og tolke momentan vekstfart i ett punkt.
- Finne gjennomsnittlig endring i y- verdi mellom to punkter.

Oppgave 26

Ved en annen nyåpnet videregående skole så elevtallet slik ut i to utvalgte år:

År etter oppstart	1	3
Elevtall	1420	1217

Skolens ledelse antar at utviklingen i skolens elevtall kan beskrives med en prosentvis endring som er gyldig i noen år fremover.

Bruk tallene i tabellen til å lage en modell som kan brukes til å beskrive utviklingen i skolens elevtall. Hva forteller modellen om den prosentvise endringen per år i skolens elevtall?

Bruk modellen til å vise at du kan:

- Finne og tolke momentan vekstfart i ett punkt.
- Finne gjennomsnittlig endring i y- verdi mellom to punkter.

En eksamensoppgave

Tabellen nedenfor viser antall innbyggere i Norge 1. januar noen utvalgte år.

År	1960	1970	1980	1990	2000	2010	2017
Innbyggere (millioner)	3,57	3,86	4,08	4,23	4,47	4,85	5,25

La *x* være antall år etter 1960. (La $x = 0$ svare til år 1960, $x = 10$ til 1970 osv.)

Før du begynner med oppgavene nedenfor må du regne ut x- verdiene til alle årstallene

a) Vis at $f(x) = 3{,}57 \cdot 1{,}006^x$ er en modell som passer godt med tallene i tabellen.

b) Hva forteller tallet 1,006 i denne modellen?

Anta at modellen fra oppgave a) vil gjelde i årene framover.

c) I hvilket år vil innbyggertallet i Norge passere 10 millioner ifølge denne modellen?

En eksamensoppgave

Dato	1. juni	1. juli	1. august	1. september
Antall tusen registrert smittet	6278	10 660	17 837	25 761

Tabellen viser antall tusen personer som totalt var registrert smittet av covid-19 noen dager i 2020.

La $x = 1$ svare til 1. juni, $x = 2$ til 1. juli, $x = 3$ til 1. august og $x = 4$ til 1. september.

a) Bruk regresjon til å vise at funksjonen f gitt ved

$$f(x) = 4038 \cdot 1{,}608^x$$

kan brukes som en modell for antall tusen personer som totalt var registrert smittet måned for måned i denne perioden.

b) Hvor mange prosent økte det totale antallet registrert smittede personer med per måned ifølge modellen?

Eksponentielle modeller utfra funksjonsuttrykk

Tenk deg at du kjøper en moped når du blir 16 år, og selger denne når du blir 20 år. I hvert av de fire årene du eier mopeden, vil mopedens **verdi** synke med en fast prosent.

Funksjonen

$$M(x) = 15000 \cdot 0.85^{x} \quad , \quad 0 \leq x \leq 4$$

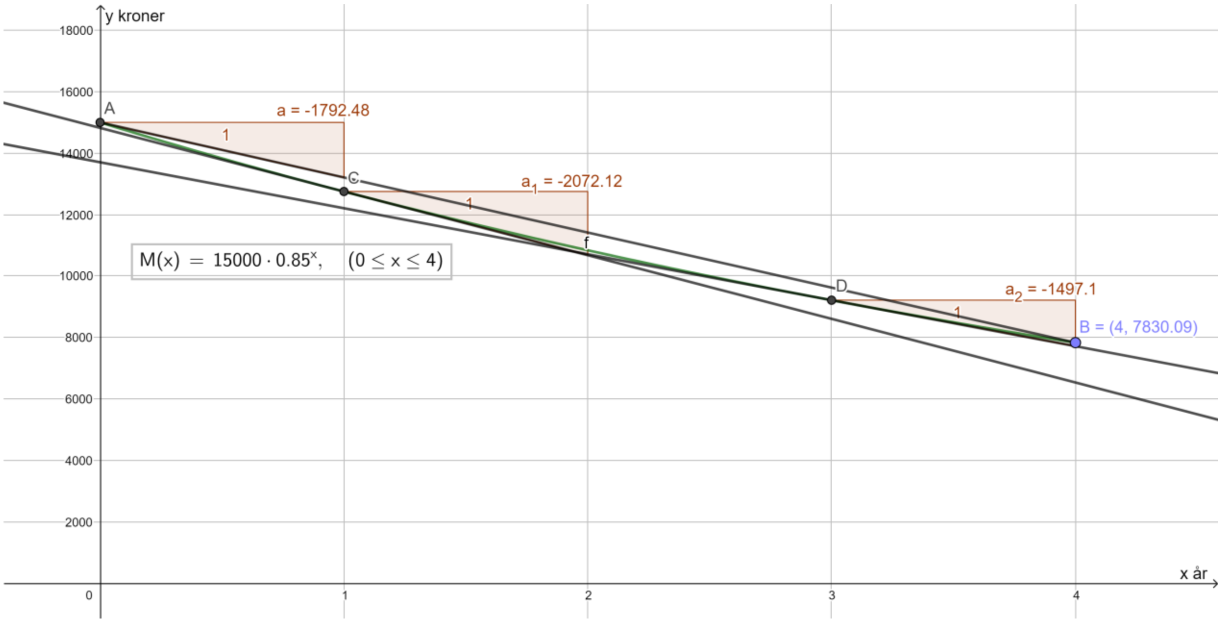
kan brukes til å beregne mopedens **verdi** $M(x)$ kroner x år etter at du kjøpte den.

Hvilken interessant informasjon kan vi finne ved hjelp av **funksjonsuttrykket**?

- **Opprinnelig verdi** er 15000. Dette er summen du kjøper mopeden for.
- **Vekstfaktoren** er 0,85. Dette betyr at mopedens verdi synker med 15 % i året
- $0 \leq x \leq 4$ er **funksjonens** avgrensning. Dette betyr at funksjonen er gyldig for x- verdier mellom 0 og 4.

Ved å tegne **grafen** i GeoGebra, kan vi finne ut at:

- **Punkt** B forteller at forventet salgsverdi om 4 år er omtrent 7 800 kroner. Dette betyr at du må forvente et verditap på omtrent 7 200 kroner på dette kjøpet.
- **Stigningstall** a forteller at mopedens **verd**i i gjennomsnitt synker med omtrent 1 800 kroner per år.
- **Stigningstall** a_1 forteller at etter 1 år synker mopedens **verdi** tilsvarende omtrent 2 072 kr per år.
- **Stigningstall** a_2 forteller at etter 3 år synker mopedens **verd**i tilsvarende omtrent 1 500 kr per år.
- Verditapet per år blir altså lavere jo lenger du har eid mopeden. Dette er en egenskap ved **eksponentielle modeller** med negativ **utvikling**.



Oppgave 27

En familie kjøper en bil.

Funksjonen

$$f(x) = 420000 \cdot 0{,}82^x \quad , \quad 0 \leq x \leq 8$$

kan brukes til å beregne bilens verdi $f(x)$ kroner x år etter kjøpet av bilen, og frem til familien planlegger å selge bilen.

Bruk funksjonsuttrykket og grafen til å finne interessant informasjon om bilens verdi.

Oppgave 28

Familien kjøpte samtidig en leielighet.

Funksjonen

$$L(x) = 3480000 \cdot 1{,}08^x \quad , \quad 0 \leq x \leq 15$$

kan brukes til å beregne leilighetens verdi $L(x)$ kroner x år etter kjøpet av leiligheten, og frem til familien planlegger å selge leiligheten.

Bruk funksjonsuttrykket og grafen til å finne interessant informasjon om leilighetens verdi.

Oppgave 29

Funksjonen *N* gitt ved

$$N(x) = 5{,}32 \cdot 10^6 \cdot 1{,}008^x \qquad 0 \leq x \leq 9$$

kan brukes til å regne ut befolkningen *N(*x*)* i Norge *x* år etter 1. januar 2021.

Bruk funksjonsuttrykket og grafen til å finne interessant informasjon om Norges befolkning.

Oppgave 30

Spørsmålet om hvor mange mennesker som kan leve på jorda har vært stilt en rekke ganger. Funksjonen gitt ved

$$F(x) = 7{,}83 \cdot 10^9 \cdot 1{,}0114^x \quad 0 \leq x \leq 10$$

kan brukes til å beregne folketallet på jorda *x* år etter 1. januar 2021.

Bruk funksjonsuttrykket og grafen til å finne interessant informasjon om verdens folketall.

Oppgave 31

Funksjonen *O* gitt ved

$$O(x) = 1{,}1 \cdot 10^{13} \cdot 1{,}063^x \qquad 0 \leq x \leq 10$$

viser forventet verdi av Statens pensjonsfond utland (Oljefondet) *O(*x*)* for x år etter 1. januar 2021.

Bruk funksjonsuttrykket og grafen til å finne interessant informasjon om Norges fondsformue.

Oppgave 32

En kopp med rykende varm kaffe settes på kjøkkenbenken. Funksjonen

$$T(x) = 93 \cdot 0{,}83^x$$

er en modell som viser temperaturen $T(x)$ grader °C til kaffen, x minutter etter at koppen blir satt på kjøkkenbenken.

Hvilket gyldighetsområde vil du si at modellen kan ha?

Oppgave 32

Funksjonen O gitt ved

$$O(x) = 697000 \cdot 1{,}008^x$$

kan brukes til å beregne folketallet i Oslo x år fremover.

Hvilket gyldighetsområde vil du si at modellen kan ha?

Sammenligne lineære og eksponentielle modeller

Det kan ofte være interessant å analysere en utvikling ved hjelp av ulike modeller. For å avgjøre hvilken av modellene som best beskriver utviklingen må vi sammenligne hva modellene spår med en reell observasjon.

Oppgave 33

Tabellen viser folketallet y i Norge (i millioner) fra 1950 (x = 0) til 2000 (x = 50).

År	**1950**	**1960**	**1970**	**1980**	**1990**	**2000**
x	0					
***y* folketall i millioner**	3,2	3,6	3,9	4,1	4,2	4,5

Finn ved regresjon en lineær modell som passer godt til denne utviklingen. Omtrent hvor mye har folketallet økt per år ifølge denne modellen?

Finn en modell på formen $y = a \cdot b^x$ som passer godt til denne utviklingen. Omtrent hvor mye øker folketallet per år ifølge denne modellen?

Undersøk folketallet i Norge i dag.
Hvilken av modellene passer best med dagens folketall?

Oppgave 34
Lars og Lene forsker på hvordan antallet hoppekreps i et ferskvann endrer seg. Tabellen nedenfor viser antall observerte hoppekreps noen dager i april og mai.

Dato	30. april	3. mai	4. mai	6. mai
Antall hoppekreps	10 000	20 000	30 000	120 000

Ut fra disse observasjonene vil Lars og Lene lage ulike modeller. De lar x være antall dager etter 30. april, og y være antall hoppekreps.

Når Lars lager sin modell, antar han at antallet hoppekreps øker med et fast antall hver dag.

a) Bestem modellen han da får.
Gjør rede for hva hvert av tallene i modellen betyr i denne praktiske situasjonen.

Når Lene lager sin modell, antar hun at antallet hoppekreps øker med en fast prosent hver dag.

b) Bestem modellen hun da får.
Gjør rede for hva hvert av tallene i modellen betyr i denne praktiske situasjonen.

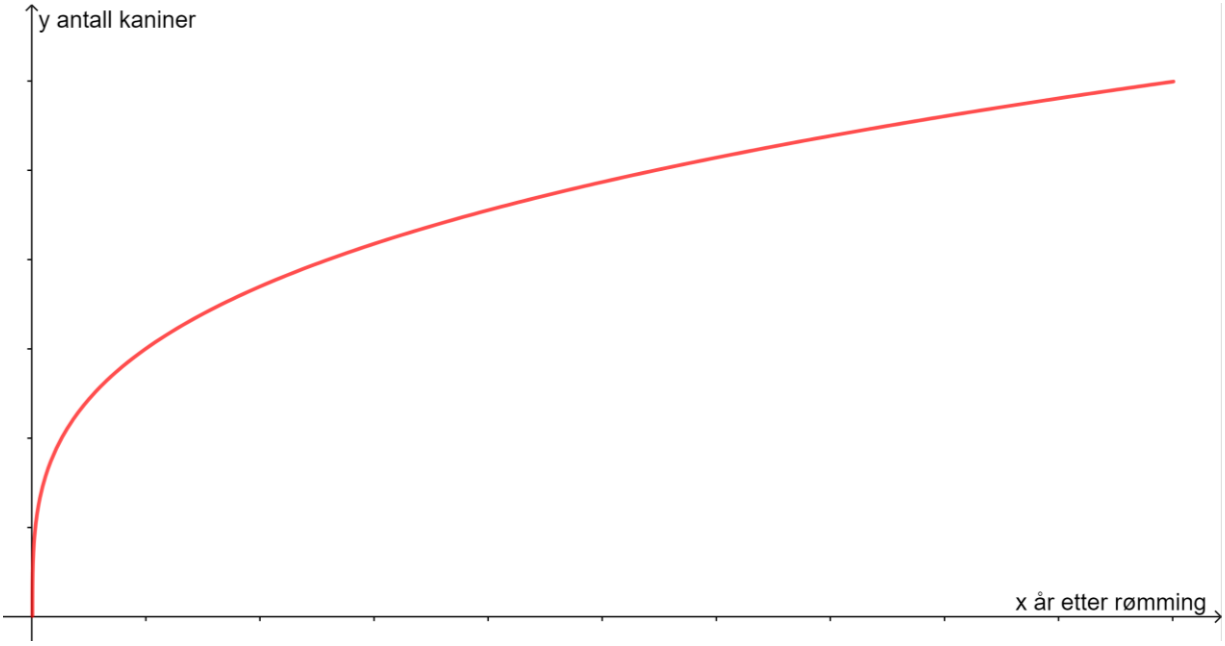
9. mai ble det registrert omtrent 150 000 hoppekreps i ferskvannet.

c) Avgjør om utviklingen i antall hoppekreps passer best med modellen du lagde i a) eller modellen du lagde i b)

Potensutvikling: $y = a \cdot x^b$

Dersom vi ønsker å beskrive en **utvikling** i y**-verdier** hvor **utviklingen** er positiv men avtakende etter hvert som x øker, må vi beskrive denne **utviklingen** ved hjelp av **potens**.

På slutten av syttitallet rømte noen kaniner fra oppdrett på Gressholmen, som er en øy i Oslofjorden. Siden det ikke finnes rovdyr på øya vokste kaninpopulasjonen uforstyrret. Dette førte til at antall kaniner på øya økte enormt de første årene. Etter hvert påvirket andre faktorer til at økningen i antall kaniner avtok, men det ble stadig flere kaniner på øya.
Dette er et eksempel på en **utvikling** som må beskrives ved hjelp av **potenser**, og **grafen** vil se slik ut:



Vi ser at grafen er brattest i starten, og deretter avtar. Merk: den synker aldri!

I **funksjonsuttrykket** $y = a \cdot x^b$ står **a** og **b** for tall. Eksempler på **potensfunksjoner** kan være:

$$f(x) = 3x^{0,8}$$
$$g(x) = 23x^{1.2}$$
$$h(x) = 12x^{-0.7}$$

Det kan være nyttig å vite at $x^{0,5}$ er det samme som $\sqrt{x}$, slik at også en **rotfunksjon** kan skrives som en **potensfunksjon**.

Du velger potens her

Oppgave 35

Hunder utvikler seg raskere enn mennesker, og en hund regnes som voksen når den er 2 år gammel. I noen sammenhenger er det nyttig å kunne regne ut hundens biologiske alder. Dette kalles populært for hundeår.

På agria.no kan vi finne følgende sammenheng mellom levealder og biologisk alder for en type hunder:

Levealder	0,5 år	1 år	2 år	3 år	4 år
Biologisk alder (hundeår)	10 år	16 år	24 år	31 år	38 år

Kine har en hund av denne typen. Hun mener at sammenhengen mellom *x* år og *B* biologisk alder for hunden hennes kan beskrives med en modell på formen

$$B(x) = p \cdot x^q$$

a) Bruk datamaterialet i tabellen til å bestemme tallene *p* og *q*
b) Bruk modellen du fant i oppgave a) til å finne den biologiske alderen til en 6 år gammel hund.

Det er vanlig å dele hunder inn i tre ulike typer: små/mellomstore hunder, store hunder og veldig store hunder. På agria.no kan vi finne følgende informasjon om en 12 år gammel hund:

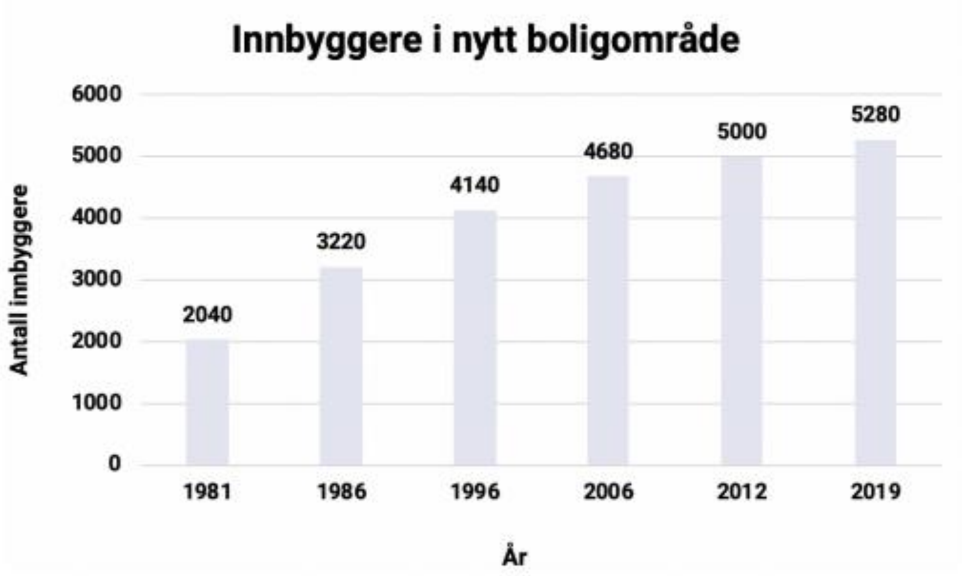
	Biologisk alder (hundeår)		
Levealder	Små/mellomstore hunder	Store hunder	Veldig store hunder
12 år	74 år	84 år	94 år

Kines hund er 12 år

c) Hvilken type hund er det rimelig å anta at Kine har?

Oppgave 36

I løpet av 1981 flyttet 2 040 personer inn i et nytt boligområde. Diagrammet nedenfor viser hvor mange personer som bodde i boligområdet noen år i perioden 1981 – 2019.



Svein er byplanlegger i kommunen. Han antar at antall innbyggere i boligområdet vil fortsette å øke i årene fremover, men at økningen vil gå saktere og saktere etter hvert.

Les av på diagrammet og fyll inn i regnearket på geogebra.
La *x* være antall år etter 1980, slik at *x* = 0 tilsvarer 1980, *x* = 1 tilsvarer 1981 osv.

a) Bruk opplysningene i diagrammet, Sveins antakelse og det du vet om ulike typer funksjoner, til å lage en modell som tilnærmet beskriver utviklingen.

b) Finn den momentane vekstfarten til $x = 10$ og $x = 30$. Hva forteller disse tallene?

c) Stemmer tallene du fant i b) med Sveins antakelser?

En fremtidsprognose forteller at det i 2040 vil bo cirka 5600 innbyggere i dette boligområdet.

d) Hvor godt stemmer dette med modellen du lagde i a)?

En eksamensoppgave

År	2009	2010	2012	2013	2015	2018	2019
Sildebestand (1000 tonn)	10 150	8700	7102	6690	6249	5642	5317

Tabellen ovenfor viser bestanden av norsk vårgytende sild noen utvalgte år i perioden fra 2009 til 2019.

La x være antall år etter 2008.

Olav har kommet fram til følgende modell for sildebestanden

$$S(x) = 10283 \cdot x^{-0,265}$$

a) Bruk regresjon til å vise hvordan Olav kan ha kommet fram til denne modellen.

b) Hvor stor var sildebestanden i 2011 ifølge Olavs modell?

Havforskningsinstituttets foreløpige beregninger viser at sildebestanden vil være 13 % lavere i 2020 enn året før.

c) Vurder om Olavs modell samsvarer med denne prognosen.

Polynomisk utvikling: $y = ax^2 + bx + c$

Felles for **lineær** og **eksponentiell utvikling** er at **utviklingen** enten er positiv eller negativ. Dersom vi skal beskrive **utvikling** som både er positiv og negativ, må vi bruke **polynomiske modeller**.

Ordet **poly** betyr flere, og en **polynofunksjon** består av flere **ledd**. En **polynomfunksjon** inneholder **variabler** med ulike eksponenter, og den høyeste eksponenten bestemmer graden.

Et **tredjegradspolynom** inneholder et **ledd** med x^3 som høyeste eksponent.

Et **andregradspolynom** inneholder et **ledd** med x^2 som høyeste eksponent.

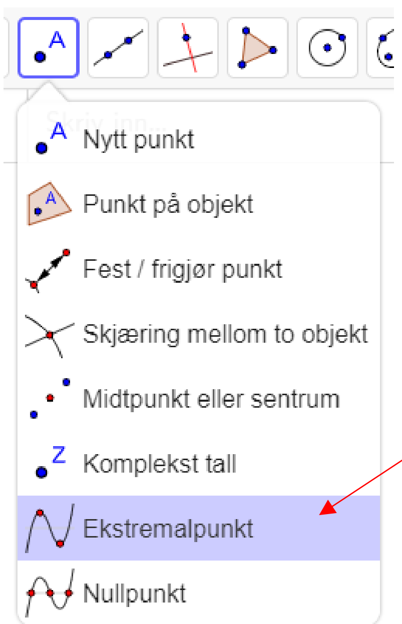
Du velger polynom her

og grad her

Høyest eller lavest verdi – ekstremalpunkt

En utvikling som både stiger og synker vil ha en lavest og en høyest **funksjonsverdi**. Dette kan vi enten finne i ett av **endepunktene** til **grafen**, eller ved å bruke «Ekstremalpunkt».

Ved å velge «Ekstremalpunkt» ber vi GeoGebra finne x- og y- **verdier** der den **momentane vekstfarten** er null. Det er kanskje enklere å tenke at vi ber GeoGebra finne x- og y- **verdier** der **grafen** snur.



Du finner «snupunktene» ved å velge «Ekstremalpunkt» her:

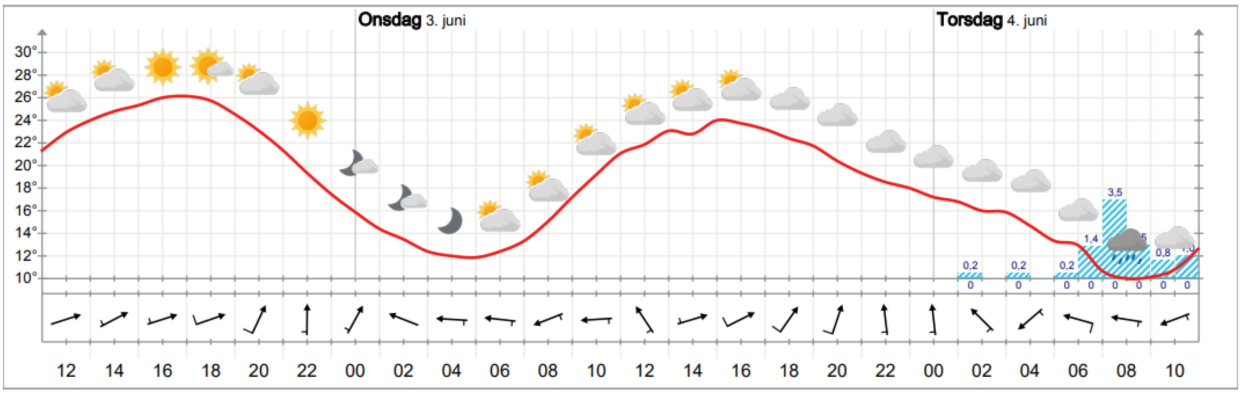
Deretter trykker du hvor som helst på grafen.

Oppgave 37

Yr.no har følgende prognose for temperaturen på Hellerud onsdag 3. juni:

Klokkeslett	0	2	3	5	8	10	11	14	15	17	20	21	22	23
Temperatur	16	13	12	12	15	19	21	23	24	23	20	19	18	18

I tillegg bruker nettsiden følgende linjediagram for å vise den forventet temperatur samme dag:



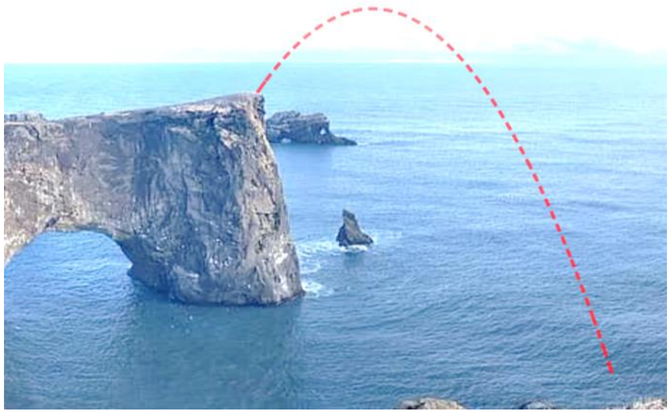
Legg informasjonen i tabellen inn som punkter i GeoGebra, og velg en modell med en graf som ligner på linjediagrammet ovenfor. Finn høyest og lavest temperatur onsdag 3. juni.

Oppgave 38

Tenk deg at du står på en klippe ved vannet, og kaster en stein ut i vannet. Steinen vil følge en kurve som kan beskrives ved hjelp av funksjonsuttrykket

$$H(x) = -5x^2 + 10x + 25$$

hvor x er antall sekunder som har gått siden steinen ble kastet, og H er steinens høyde over havoverflaten.



Bruk informasjonen i oppgaven og funksjonsuttrykket til å vise at du kan

- Drøfte gyldighetsområdet for funksjonsuttrykket
- Si noe om hvor høyt steinen kastes fra, og når den treffer vannet
- Finne kurvens høyeste punkt
- Forklare hvilke fremgangsmåter du har brukt

En eksamensoppgave

I denne oppgaven skal vi bruke funksjonen S gitt ved

$$S(x) = -3x^4 + 305x^3 - 9000x^2 + 66000x + 495000 \quad , \quad 0 \le x \le 50$$

som en modell for seibestanden $S(x)$ tonn i Arktis x år etter 1960.

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til S.

b) I hvor mange år var seibestanden lavere enn 450 000 tonn?

c) Hvor mange tonn steg seibestanden i gjennomsnitt med per år fra den var på sitt laveste, til den var på sitt høyeste?

d) Bestem den momentane vekstfarten til S i 1970.
Gi en praktisk tolkning av svaret.

En eksamensoppgave

Anta at funksjonen A gitt ved

$$A(x) = 0{,}002x^4 - 0{,}13x^3 + 2{,}75x^2 - 18x + 118 \quad , \quad 0 \le x \le 30$$

kan brukes som en modell som viser verdien $A(x)$ kroner av en aksje x uker etter 01.01.2017.

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til A.

b) I hvor mange uker var verdien av aksjen lavere enn 92 kroner?

c) Bestem forskjellen mellom laveste og høyeste verdi av aksjen de 30 første ukene av 2017.

d) Hvor mye steg aksjen i verdi i gjennomsnitt per uke de 30 første ukene i 2017?

e) Bestem den momentane vekstfarten til funksjonen A når $x = 22$.
Gi en praktisk tolkning av dette svaret.

En eksamensoppgave

Et firma produserer vanntanker. Carl har undersøkt en av tankene og funnet ut at dersom tanken er full og kranen åpnes, vil det etter x minutter være $V(x)$ liter vann igjen i tanken, der

$$V(x) = (10 - 0{,}1x^2)^3 \quad , \quad 0 \le x \le 10$$

a) Bestem $V(0)$, og gi en praktisk tolkning av svaret du får.

b) Bruk graftegner til å tegne grafen til V.

c) Hvor lang tid går det fra kranen åpnes, til det er 400 L vann igjen i tanken?

d) Hvor mye vann renner i gjennomsnitt ut av tanken per minutt mens den tømmes?

e) Bestem den momentane vekstfarten til funksjonen V når $x = 3$.
Gi en praktisk tolkning av svaret du får.

En eksamensoppgave

Kari tapper ut vannet av en badestamp. Volumet V liter av vannet i badestampen x minutter etter at hun har åpnet kranen, er gitt ved

$$V(x) = 2 \cdot (30 - x)^2 \quad , \quad 0 \le x \le 30$$

a) Tegn grafen til V.

b) Hvor lang tar det ta å tappe ut halvparten av vannet?

c) Hvor mye vann renner i gjennomsnitt ut per minutt fra Kari åpner kranen, til badestampen er tom?

d) Bestem den momentane vekstfarten til funksjonen V når $x = 15$.
Gi en praktisk tolkning av svaret.

Lineære og eksponentielle modeller uten hjelpemidler

Det er fullt mulig å lage både **lineære** og **eksponentielle modeller** uten å bruke GeoGebra, men dette krever at vi finner **konstantledd** og **stigningstall/vekstfaktor** ved hjelp av regning.

En gullsmedforretning selger gullringer med mulighet for å sette inn diamanter. Butikken selger alle diamantene til samme pris. Det betyr at sammenhengen mellom prisen og antall diamanter kan beskrives på formen $y = ax + b$, hvor

x = antall diamanter

y = prisen for gullring med x antall diamanter

a = prisen per diamant (stigningstall)

b = prisen for gullringen (konstantledd)

Nedenfor finner du oversikt over pris for en gullring med 1 diamant og en gullring med 3 diamanter.

x antall diamanter	1	3
y pris for gullring med diamanter	1 800	3 400

(Vi betrakter dette som punkter)

Ut fra denne tabellen kan vi både regne ut hvor mye hver diamant koster, og prisen på selve gullringen. Vi starter med å regne ut prisen for hver diamant, fordi det er antall diamanter som endres fra det ene priseksempelet til det andre.

Å lage en tegning kan være til hjelp i slike oppgaver:

Pris:	Hva som kjøpes:
1 800 kroner	 + 
3 400 koner	 + 

Vi kan se at en økning på to diamanter fører til en økning på 1 600 kroner. Det betyr at hver av diamantene koster 800 kroner, noe som betyr at prisen stiger med 800 kroner for hver diamant. Det gir oss denne formelen for **stigningstallet**:

$$Stigningstall = \frac{endring\ i\ y - verdi}{endring\ i\ x - verdi}$$

I dette tilfellet blir det: $\frac{3\,400\ kr - 1\,800\ kr}{3\ diamanter - 1\ diamant} = \frac{1\,600\ kr}{2\ diamanter} = 800\ kr/diamant$

Når vi har funnet prisen per diamant, kan vi bruke denne informasjonen til å finne prisen for selve ringen ved å bruke ett punktene. Det spiller ingen rolle hvilket av punktene vi tar utgangspunkt i, men det blir enklere regning dersom vi velger priseksempelet med 1 diamant.

Fra før vet vi at:

 +  = 1 800 kr

Vi har regnet ut at diamanten koster 800 kr. Dermed får vi følgende likning og løsning:

$Ring + 800\ kr = 1\ 800\ kr$

$Ring = 1\ 800\ kr - 800\ kr$

$Ring = 1\ 000\ kr$

Nå som vi har funnet prisen for både ringen og hver diamant, kan sammenhengen mellom antall diamanter og prisen beskrives slik:

$$Pris\ for\ gullring\ med\ diamanter = 800\ kr\ per\ diamant + 1\ 000\ kr\ for\ gullringen$$

eller

$$y = 800x + 1\ 000$$

En eksamensoppgave

I en butikk kan kundene kjøpe armbånd og charms (små figurer) til å feste på armbåndene. Butikken selger alle charms til samme pris.

Tabellen nedenfor viser sammenhengen mellom antall charms en kunde setter på et armbånd, og prisen kunden må betale for armbåndet med charms.

Antall charms	3	7
Pris for armbånd med charms (kroner)	1350	2450

a) Hvor mye koster armbåndet, og hvor mye koster hver charm?

b) Bestem en lineær modell som viser sammenhengen mellom antall charms på armbåndet og samlet pris for armbånd med charms.

Hanne betaler 3825 kroner for et armbånd med charms.

c) Hvor mange charms har hun på armbåndet?

Oppgave 39

I en skobutikk kan kundene kjøpe Crocs-sko og småfigurer til å feste på skoene. Alle småfigurene har samme pris.

Tabellen nedenfor viser sammenhengen mellom antallet småfigurer en kunde kjøper og setter på Crocs-skoene, og prisen kunden betaler for skoene med småfigurer.

Antall småfigurer	4	9
Prisen for sko med småfigurer	680	930

a) Hvor mye koster Crocs-skoene, og hvor mye koster hver av småfigurene?
b) Bestem en lineær modell som viser sammenhengen mellom antall småfigurer på skoene og samlet pris for skoene med småfigurer.

Turid betaler 1030 kroner for ett par Crocs-sko med småfigurer.

c) Hvor mange småfigurer har hun kjøpt til skoene sine?

En resturant opplever nedgang i antall kunder, og innehaveren frykter at denne utviklingen vil fortsette i årene fremover.

I 2019 hadde resturanten 20 000 gjester. I 2020 hadde besøkstallet sunket til 18 000. Hvordan kan denne **utviklingen** beskrives, dersom **utviklingen** viser seg å være **eksponentiell?**

Vi ser at antallet gjester sank med 2 000 fra 2019 til 2020. Siden **eksponentielle modeller** beskriver en **prosentvis utvikling**, må vi først regne ut hvor mange **prosent utvikilngen** utgjorde:

$$\frac{-\,2\,000}{20\,000} = -\,0{,}1 = -\,10\ \%$$

$$\boxed{Endring\ i\ prosent = \frac{endring\ i\ y - verdi}{opprinnelig\ y - verdi} \cdot 100\ \%}$$

Vi ser at nedgangen er på 10 %. Dette gir følgende **vekstfaktor**:

$$100\ \% - 10\ \% = 90\ \% = 0{,}9$$

Dermed kan vi beskrive **utviklingen** i resturantens gjester i årene fremover ved hjelp av følgende **formel**:

$$antall\ gjester = 20\,000 \cdot 0{,}9^{antall\ \text{år}\ etter\ 2019}$$

eller

$$y = 20\,000 \cdot 0{,}9^{x}$$

hvor x er år etter 2019 og y er antall gjester.

En eksamensoppgave

En båt har i dag en verdi på 200 000 kroner. Anta at båtens verdi synker med 5 % hvert år framover.

a) Sett opp et uttrykk som du kan bruke til å regne ut hvor mye båten vil være verdt om 10 år.

Anders påstår at båtens verdi vil være 100 000 kroner etter 10 år.

b) Forklar Anders hvorfor dette ikke kan være riktig.

En eksamensoppgave

En dyrebestand består i dag av 12 000 dyr. En gruppe forskere antar at bestanden vil avta lineært, og at det vil være 6000 dyr igjen om 10 år.

a) Sett opp en modell som viser hvor mange dyr det vil være i bestanden om x år dersom antakelsen er riktig.

En annen gruppe forskere antar at bestanden vil avta eksponentielt, og at det vil være 11 400 dyr igjen om ett år.

b) Sett opp en modell som viser hvor mange dyr det vil være i bestanden om x år dersom denne antakelsen er riktig.

c) Ifølge hvilken av de to modellene ovenfor vil det være færrest dyr igjen i bestanden om 10 år?

En eksamensoppgave

I 2017 er verdien av en leilighet 1 200 000 kroner.

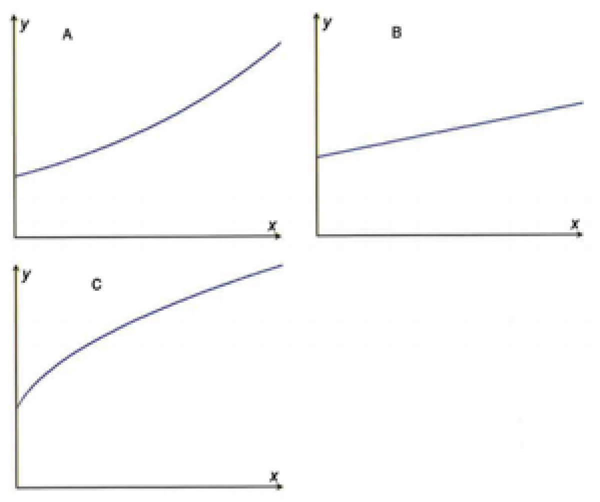
Per antar at verdien vil stige med 80 000 kroner hvert år.

a) Sett opp en modell som viser verdien $f(x)$ av leiligheten x år etter 2017 dersom det går slik Per antar.

Kari antar at verdien vil stige med 8 % hvert år.

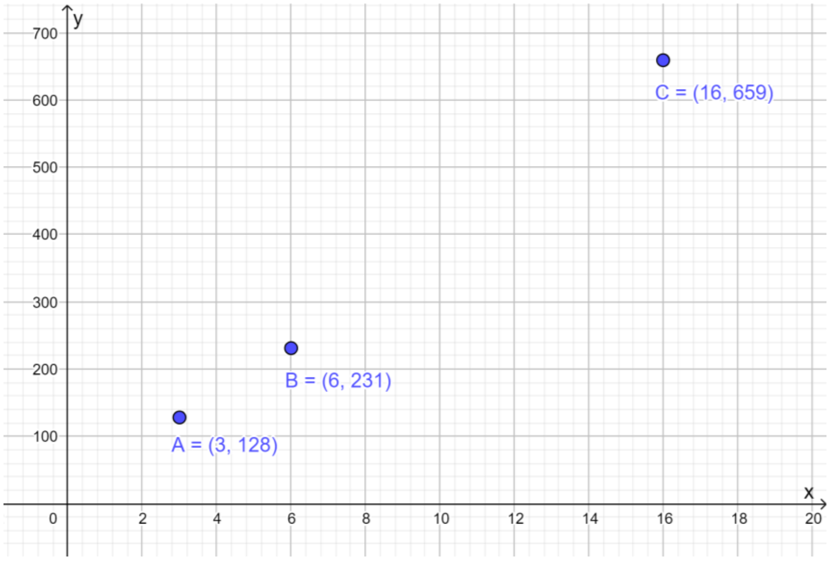
b) Sett opp en modell som viser verdien $g(x)$ av leiligheten x år etter 2017 dersom det går slik Kari antar.

c) Hvilken av grafene nedenfor kan være grafen til f?
Hvilken av grafene nedenfor kan være grafen til g?
Begrunn svarene dine.



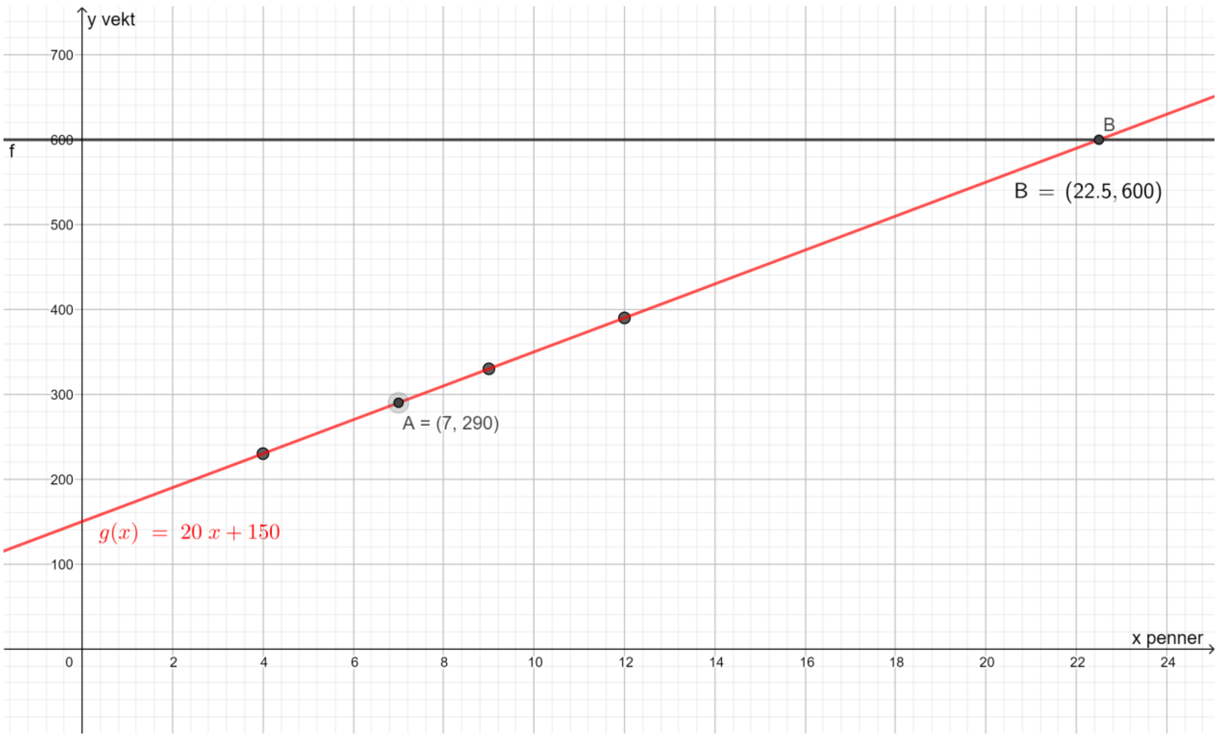
Fasit sammenheng og utvikling

Oppgave 1



Oppgave 2

Det er en lineær modell fordi vekten øker med like mye for hver penn som legges i koppen for $x \in [0,20]$, hvor x er antall penner.
Funksjonsuttrykket forteller at hver penn veier 20 gram, mens koppen veier 150 gram.
Punkt A forteller at 7 penner + koppen veier 290 gram.
Punkt B forteller at 600 gram ligger utenfor definisjonsmengden til denne funksjonen.



Oppgave 3

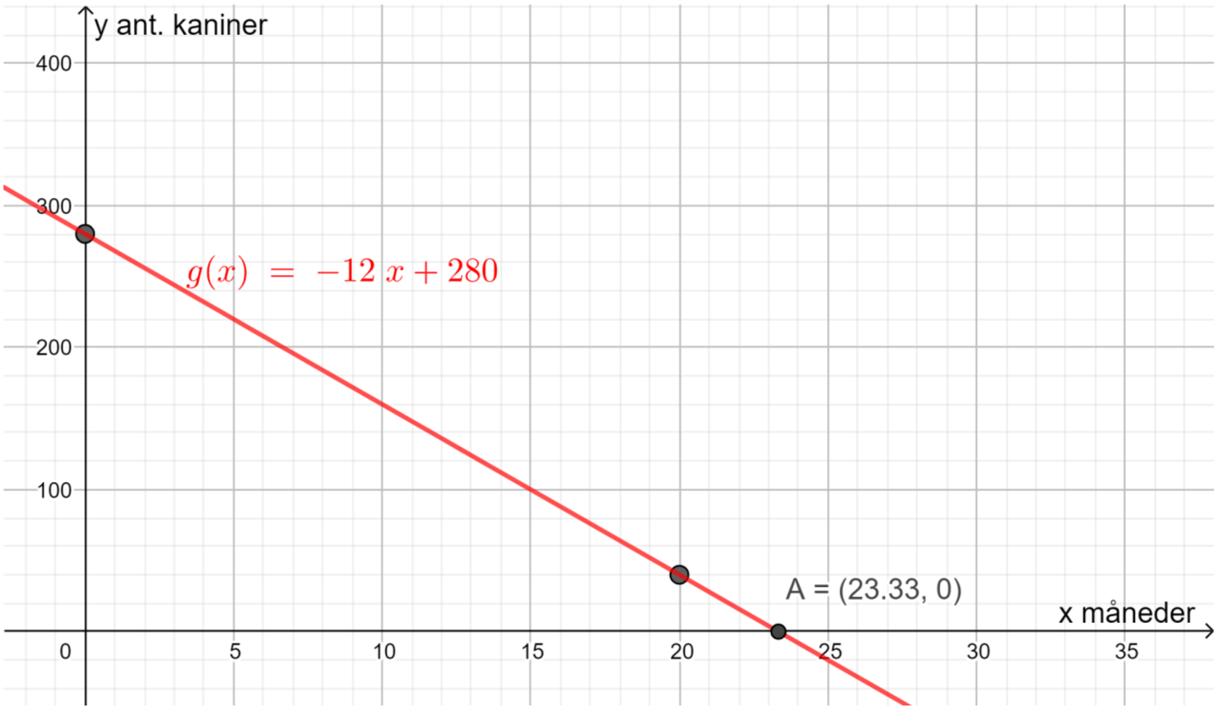
Funksjonsuttrykket forteller at det var 605 elever ved skolens oppstart, og at elevtallet øker med 15 elever per år.
Etter 10 år vil det være 755 elever ved skolen, ifølge modellen. Dette stemmer ganske bra med det reelle antallet, og modellen kan derfor vurderes som gyldig i 10 år fremover.

$y = 15x + 605$

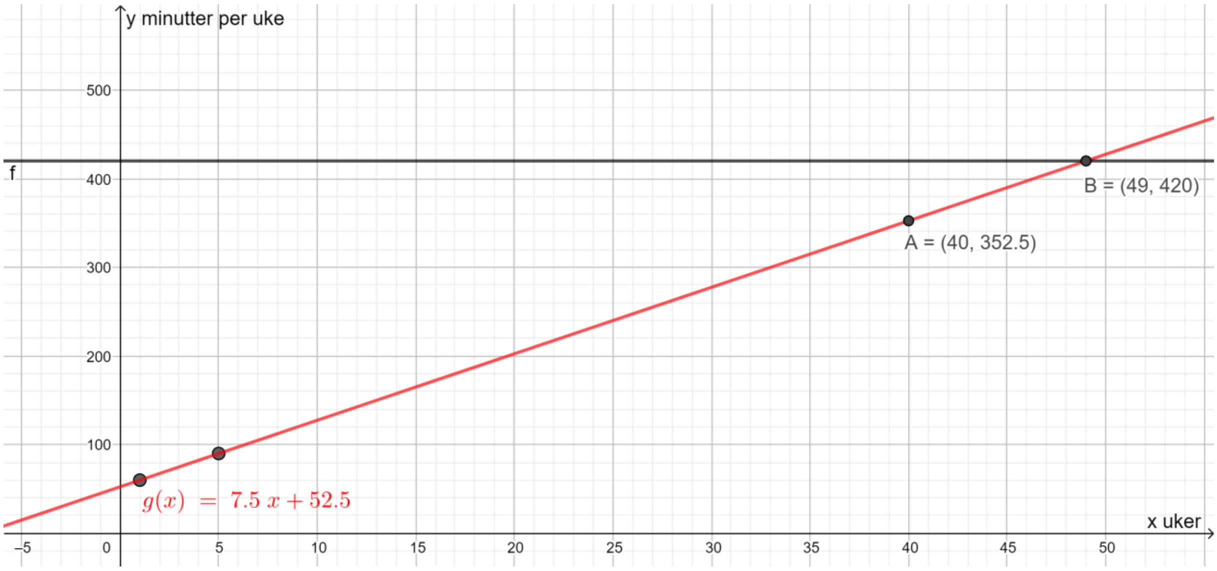
Symbolsk utregning: x = 10 y = 755

Oppgave 4

Funksjonsuttrykket forteller at antall kaniner synker med 12 for hver måned.
Modellen er nok ikke gyldig etter måned 20. Modellen viser at det vil være et negativt antall kaniner i området etter 23 måneder, noe som ikke er mulig. Dessuten er det rimelig å anta at antall kaniner vil øke når sykdommen avtar.



Oppgave 5
a) Liv må øke treningen med 7,5 minutter per uke for å nå dette målet.
b) I uke 40 må hun trene 352,5 minutter, som tilsvarer 5 timer 52 minutter og 30 sekunder.
c) Det er vanskelig å sette en begrensning for Liv, men noe særlig mer enn 1 time hver dag/7 timer i uka er lite trolig at hun klarer. Vi tror derfor at modellen er gyldig for $x \in [0,49]$



Oppgave 6
Modellen forteller at ungdommen får 250 kroner for oppmøtet, og 80 kroner per time. Antall timer og lønn er ikke proporsjonale størrelser, i og med at ungdommen får 250 kroner for oppmøtet.

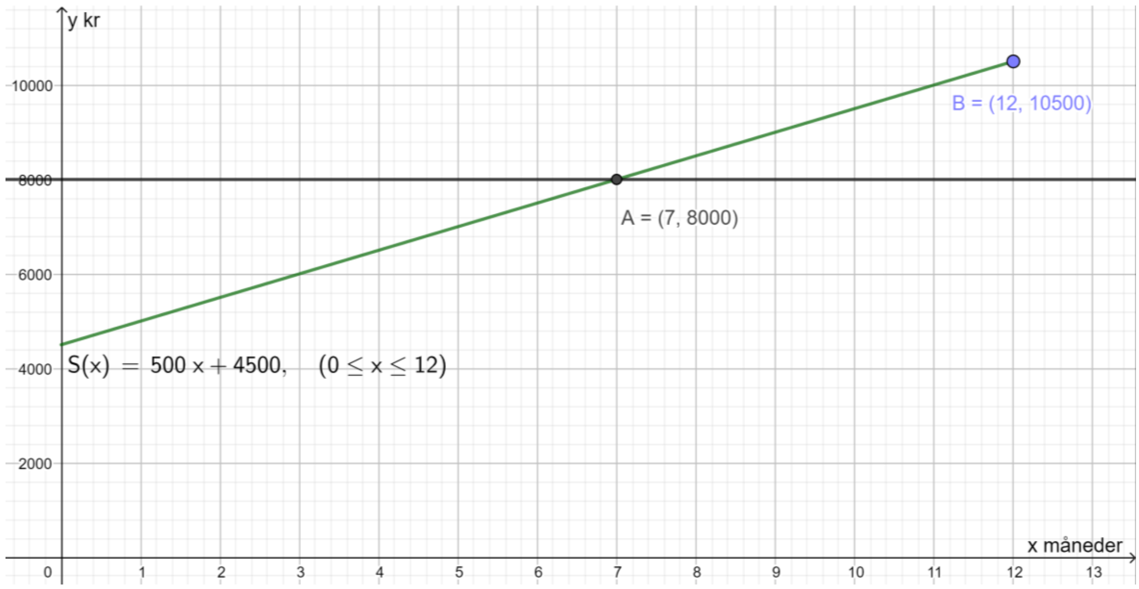
$$y = 80\,x + 250$$

Oppgave 7
$f(x) = 80000x + 1200000$

Oppgave 8
Skrev inn punktene (0,8500) og (5,6000), som ga modellen $y = -500x + 8500$. Dette betyr at antallet individer av denne dyrearten synker med 500 per år.

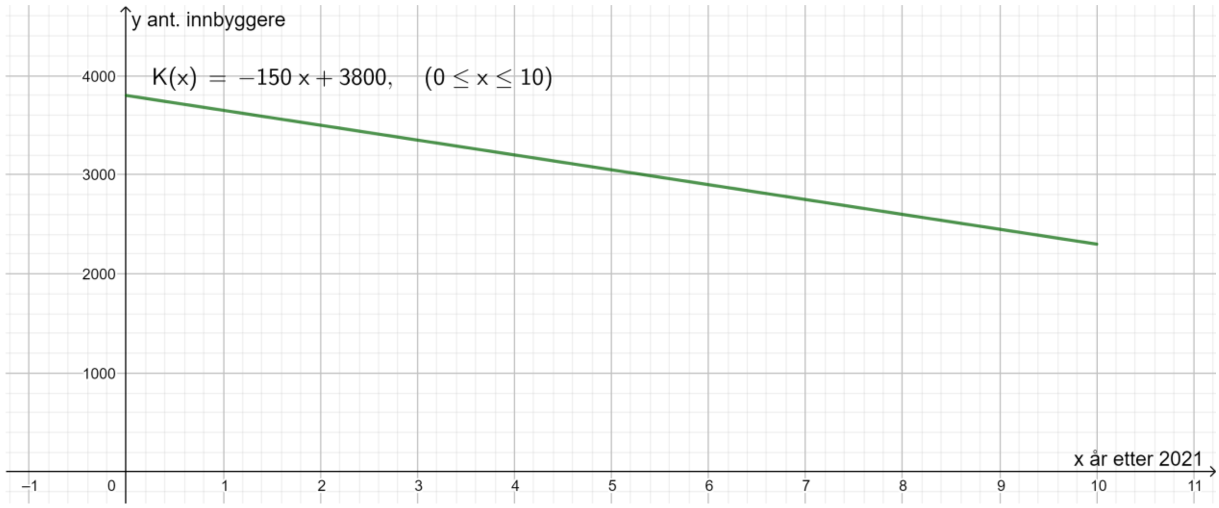
Oppgave 9

Funksjonsuttrykket forteller at Mathias har 4 500 kroner på sparekontoen når han begynner å spare, og at han sparer 500 kroner per måned.
Punkt A forteller at det tar 7 måneder før sparekontoen passerer 8 000 kroner, mens punkt B forteller at han har 10 500 kroner på kontoen etter å ha spart i ett år.



Oppgave 10

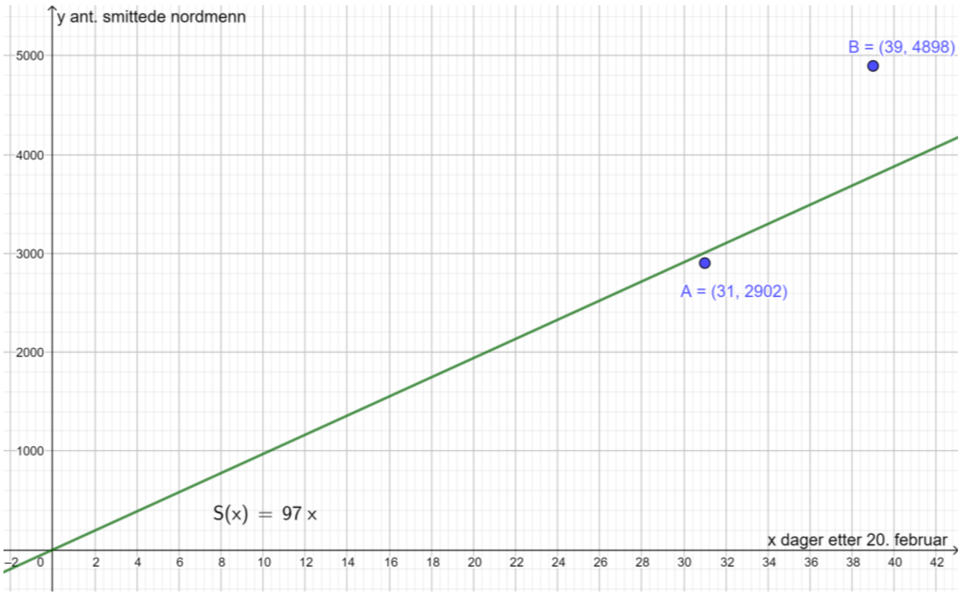
Funksjonsuttrykket forteller at det var 3 800 innbyggere i 2021, og at innbyggertallet synker med 150 per år.



Oppgave 11

Funksjonsuttrykket forteller at batterinivået synker med 5 prosentpoeng per time ved normal bruk. Modellen er i beste fall gyldig frem til telefonen er tom for strøm, som ifølge modellen inntreffer etter 20 timer.
Imidlertid har de fleste telefoner en innstilling som gjør at strømforbruket reduseres når batterinivået er lavere enn 20 %. Det betyr at modellen kun er gyldig frem til punkt B, altså 16 timer. Vi vurderer derfor funksjonen til å være gyldig for $x \in [0,16]$

Oppgave 12
Ifølge modellen er antall dager og antall smittede proporsjonale størrelser, og antall smittede øker med 97 per dag.
Modellen stemmer relativt bra med punkt A, men kan ikke brukes til å forklare utviklingen etter 31 dager. Antall smittede nordmenn økte derfor ikke lineært i denne perioden, og vi må derfor bruke en annen modell for å beskrive utviklingen i antall smittede etter 22. mars.



Eksamensoppgave side 90
Jacob tjener $(0{,}075 \cdot 150000 + 32\,000 =)$ 43 250 kroner denne måneden.

Eksamensoppgave side 90
Sarah må selge 20 bøker for at timelønna skal bli 450 kroner

$y = 15\,x + 150$

Symbolsk utregning: x = 20 y = 450

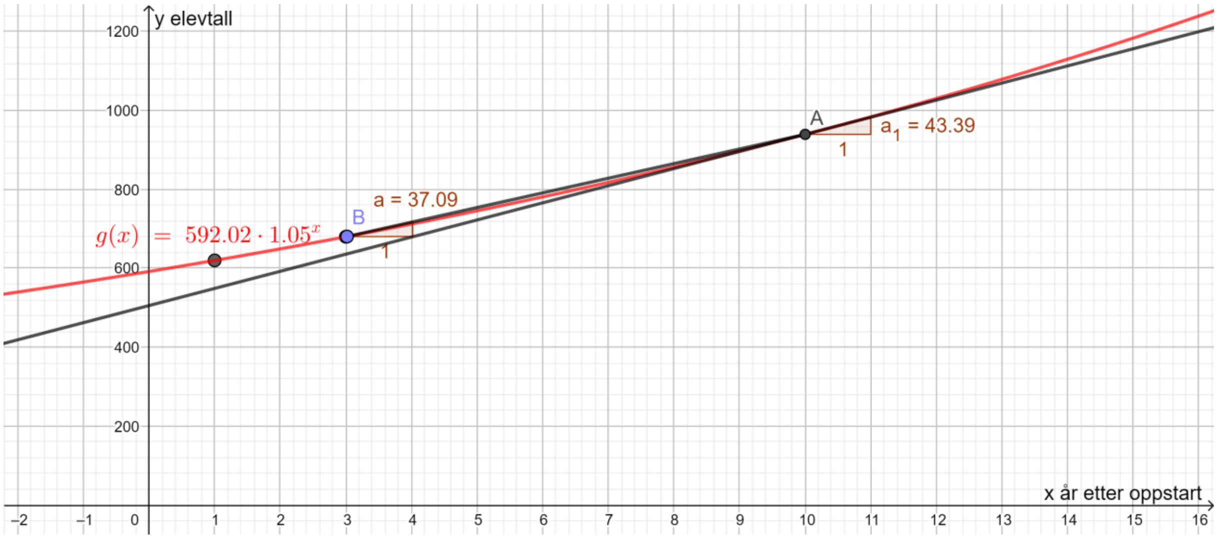
Oppgave 13

-7 %	=	93 %	=	0,93	- 2,2 %	=	97,8 %	=	0,978
+ 7 %	=	107 %	=	1,07	+ 0,4 %	=	100,4 %	=	1,004
- 7,5 %	=	92,5 %	=	0,925	- 17,5 %	=	82,5 %	=	0,825
+ 12,3%	=	112,3 %	=	1,1123	+ 200 %	=	300 %	=	3
+ 20 %	=	120 %	=	1,2	+ 250 %	=	350 %	=	3,5
- 10 %	=	90 %	=	0,9	- 100 %	=	0 %	=	0
- 13 %	=	87 %	=	0,87	- 1,2 %	=	98,8 %	=	0,988
+ 40 %	=	140 %	=	1,4	+ 0,7 %	=	100,7 %	=	1,007
+ 100 %	=	200 %	=	2	+ 0,2 %	=	100,2 %	=	1,002
- 30 %	=	70 %	=	0,7	- 25 %	=	75 %	=	0,75

Oppgave 14

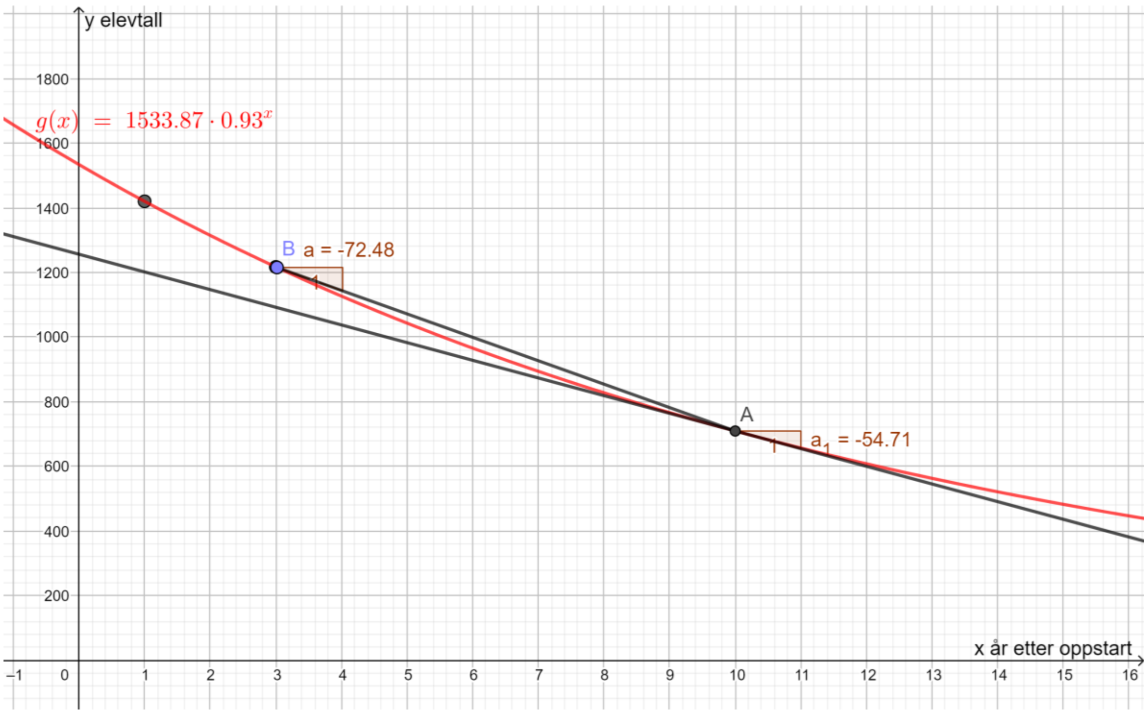
<table>
<tr><th>Oppgave</th><th>Svar</th><th>Oppgave</th><th>Svar</th></tr>
<tr><td>14</td><td>2 817 500 kr</td><td>20</td><td>11 592,74 kr</td></tr>
<tr><td>15</td><td>9 600 kr</td><td>21</td><td>3 100 kr</td></tr>
<tr><td>16</td><td>166,88 kr/time</td><td>22</td><td>135,54 kr</td></tr>
<tr><td>17</td><td>66,10 kr</td><td>23</td><td>76 ℃</td></tr>
<tr><td>18</td><td>4,5 millioner kroner</td><td rowspan="2">24</td><td rowspan="2">Knut betalte 320 000 kr for bilen, han antar at bilens verdi synker med 15 % hvert år, og han skal selge bilen etter 5 år for omtrent 142 000 kroner.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">19</td><td rowspan="2">a) 15 000 betyr kjøpesummen, mens 1,05 betyr en verdiøkning på 5 %
b) 140 betyr antall elever ved skolestart mens 0,875 betyr at 12,5 % har sluttet</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

Oppgave 25
Vekstfaktoren 1,05 forteller at antall elever øker med 5 % hvert år.
Fra år 3 til år 10 øker antall elever med 37 i gjennomsnitt per år. I år 10 øker antall elever tilsvarende 43 elever per år.



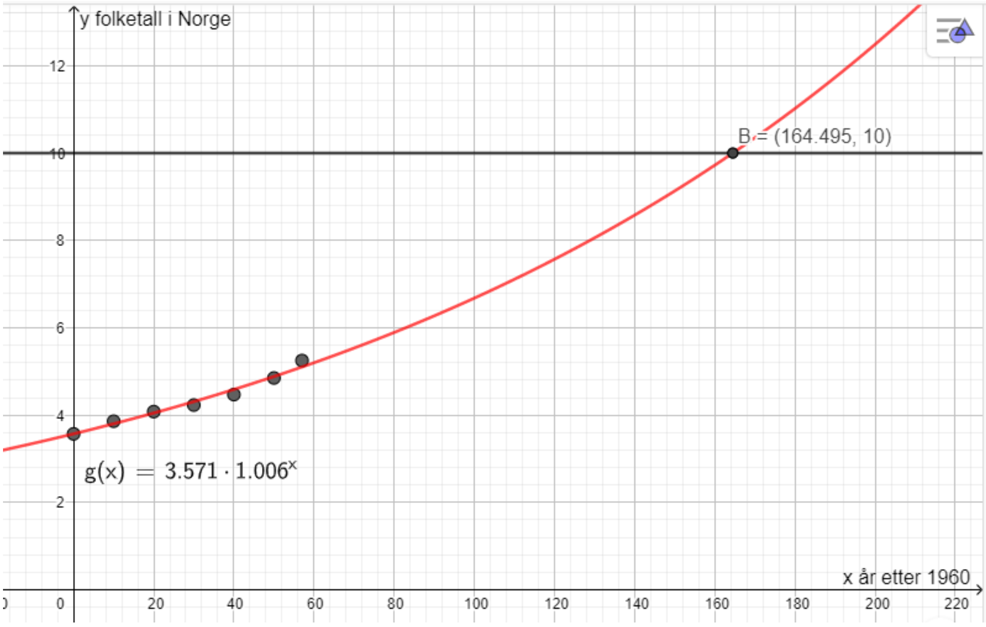
Oppgave 26

Vekstfaktoren 0,93 forteller at antall elever synker med 7 % hvert år.
Fra år 3 til år 10 synker antall elever med 72 i gjennomsnitt per år. I år 10 synker antall elever tilsvarende 55 elever per år.



Eksamensoppgave side 103

a) Har vist ved regresjon at modellen passer godt med tallene i tabellen.
b) 1,006 er en vekstfaktor, som forteller at folketallet i Norge øker med 0,6 % per år
c) Folketallet i Norge vil passere 10 millioner etter 164 år, som betyr i år 2124.



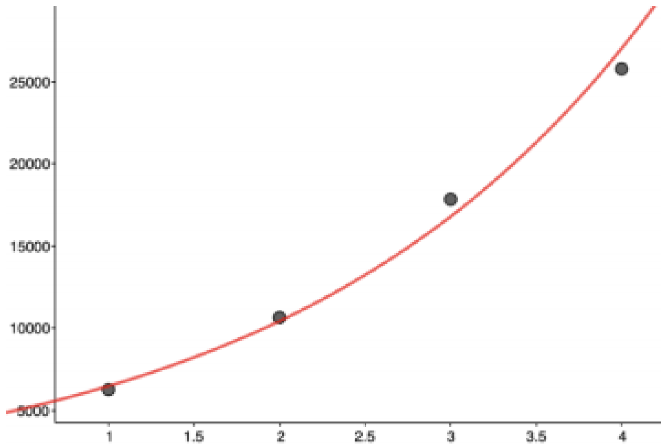
	A	B
1	0	3.57
2	10	3.86
3	20	4.08
4	30	4.23
5	40	4.47
6	50	4.85
7	57	5.25
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		

Eksamensoppgave side 103

	A	B
1	1	6278
2	2	10660
3	3	17837
4	4	25761

X: A1:A4

Y: B1:B4



Regresjonsmodell

$y = 4038.4858 \cdot 1.608^x$

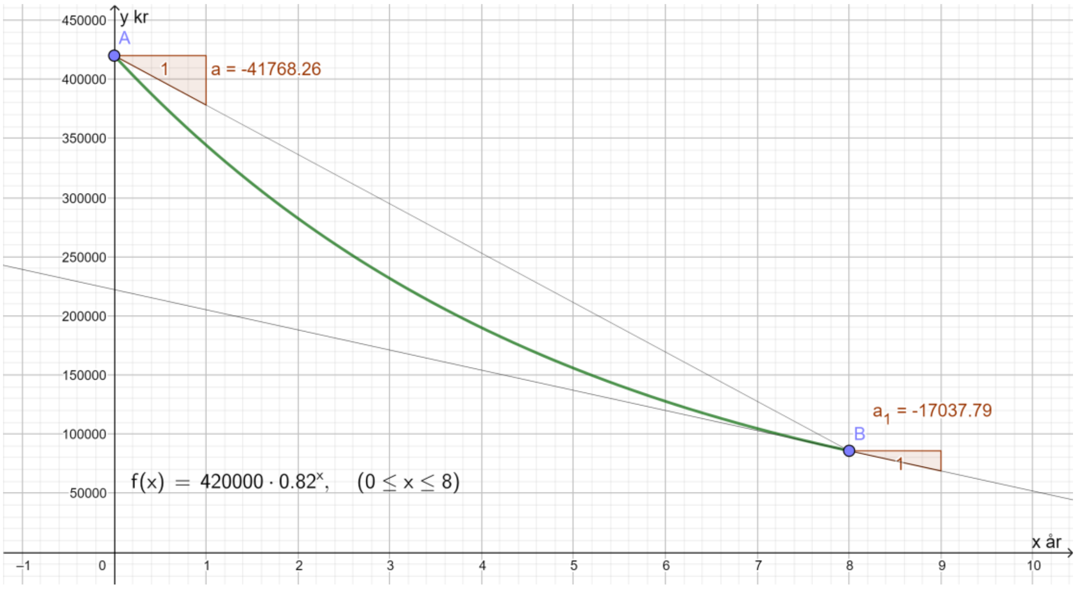
Eksponentiell

b) Jeg ser at vekstfaktoren er 1,608.
Det betyr at antall registrert smittede økte med 60,8 % per måned.

Oppgave 27

Funksjonsuttrykket forteller at familien betalte 420 000 kroner for bilen, og at bilens verdi synker med 18 % per år.

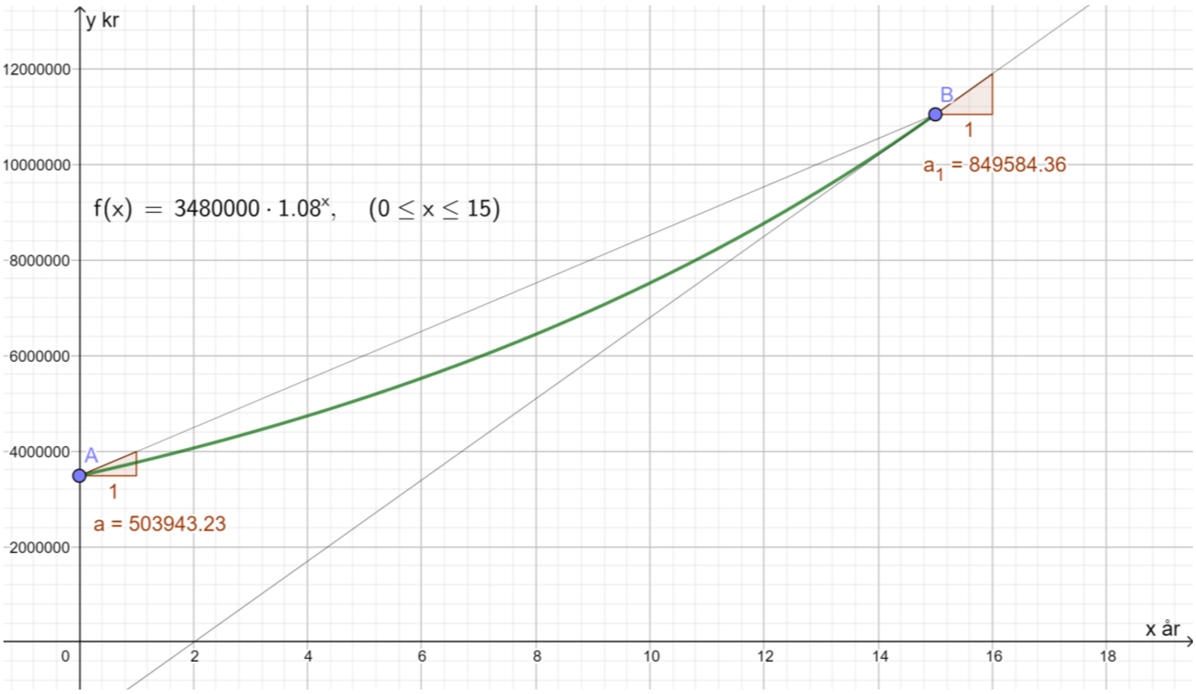
Vi valgte å analysere grafens endepunkter. I gjennomsnitt synker bilens verdi med omtrent 41 800 kroner per år i disse 8 årene. I år 8 synker bilens verdi tilsvarende 17 000 kroner per år.



Oppgave 28

Funksjonsuttrykket forteller at familien betalte 3 480 000 kroner for leiligheten, og at leilighetens verdi øker med 8 % per år.

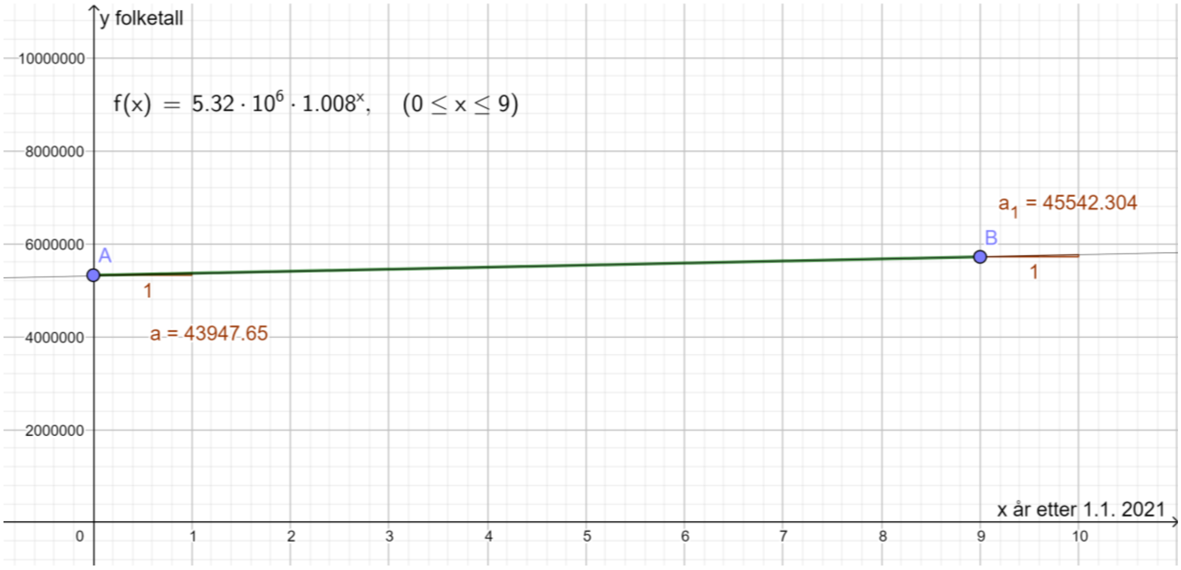
Vi valgte å analysere grafens endepunkter. I gjennomsnitt øker leilighetens verdi med omtrent 500 000 kroner per år i disse 15 årene. I år 15 øker leilighetens verdi tilsvarende 850 000 kroner per år.



Oppgave 29

Funksjonsuttrykket forteller at folketallet i Norge ved inngangen til 2021 er 5,32 millioner og at folketallet øker med 0,8 % per år.

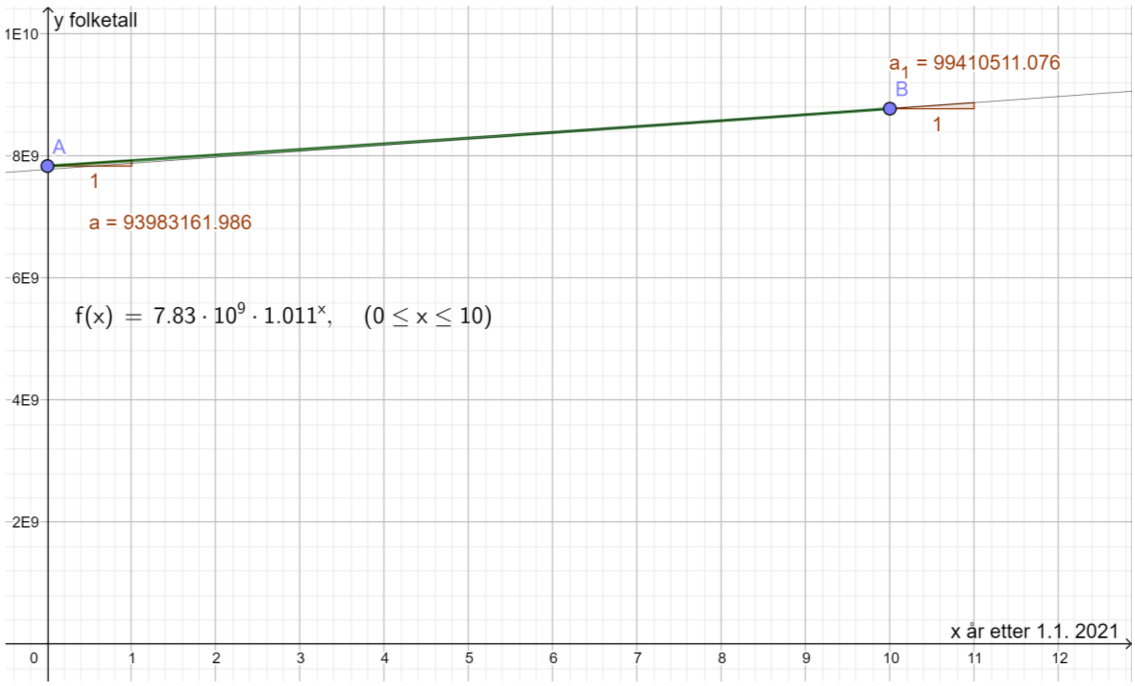
Vi valgte å analysere grafens endepunkter. I gjennomsnitt øker folketallet med omtrent 44 000 per år i disse 9 årene. I år 9 øker folketallet tilsvarende 45 542 per år.



Oppgave 30

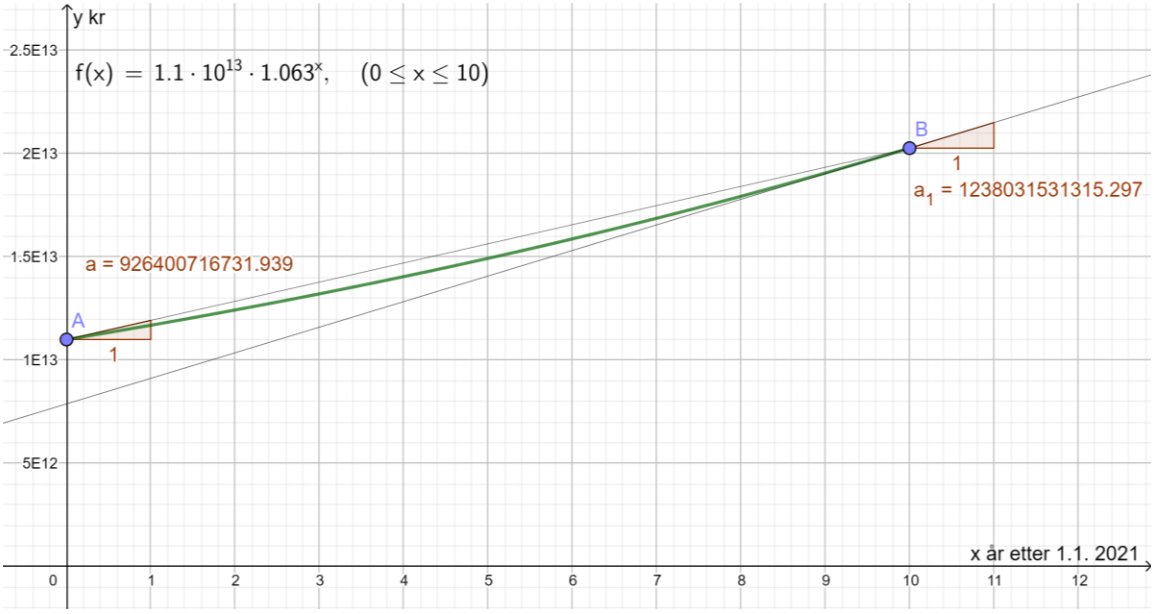
Funksjonsuttrykket forteller at folketallet i verden ved inngangen til 2021 er 7,83 milliarder og at folketallet øker med 1,14 % per år.

Vi valgte å analysere grafens endepunkter. I gjennomsnitt øker folketallet med omtrent 94 millioner per år i disse 10 årene. I år 10 øker folketallet tilsvarende omtrent 100 millioner per år.



Oppgave 31
Funksjonsuttrykket forteller at verdien til Oljefondet inngangen til 2021 er på svimlende 11 000 milliarder kroner, og at verdien til Oljefondet øker med 6,3 % per år..

Vi valgte å analysere grafens endepunkter. I gjennomsnitt øker verdien til Oljefondet med omtrent 900 milliarder per år i disse 10 årene. I år 10 øker verdien til Oljefondet tilsvarende omtrent 1 200 milliarder per år



Oppgave 32

Kaffens temperatur vil ikke kunne synke under romtemperatur. Dersom vi antar at denne er 20 ℃, vil kaffen nå denne temperaturen etter omtrent 8 minutter. Det vil si at modellens gyldighetsområde er for $x \in [0,8]$

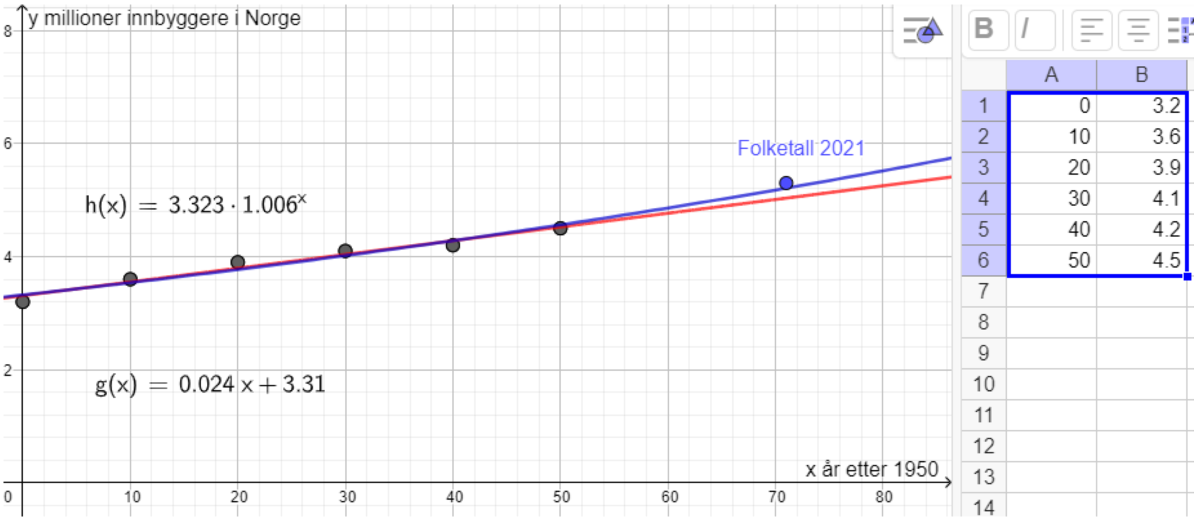
Oppgave 33
SSB spår følgende om antall innbyggere i Oslo i to utvalgte år:

Kilde: https://www.ssb.no/kommunefakta/oslo

Sammenlignet med disse tallene er modellen troverdig frem til 2030, men viser for høyt folketall i 2050. Det betyr at modellen vil bli upålitelig etter 2030.

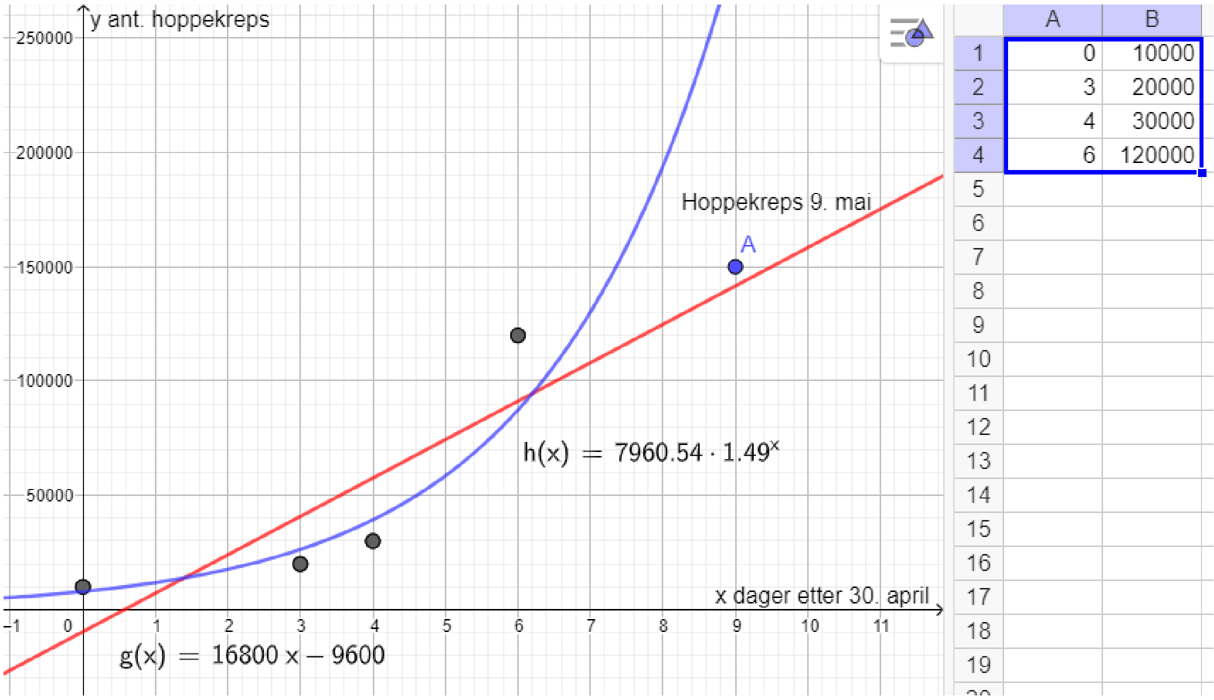
Oppgave 33
En lineær modell som beskriver utviklingen: $0{,}024x + 3{,}31$. Denne modellen forteller at antall innbyggere i Norge øker med 24 000 per år.
En eksponentiell modell som beskriver utviklingen: $3{,}323 \cdot 1{,}006^{x}$. Denne modellen forteller at antall innbyggere i Norge øker med 0,6 % per år.

Sammenlignet med dagens folketall fremstår befolkningsutviklingen å være eksponentiell.



Oppgave 34
Ifølge Lars øker antall hoppekreps med 16 800 per dag.
Ifølge Lene øker antall hoppekreps med 49 % per dag.

Sammenlignet med antall hoppekreps 9. mai kan det kan virke som om utviklingen i antall hoppekreps bør beskrives lineært.

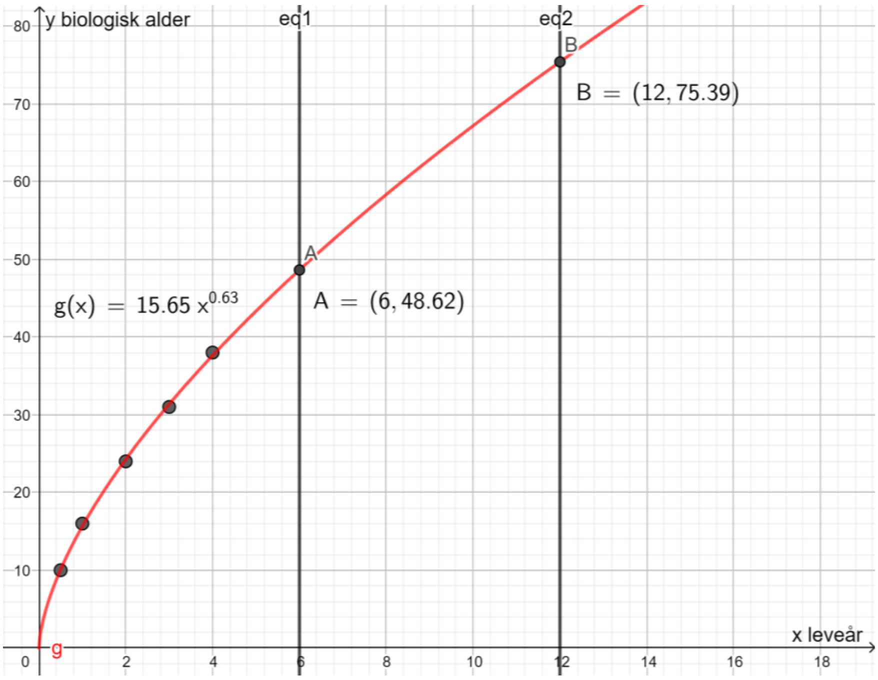


Oppgave 35

a) Ved bruk av regresjonsverktøyet i GeoGebra finner vi at modellen $y = 15{,}65x^{0{,}63}$ passer til tallene i tabellen. Det betyr at
$p = 15{,}65$
og
$q = 0{,}63$

b) Den biologiske alderen til en 6 år gammel hund vil være omtrent 49 år, se punkt A.
Fremgangsmåte: skrev x = 6, brukte «skjæring mellom to objekt».

c) Ut fra modellen og opplysningene i tabellen er det rimelig å anta at Kine har en liten/mellomstor hund, se punkt B.
Fremgangsmåte: skrev x = 12, brukte «skjæring mellom to objekt», sammenlignet y-verdien i punktet med informasjonen i tabellen.



	A	B
1	0.5	10
2	1	16
3	2	24
4	3	31
5	4	38

Oppgave 36

a)

En lineær funksjon vil øke med like mye hele veien, så den passer ikke.

En eksponentiell funksjon vil øke med mer og mer, så den passer ikke.

En polynomfunksjon kan passe, men om vi har en andregradsfunksjon vil det begynne å synke etter noen år. Det stemmer ikke med Sveins antakelse, siden det fremdeles skal øke hele veien.

Her passer det best med en potensfunksjon. Denne funksjonen viser en økning i antall innbyggere, men økningen går saktere etter hvert. Det vil si at det alltid vil bli flere og flere mennesker, men at økningen vil avta. Funksjonen vil vise dette siden den går brattere oppover i starten.

b)

Momentan vekstfart til $x = 10$ er 95. Momentan vekstfart til $x = 30$ er 42.

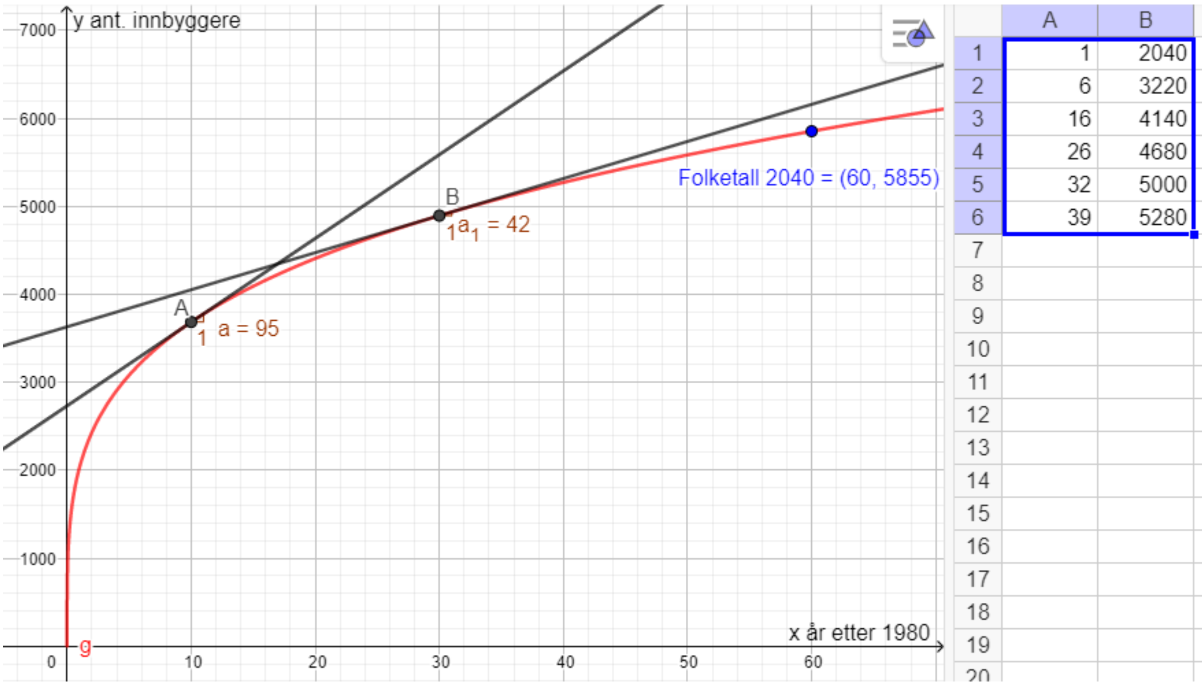
Det betyr at innbyggertallet i 1990 stiger tilsvarende 95 personer per år, og at innbyggertallet i 2010 stiger tilsvarende 42 personer per år

c)

Dsse tallene stemmer ganske bra med Sveins antakelse.

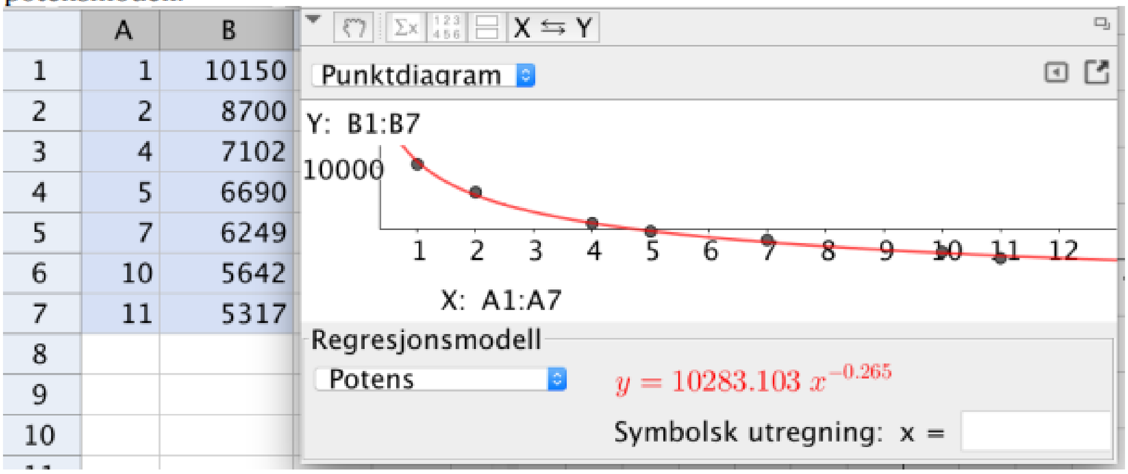
d)

Ifølge modellen vår vil det være 5854 innbyggere i 2040. Fremtidsprognosen vi fikk høre om i oppgaven meldte om 5600 innbyggere dette året. Det betyr at vår modell gir et litt høyere tall enn fremtidsprognosen, men de stemmer likevel ganske godt overens.



Eksamensoppgave side 112

a) Legger inn verdier i regnearket i GeoGebra, velger regresjonsanalyse og potensmodell.



Vi ser at vi kommer frem til samme modell som Olav (så lenge vi runder av tallet foran *x* til heltall).

b) 2011 er 3 år etter 2008.

$$S(3)=10283\cdot 3^{-0{,}265}=7685{,}69\approx 7686$$

<u>I 2011 var sildebestanden på 7686 tusen tonn, altså nesten 7,7 millioner tonn.</u>

c) $5317\cdot 0{,}87=4625{,}79\approx 4626$, så i følge Havforskningsinstituttet vil sildebestanden være på 4626 tusen tonn i 2020.

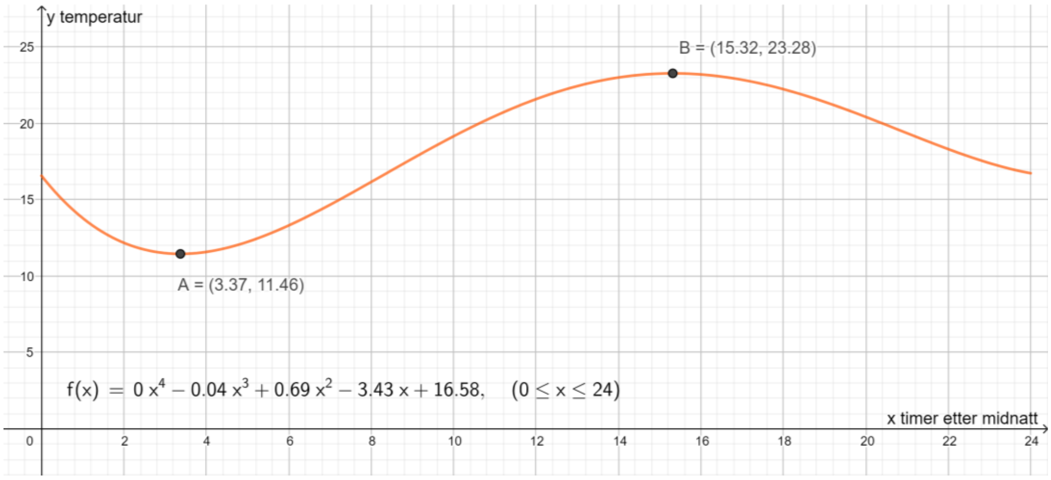
Sammenligner med resultatet Olav sin modell gir:

$$S(12)=10283\cdot 12^{-0{,}265}=5322{,}76\approx 5323$$

Vi ser at Olav sin modell gir en sildebestand i 2020 som er større enn den faktiske bestanden i 2019, så ***modellen passer dårlig med Havforskningsinstituttets prognose.***

$\dfrac{S(12)}{S(11)}=\dfrac{10283\cdot 12^{-0{,}265}}{10283\cdot 11^{-0{,}265}}\approx 0{,}977$, så Olav sin modell legger opp til en nedgang på 2,3 % fra 2019 til 2020, noe som kan tyde på at nedgangen avtar for tidlig i Olav sin modell, sammenlignet både med de faktiske dataene i tabellen, og Havforskningsinstituttets prognose.

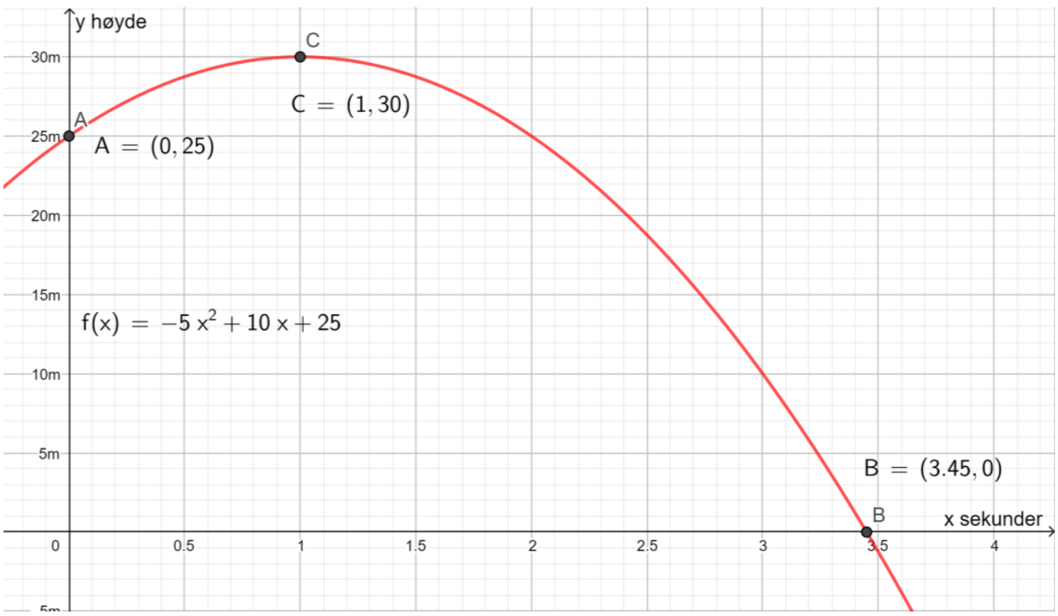
Oppgave 37
Vi valgte å bruke en polynommodell av 4. grad for å beskrive utviklingen i temperatur. Ifølge modellen vil høyeste temperatur være 23,3 °C, og laveste temperatur vil være 11,5 °C.



Oppgave 38
Funksjonen er gyldig fra steinen blir kastet til den treffer vannet. Steinen vil følge en annen kurve gjennom vannet til den treffer bunnen. Det betyr at funksjonens gyldighetsområde er for x-verdier fra 0 til 3,45.

Steinen kastes fra 25 meter. Dette kan både leses av funksjonsuttrykket, eller finnes ved å lage et punkt der grafen skærer y-aksen.

«Ekstremalpunkt» forteller at steinen er på sitt høyeste etter 1 sekund. Da er den 30 meter over havoverflaten.



Eksamensoppgave side 115

b)

I ca. 25 år, fra 1972 til 1997. Se graf i a.

c)

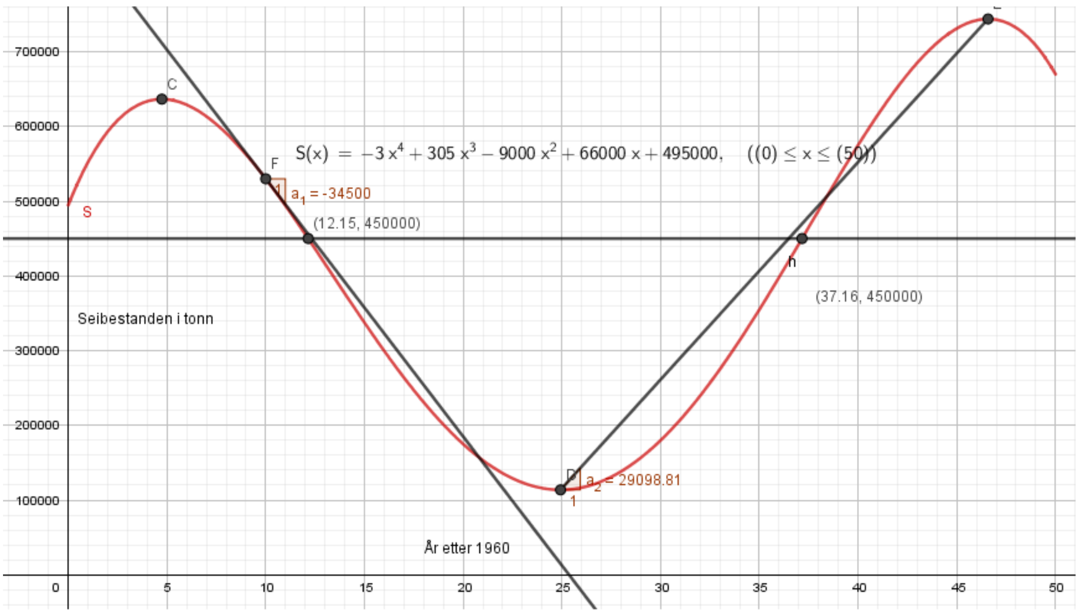
Den øker i gjennomsnitt med 20 100 tonn per år.

Laget et linjestykke fra minste til største verdi og fant stigningstallet til denne rette linjen. Det er det samme som den gjennomsnittlige veksten i perioden.

d)

Med momentan menes i øyeblikket, altså forandringen i 1970. Den momentane veksten er negativ, -34 500 tonn per år (i 1970). Det betyr at i løpet av året 1970 blir det 34 500 tonn **mindre** sei i Arktis. Når vi snakker om vekst er det fort å tenke at noen eller noe blir flere, men når veksten er negativ blir det mindre.

Laget en tangent til grafen i x=10, som tilsvarer år 1970. Fant stigningen til tangenten, som tilsvarer grafens momentane vekst. Legg merke til forskjellen fra oppgave c der man fant gjennomsnittet.



Eksamensoppgave side 115

b)

Verdien var lavere enn 92 kroner i ca. 6 uker, fra slutten av uke to til starten av uke ni.

c)

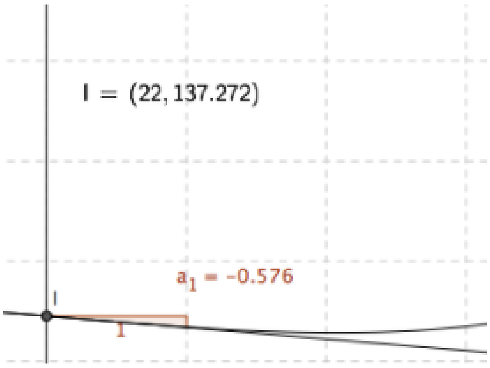
Verdien varierte mellom 81,6 kroner og 163 kroner. Forskjellen var 81, 4 kroner.

d)

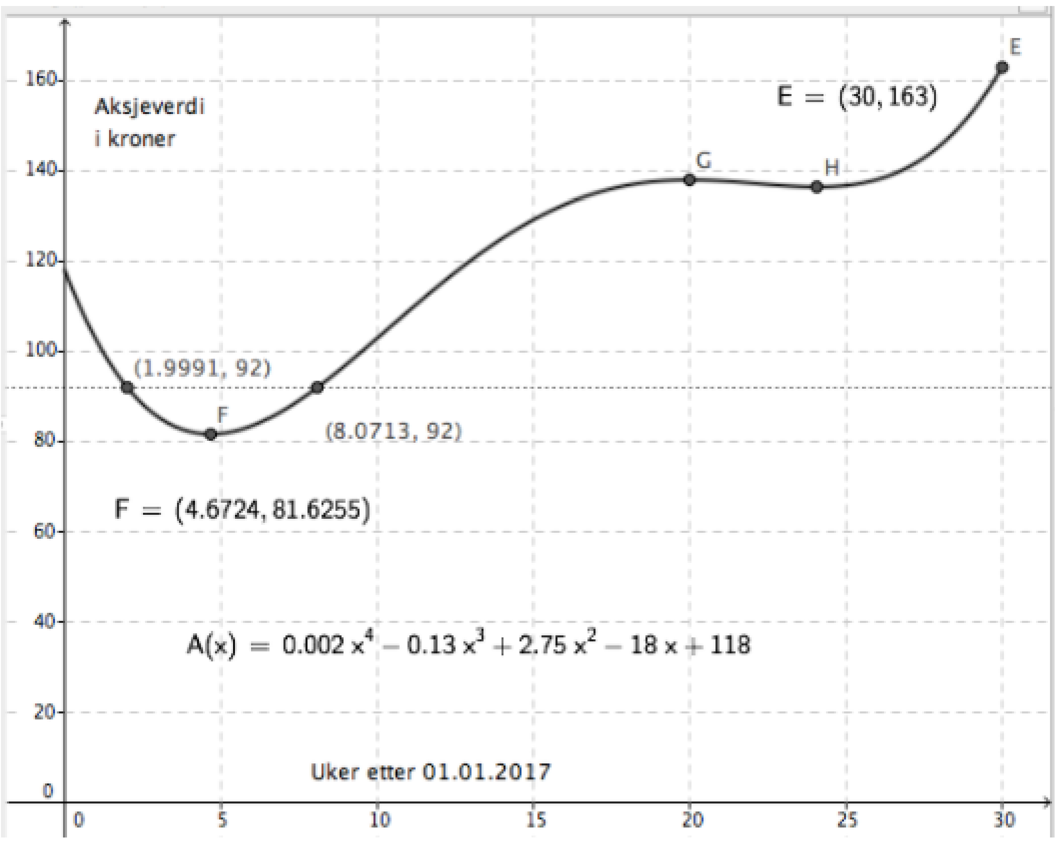
163 - 118 = 45

Aksjen steg med 45 kroner denne perioden. Gjennomsnittlig vekst per uke blir $\frac{45\,kr}{30\,uker} = 1,5$ kroner/uke.

e)



Dag nr. 154 $(22 \cdot 7)$ i 2017 avtar verdien av aksjen med 0,58 kroner.



Eksamensoppgave side 116

a)

$$V(x) = (10 - 0,1x^2)^3 \quad 0 \leq x \leq 10$$

$$V(0) = 10^3 = 1000$$

Tanken rommer 1000 liter.

c)

Fra figuren i b ser man at det tar 5,13 minutter i desimal tid. Vi gjør 0,13 om til sekunder:

$\frac{13}{100} = \frac{x}{60}$
$x = 7,8$

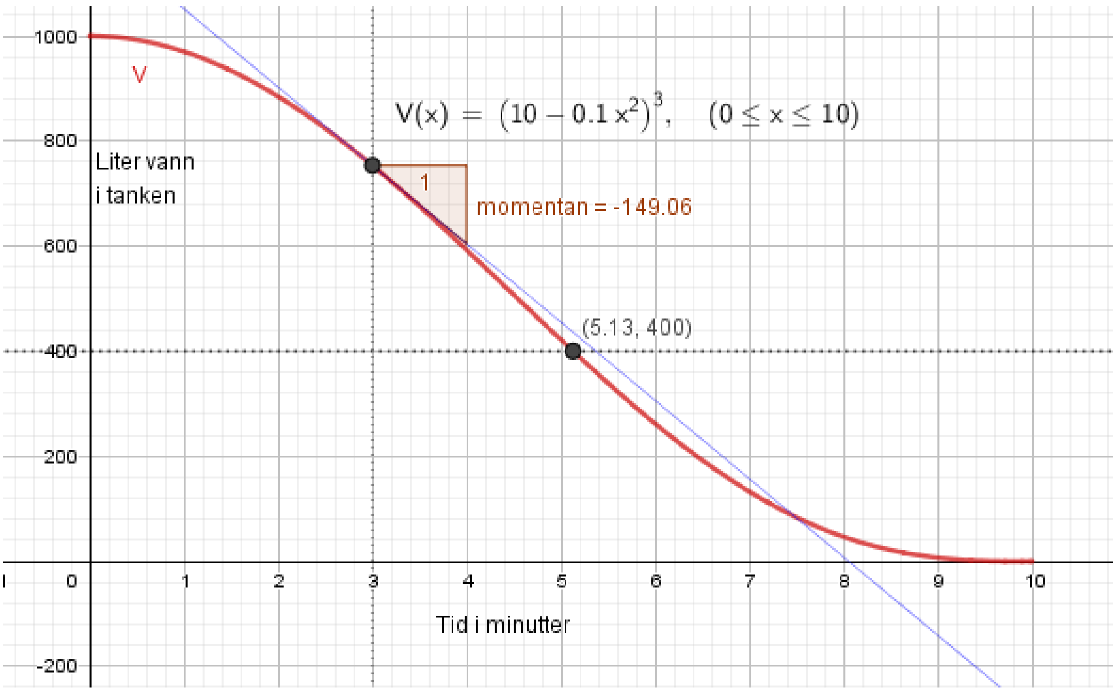
Det tar 5 minutter og 8 sekunder før det er 400 liter igjen i tanken.

d)

1000 liter tømmes på 10 minutter. Det blir i gjennomsnitt 1000 liter/ 10 min som er 100 L/min.

e)

Se figuren i b: Lag linjen x=3 og finn skjæring med grafen. I punktet lager man tangenten til grafen. Stigningen til tangenten i punktet er den momentane veksten for x =3. Den er - 149. Det betyr at akkurat når det har gått 3 minutter tømmes tanken med en fart på 149 L/ min.

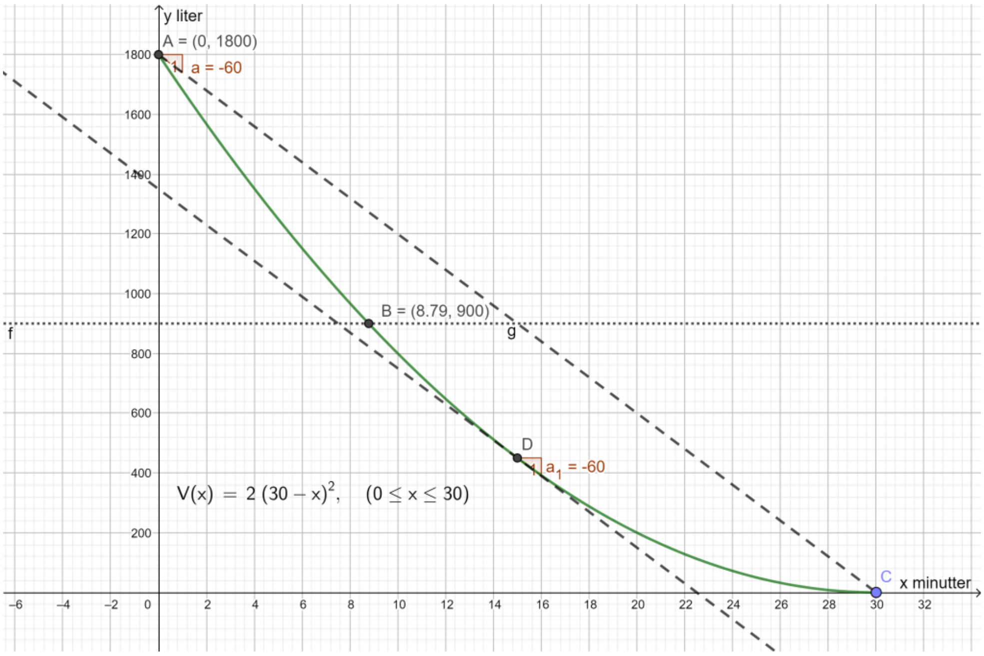


Eksamensoppgave side 116

b) Finner først ut at tanken inneholder 1 800 liter vann. Halvparten av dette er 900 liter. Det tar 8,79 minutter å tømme halvparten av tanken. Det er det samme som 8 minutter 47 sekunder og 4 tideler.

c) Det renner i gjennomsnitt 60 liter vann per minutt fra Kari åpner kranen til tanken er tom.

d) Den momentane vekstfarten til V når $x = 15$ er -60. Det betyr at etter 15 minutter synker vannstanden i tanken tilsvarende 60 liter per minutt.



Eksamensoppgave side 118

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta y} = \frac{2450-1250}{7-3} = \frac{1100}{4} = 275$$

Vi kan bruke punktet (3, 1350) og får

$$y = ax + b$$
$$1350 = 275 \cdot 3 + b$$
$$b = 1350 - 825$$
$$b = 525$$

Vi får da y = 275x + 525

Armbåndet koster kr. 525,- og en charms koster kr. 275,-

b)

Se a: y = 275x + 525

c)

$$y = 274x + 525$$
$$3825 = 275x + 525$$
$$275x = 3825 - 525$$
$$275x = 3300$$
$$x = 12$$

Hun har 12 charmes på armbåndet.

Oppgave 39

a)

$$Pris\ per\ figur = \frac{økning\ i\ pris}{økning\ i\ antall} = \frac{930\ kr - 680\ kr}{9-4} = \frac{250\ kr}{5} = 50\ kr$$

Setter inn prisen per figur i ett av punktene:

$$Pris\ for\ Crocs = 680\ kr - 4 \cdot 50\ kr = 680\ kr - 200\ kr = 480\ kr$$

b)

Velger at

$$x = pris\ per\ figur$$
$$y = samlet\ pris$$

og får dermed sammenhengen

$$y = 50x + 480$$

c)

Erstatter y med den oppgitte prisen, og løser ligningen

$$50x + 480 = 1030$$
$$50x = 1030 - 480$$
$$50x = 550$$
$$x = \frac{550}{50}$$
$$x = 11$$

Turid kjøper 11 småfigurer.

Eksamensoppgave side 120

a)

$f(x) = 200000 \cdot 0,95^{10}$

b)

Dersom båtens verdi sank med 10 000 kr per år i 10 år, ville den hatt et totalt verditap på 100 000 kr, og være verdt 100 000 kr om 10 år. Men dette er ikke tilfellet, båtens verdi synker prosentvis hvert år, og båtens verditap blir derfor lavere og lavere for hvert år.

Nærmere forklart: det første året minker verdien av båten med 5% av 200 000 kr, altså 10000 kr. Det andre året er verdien av båten 190 000 kr, og verdien av båten synker fremdeles med 5% hvert år. 5% av 190 000 kr er 9500 kr, det vil si at båtens verdi synker med mindre enn 10 000 kr det andre året. Båtens verdi blir lavere og lavere for hvert år, og 5% av verdien blir et lavere og lavere verditap for hvert år. Båtens verdi synker altså ikke med 10 000 kr hvert år, og det totale verditapet etter 10 år blir lavere enn 100 000 kr. Båten er verdt mer enn 100 000 kr etter 10 år.

Eksamensoppgave side 121

a)

En lineær modell skrives $y = a \cdot x + b$

Vi vet at konstantleddet b = 12 000 fordi dyrebestanden i dag er 12 000 dyr.

Vi finner stigningstallet $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6000 - 12000}{10 - 0} = \frac{-6000}{10} = -600$

Modellen som viser hvor mange dyr det vil være i bestanden om *x* år er $y = -600x + 12000$

b)

$\frac{11400}{12000} = 0,95$

11 400 dyr tilsvarer 95% av 12 000 dyr. Det betyr at vekstfaktoren for ett år er 0,95.

Den eksponentielle modellen som viser hvor mange dyr det vil være i bestanden om x år er $f(x) = 12000 \cdot 0,95^x$

c)

I den lineære modellen avtar bestanden med 600 dyr hvert år. Det første året tilsvarer det 5% av startverdien på 12 000 dyr. Bestanden vil fortsette å avta med 600 dyr hvert år, og det vil tilsvare en større og større prosentandel av dyrene som er igjen hvert år.

I den eksponentielle modellen avtar bestanden med 5% av antall dyr som er igjen hvert år. Det første året tilsvarer det 600 dyr, men de neste årene vil bestanden minke med færre og færre dyr, fordi 5% av en stadig minkende bestand, tilsvarer et mindre og mindre antall dyr.

Det vil si at det vil være færrest dyr igjen om 10 år ifølge den lineære modellen.

Eksamensoppgave side 121

a)

Dersom noe vokser periodisk med en fast størrelse har man en lineær sammenheng:

$f(x) = 80000x + 1200000$

b)

Dersom noe vokser periodisk med en fast prosent er veksten eksponentiell. Vekstfaktoren her er 1,08:

$g(x) = 1200000 \cdot 1,08^x$

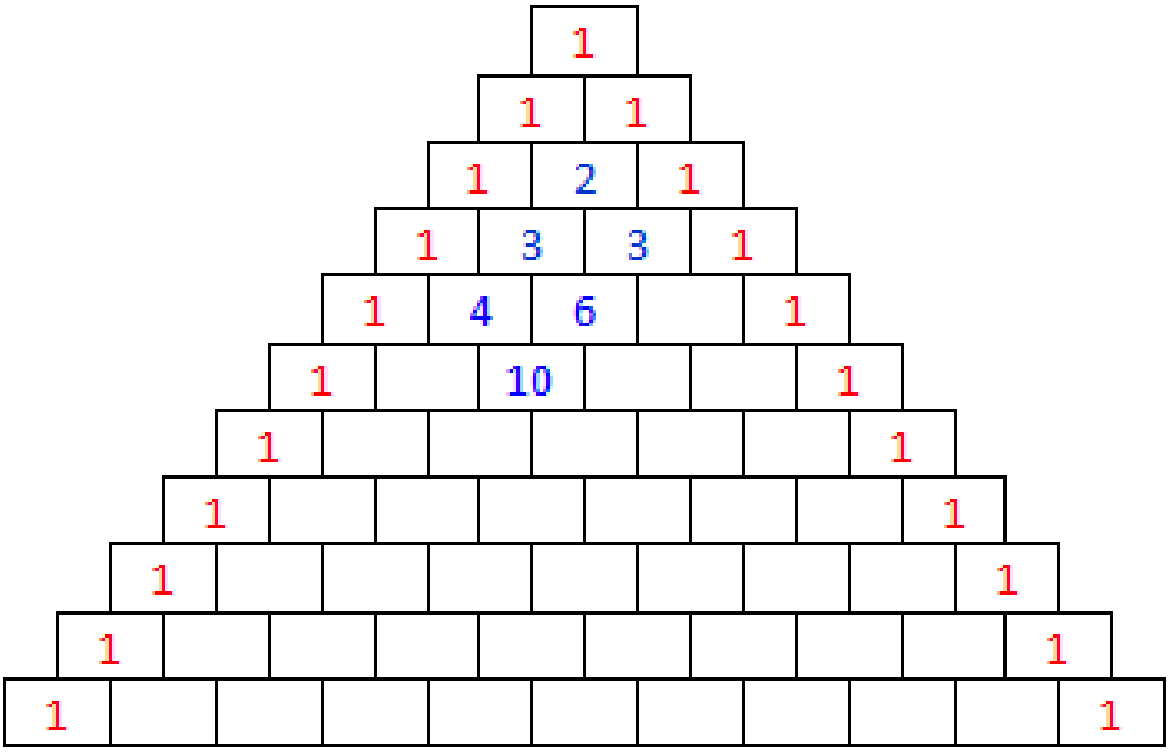
c)

B er rettlinjet og KAN beskrive f.

A later til å være eksponentiell og KAN beskrive g.

Både A og C vokser, men ved eksponentiell positiv vekst vil den momentane veksten øke med tiden. Det er tillfelle i A. I graf C avtar den.

Figurtall



Målet for opplæringen er at eleven skal kunne:

- Finne mønster og struktur i ulike situasjoner, og beskrive sammenhenger mellom størrelser ved hjelp av matematiske modeller

Å se etter mønster

Dersom vi skriver tall i en ordnet liste, kalles dette en **tallfølge,** og tallene i en **tallfølge** danner et bestemt **mønster**. Dersom vi forstår **mønsteret** i en **tallfølge** kan vi forutsi det både det neste tallet i **tallfølgen**, og et tall lengre ut i lista.

Tallfølger kan ofte **representeres geometrisk** ved at vi lager en **figur** til hvert av tallene i lista. Derfor bruker vi gjerne ordet **figurtall** om slike **tallfølger**.

Figurtall er en tallfølge som er representert geometrisk

Din oppgave er å finne **mønsteret** i slike **tallfølger**, og beskrive dette **mønsteret** ved gjennom en **formel**.

Hver **figur** i en **tallfølge** har et **figurnummer**. Den første **figuren** kalles **figur nummer 1**, som skrives **F_1.** Den neste figuren kalles **F_s.** Deretter følger **F_3** osv.

I **formler** som brukes til å beskrive **mønster** er det vanlig å benytte **variabelen** n, og ikke x som ble brukt i forrige kapittel. Derfor vil du se at vi bruker n når vi skal beskrive et ukjent **figurnummer**, som skrives **F_n**.

Når du har funnet **mønsteret** i en **tallfølge**, kan du bli bedt om å finne

- Det neste tallet eller den neste **figuren** i **tallfølgen**
- Et tall eller en **figur** lengre ut i lista
- **Summen** av alle tall eller **figurer** i **tallfølgen** frem til et bestemt nummer i lista

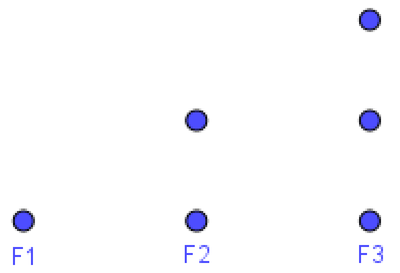
Å se etter **mønster** i **figurtall** har vi mennesker drevet med i hvert fall 2 500 år. Kilder kan fortelle oss at greske matematikere formet **figurene** i **figurtall** med steiner i sanden. Ordet *kalkulere* kommer fra det latinske ordet *calculus*, som betyr liten stein. Derfor finnes det en stor mengde ulike **mønstre**, og langt flere enn vi skal jobbe med i 1P. Du har kanskje hørt om Fibonaccis **tallfølge** eller Pascals trekant? Dersom du har interesse for å utforske **mønster** finnes det mye du kan søke opp.

I dette kapittelet presenterer vi de grunnleggende **mønstrene**; **lineær utvikling**, **kvadrattall**, **rektangeltall**, og **trekanttall**. Når du behersker disse **mønstrene** vil du kunne utforske **figurer** som er satt sammen av flere typer **mønster**.

Naturlige tall – lineær utvikling

Oppgave 1

Tegn figurnummer 4 her:



Beskriv sammenhengen mellom figurnummer og antall prikker i figuren med ord:

____

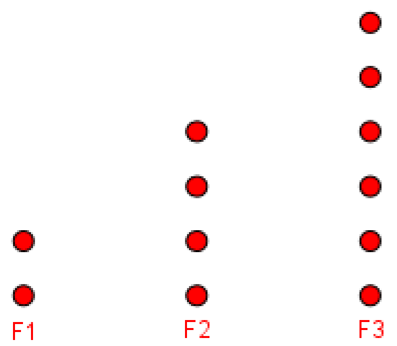
Hvor mange prikker vil det være i F_n?________________________

Hvor mange prikker vil det være i F_{10}?________________________

Hvilket figurnummer kan du lage av 20 prikker?_______________________

Oppgave 2

Tegn figurnummer 4 her:



Beskriv sammenhengen mellom figurnummer og antall prikker i figuren med ord:

____

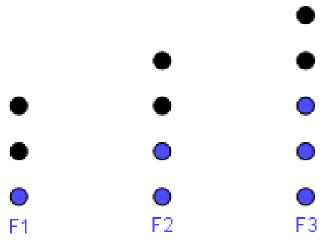
Hvor mange prikker vil det være i F_n?________________________

Hvor mange prikker vil det være i F_{20}?________________________

Hvilket figurnummer kan du lage av 36 prikker?_______________________

Oppgave 3

Tegn figurnummer 4 her:



Beskriv sammenhengen mellom figurnummer og antall prikker i figuren med ord:

____

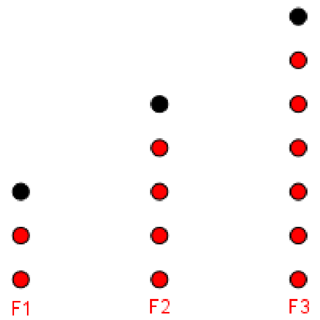
Hvor mange prikker vil det være i F_n?________________________

Hvor mange prikker vil det være i F_{15}?________________________

Hvilket figurnummer kan du lage av 52 prikker?______________________

Oppgave 4

Tegn figurnummer 4 her:



Beskriv sammenhengen mellom figurnummer og antall prikker i figuren med ord:

____

Hvor mange prikker vil det være i F_n?________________________

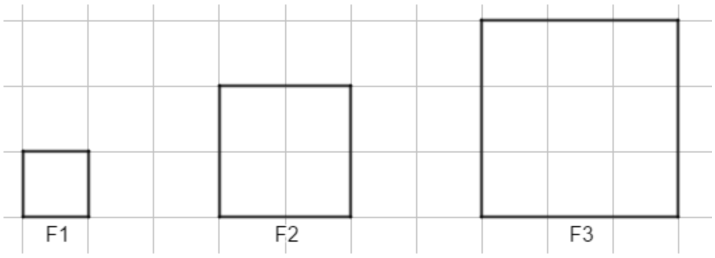
Hvor mange prikker vil det være i F_8?________________________

Hvilket figurnummer kan du lage av 61 prikker?______________________

Kvadrattall

Oppgave 5

Tegn figurnummer 4 her:



Beskriv sammenhengen mellom figurnummer og antall ruter i figuren med ord:

____

Hvor mange ruter vil det være i F_n?________________________

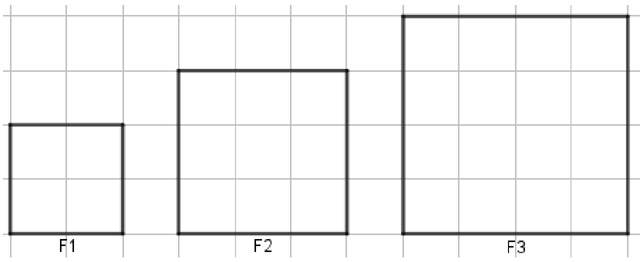
Hvor mange ruter vil det være i F_{12}?_______________________

Hvilket figurnummer kan du lage av 81 ruter?_______________________

En mer eller en mindre; (n+1) eller (n-1)

I noen oppgaver har vi behov for å uttrykke 1 mer eller 1 mindre enn figurnummert når vi skal beskrive en figurutvikling. Matematisk skrives dette som (n+1) eller (n-1). Dette vil vi få bruk for når vi skal regne rektangeltall, trekanttall eller dersom det er en forskyvning slik som i oppgave 6 og 7.

Oppgave 6



Beskriv sammenhengen mellom figurnummer og antall ruter i figuren med ord:

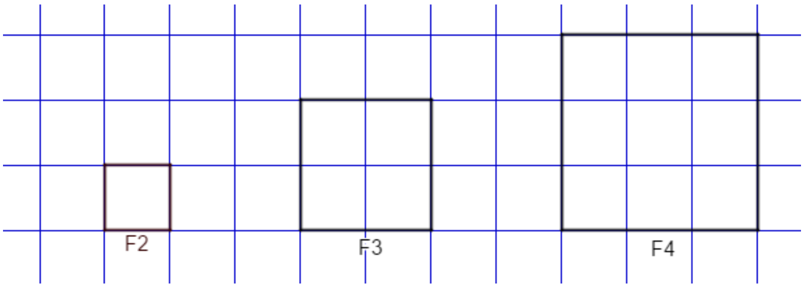
____

Hvor mange ruter vil det være i F_n?________________________

Hvor mange ruter vil det være i F_9?_______________________

Hvilket figurnummer kan du lage av 81 ruter?_______________________

Oppgave 7



Beskriv sammenhengen mellom figurnummer og antall ruter i figuren med ord:

____

Hvor mange ruter vil det være i F_n?________________________

Hvor mange ruter vil det være i F_7?_______________________

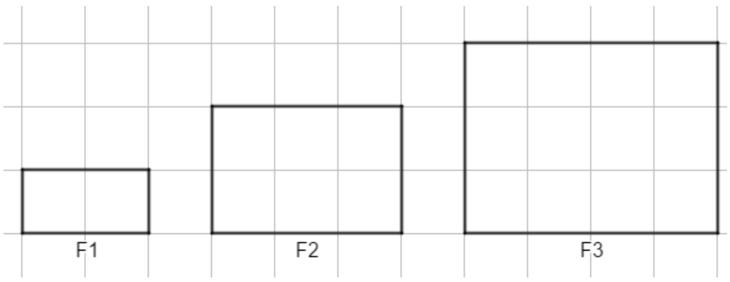
Hvor mange ruter vil det være i F_1?_______________________

Hvilket figurnummer er det største du kan lage av 140 ruter?_______________________

Rektangeltall

Oppgave 8

Tegn figurnummer 4 her:



Beskriv sammenhengen mellom figurnummer og antall ruter i figuren med ord:

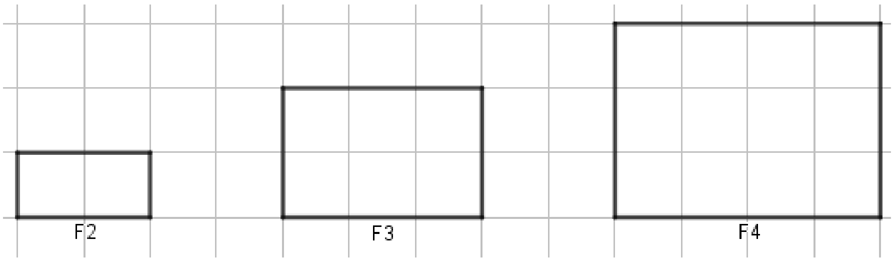
____

Hvor mange ruter vil det være i F_n?________________________

Hvor mange ruter vil det være i F_{100}?_______________________

Hvilket figurnummer kan du lage av 420 ruter?_______________________

Oppgave 9



Beskriv sammenhengen mellom figurnummer og antall ruter i figuren med ord:

____

Hvor mange ruter vil det være i F_n?_______________________

Hvor mange ruter vil det være i F_{10}?______________________

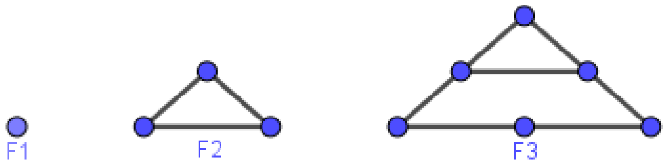
Hvor mange ruter vil det være F_1?___________________________

Hvilket figurnummer er det største du kan lage av 200 ruter?______________________

Trekanttall

Oppgave 10

Tegn figurnummer 4 her:



Beskriv sammenhengen mellom figurnummer og antall prikker i figuren med ord:

____

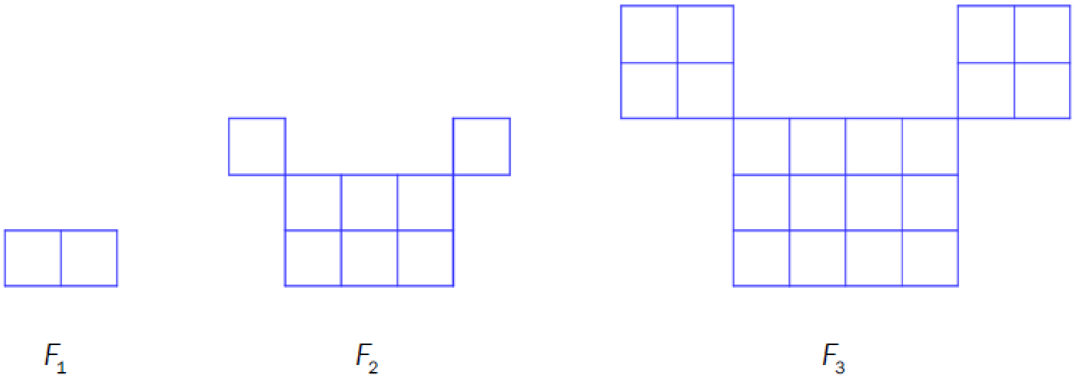
Hvor mange prikker vil det være i F_n?_______________________

Hvor mange prikker vil det være i F_{50}?______________________

Hvilket figurnummer kan du lage av 325 prikker?______________________

Sammensatte figurer

Oppgave 11 (Eksamen 2P, høst 2016, løsningsforslag finner du på matematikk.net eller ndla.no)



Snorre lager figurer av kvadriske klosser etter et fast mønster.

Ovenfor ser du figur F_1 , F_2 og F_3 .

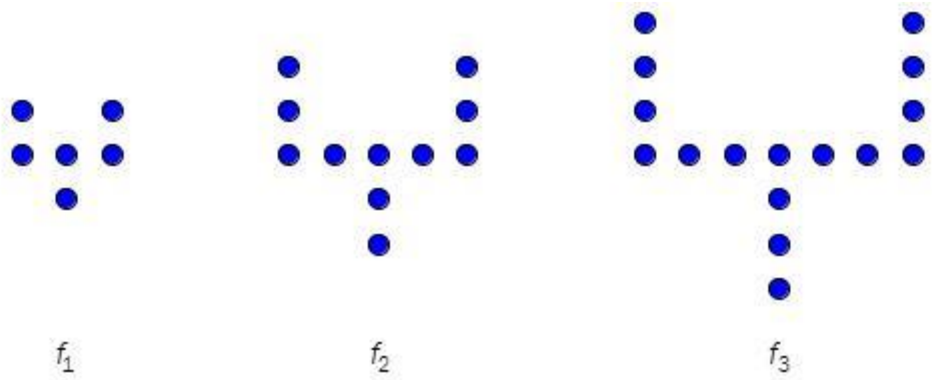
a) Hvor mange klosser trenger Snorre for å lage F_4 og F_5?

b) Bestem et uttrykk for antall klosser i figur F_n uttrykt ved *n*.

Snorre har 1000 klosser. Han vil lage en figur som er så stor som mulig.

c) Bruk formelen fra oppgave b) til å bestemme hvor mange klosser han får til overs når han har laget figuren.

Oppgave 12 (Eksamen 2P, høst 2012, løsningsforslag finner du på matematikk.net eller ndla.no)



Siri lager figurer av runde perler. Figurene ovenfor har hun kalt f_1, f_2 og f_3 .

(Oppgaven fortsetter på neste side)

a) Følg samme mønster, og tegn figuren f_4.
Hvor mange perler vil det være i figuren f_5 og i figuren f_6 ?

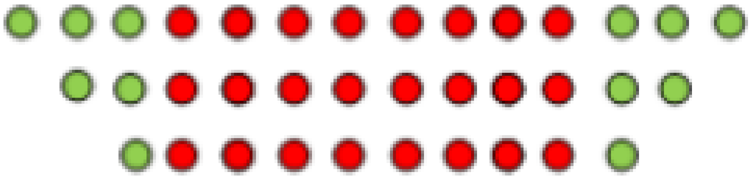
b) Sett opp en modell som viser antall perler i figuren f_n, uttrykt ved n.

c) Bruk modellen til å bestemme hvor mange perler Siri trenger for å lage figuren f_{36} .

d) Hva er den største figuren f_n Siri kan lage dersom hun har 1000 perler?

Oppgave 13 (Eksempeloppgave, vår 2015, løsningsforslag finner du på matematikk.net)

I en teatersal der det 580 plasser. På første stolrad er det 10 plasser. På andre stolrad er det 12 plasser, og på tredje stolrad er det 14 plasser. Se figuren nedenfor.



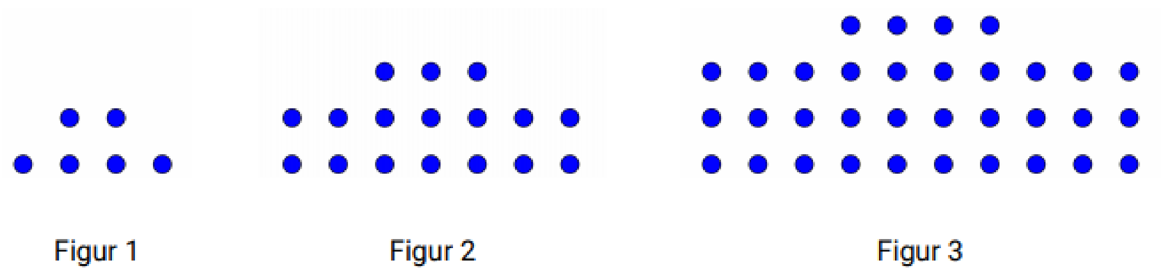
Slik fortsetter det å øke med to plasser for hver stolrad bakover i salen.

a) Hvor mange stolrader er det i salen?

På første stolrad er billettprisen 350 kroner. På stolrad nummer to er billettprisen 340 kroner. Slik går billettprisen ned med 10 kroner for hver stolrad bakover i salen.

b) På hvilken stolrad koster billettene mest til sammen?

Oppgave 14 (Eksamen 2P, høst 2019, løsningsforslag finner du på matematikk.net eller ndla.no)

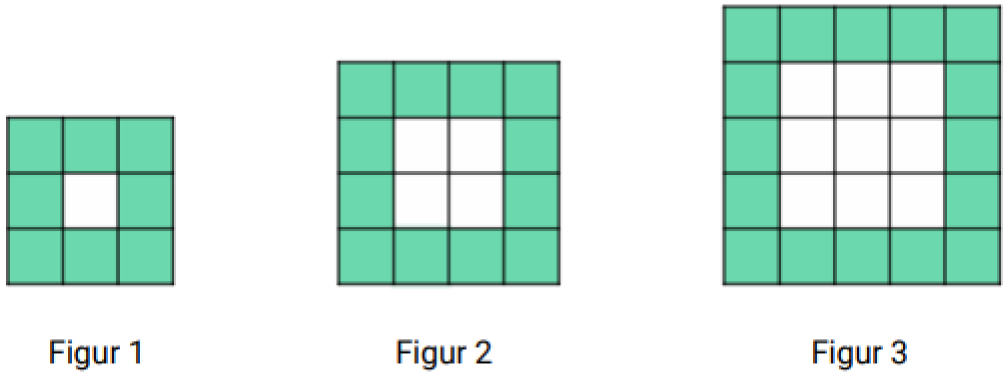


Ovenfor ser du tre figurer. Figurene er satt sammen av små sirkler. Dina vil fortsette å tegne figurer etter samme mønster.

(Oppgaven fortsetter på neste side)

a) Hvor mange små sirkler vil det være i figur 4?
b) Bestemt et uttrykk for antallet små sirkler i figur *n* uttrykt ved *n*.
c) Hvor mange små sirkler vil det være i figur 100?

Oppgave 15 (eksamen vår 2020, løsningsforslag finner du på matematikk.net eller ndla.no)

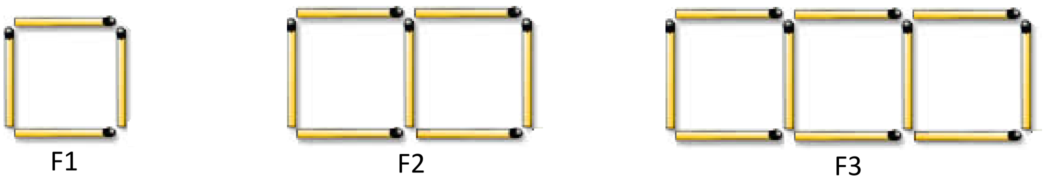


Ovenfor ser du tre figurer. Figurene er satt sammen av små hvite kvadrater og små grønne kvadrater. Tenk deg at du skal fortsette å lage figurer etter samme mønster.

a) Hvor mange små grønne kvadrater vil det være i figur 10?
Sett opp et regnestykke som viser hvordan du har tenkt for å komme fram til dette svaret.
b) Bestem et uttrykk for antall små grønne kvadrater når antall små hvite kvadrater er n^2.

Oppgave 16

Nedenfor ser du figurer bygget av fyrstikker. Antall fyrstikker i hver figur øker etter et fast mønster.



Anta at dette mønsteret fortsetter

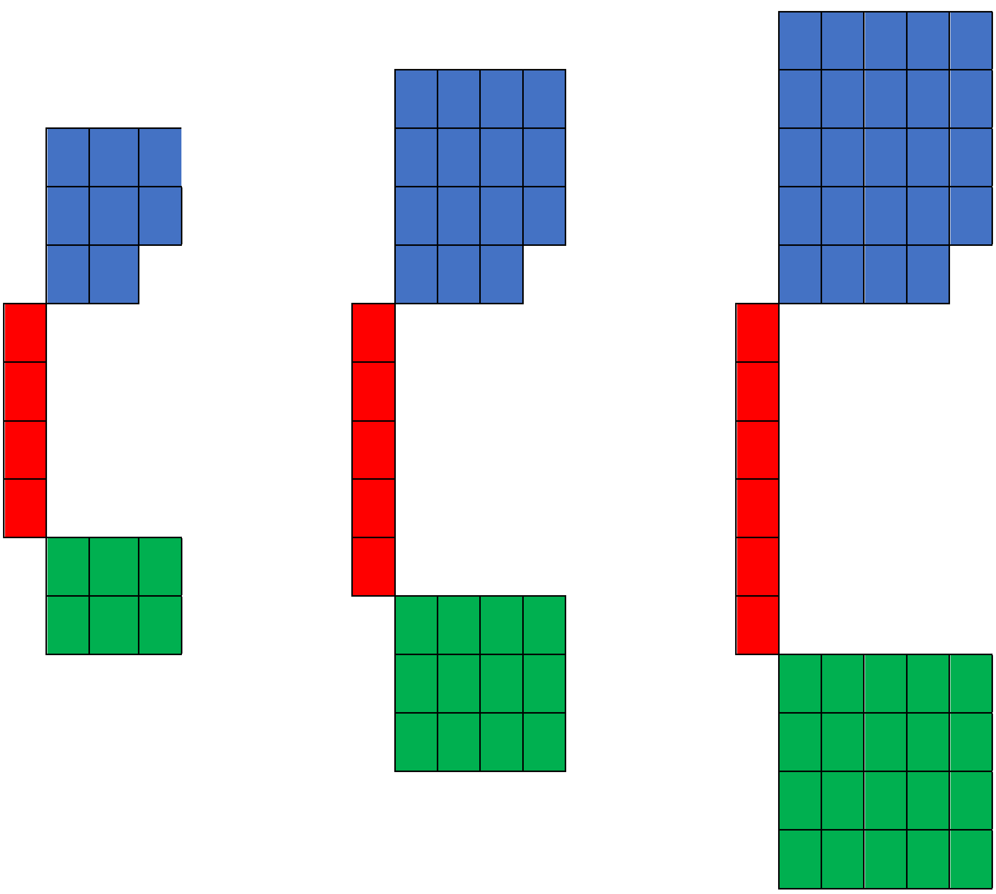
a) Hvor mange fyrstikker trengs til å bygge F4?

b) Finn et uttrykk for figur n (F_n)

c) Hvor mange fyrstikker vil det være i F_{20}?

d) Hva er den største figuren du kan bygge dersom du har 100 fyrstikker?

Oppgave 17



Ovenfor ser du en rekke med figurer som vokser etter bestemte mønstre. Figurene består av 3 deler: **blå**, **rød**, og **grønn.** Hver av delene er bygd opp av små ruter.

a) Fyll ut de tomme rutene.

Antall kvadrater i figur nr.	Del			Sum ruter i hele figuren
	Rød	Grønn	Blå	
3	4	6	8	
4	5	12	15	
5	6	20	24	
6				
10				
n				

b) I en figur var det til sammen 800 små kvadrater. Hvilket figurnummer hadde denne figuren?

Fasit figurtall

Oppgave	Svar
1	a) $F_n = n$ antall prikker b) $F_{10} = 10$ prikker c) 20 prikker = F_{20}
2	a) $F_n = 2n$ antall prikker b) $F_{20} = 40$ prikker c) 36 prikker = F_{36}
3	a) $F_n = n+2$ ant. prikker b) $F_{15} = 17$ prikker c) 52 prikker = F_{25}
4	a) $F_n = 2n+1$ ant. prikker b) $F_8 = 17$ prikker c) 61 prikker = F_{30}
5	a) $F_n = n^2$ antall ruter b) $F_{12} = 144$ ruter c) 81 ruter = F_9
6	a) $F_n = (n+1)^2$ ant. ruter b) $F_9 = 100$ ruter c) 81 ruter = F_8

Oppgave	Svar
7	a) $F_n = (n-1)^2$ ant. ruter b) $F_7 = 36$ ruter c) $F_1 = 0$ ruter d) 121 ruter = F_{12}
8	a) $F_n = n \cdot (n+1)$ ant. ruter (= $n^2 + n$) b) $F_{100} = 10100$ ruter c) 420 ruter = F_{20}
9	a) $F_n = n \cdot (n-1)$ ant. ruter (= $n^2 - n$) b) $F_{10} = 90$ ruter c) $F_1 = 0$ ruter d) 182 ruter = F_{14}
10	a) $F_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ ant. prikker (= $\frac{n^2+n}{2}$) b) $F_{50} = 1275$ prikker c) 325 prikker = F_{25}
16	a) F4 = 13 fyrstikker b) $F_n = 3n + 1$ c) $F_{20} = 61$ fyrstikker d) 100 fyrstikker = F_{33}

Oppgave 17

Antall kvadrater i figur nr.	Del			Sum ruter i hele figuren
	Rød	Grønn	Blå	
3	4	6	8	18
4	5	12	15	32
5	6	20	24	50
6	7	30	35	72
10	11	90	99	200
n	$n + 1$	$n \cdot (n-1) = n^2 - n$	$n^2 - 1$	$2n^2$
b) 800 små kvadrater = F_{20}				

Sannsynlighet

Målet for opplæringen er at eleven skal kunne:

- Lage eksempler og simuleringer av tilfeldige hendelser, og forklare begrepet sannsynlighet
- Beregne sannsynlighet ved å telle opp gunstige og mulige utfall, systematisere opptellinger ved hjelp av krysstabeller, venndiagram og valgtre, og bruke addisjonssetningen og produktsetningen i praktiske sammenhenger

Utforskende oppgave – Første hest til 10

I denne oppgaven skal dere jobbe sammen i par.

En av dere kaster 2 terninger, og legger sammen antall øyne på terningene.

Den andre setter et kryss i første ledige rute i kolonnen til summen.

Oppgaven avsluttes når en kolonne er full, som betyr at en sum har blitt kastet 10 ganger. Før dere begynner kan dere gjette hvilken sum som først blir kastet 10 ganger.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Sum ved to terningkast											

Etter gjennomføringen av oppgaven kan dere sammenligne resultater med de andre gruppene og med resultatet fra tidligere år. Er mønsteret noenlunde likt?

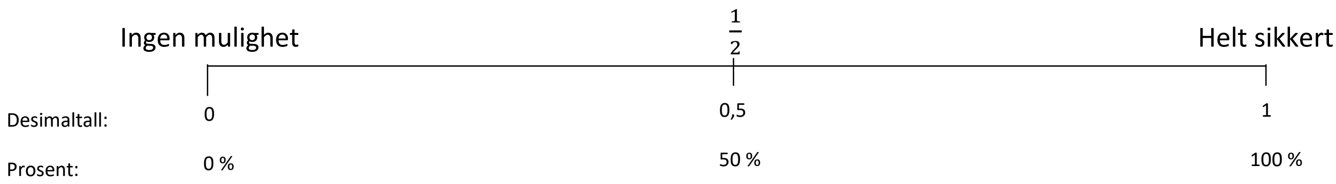
Hva *er* sannsynlighet?

I de fleste tilfelle er det umulig å vite sikkert hva som vil skje. Av og til kan vi likevel regne ut hvor *sannsynlig* det er at noe bestemt kommer til å hende.

I daglig tale kan vi si noe sånt som at det er stor sannsynlighet at Vålerenga kommer til å slå Rosenborg i helgens fotballkamp, eller at det liten sjanse at Sara får stryker på neste matematikkprøve. Da gir vi uttrykk for at vi er ganske sikre på at Vålerenga vinner, og at Sara antagelig vil bestå. Men de to sannsynlighetene gir bare uttrykk for hva vi *tror* på grunnlag av hva fotballagene og Sara har prestert tidligere.

Sannsynligheter som uttrykker noe mer enn bare hva vi tror, må *beregnes*, og vi skriver sannsynligheten som et tall. Dette tallet er i utgangspunktet en brøk, og kan også skrives som et desimaltall eller en prosent. Dersom oppgaven ikke ber om en bestemt løsning, kan du velge skrivemåte selv.

Vi kan visualisere sannsynlighet med en tallinje:



De enkleste regnemåtene innenfor sannsynlighetsregning skal du lære i dette kapitlet. Avansert sannsynlighetsregning er svært viktig i praktiske sammenhenger, for eksempel i forsikringsbransjen, medisinsk forskning, genetikk og mange typer lotterier og spill, men dette er ikke pensum for 2P-Y.

Begrepsliste

Innenfor sannsynlighet møter du en del begreper som ikke brukes i andre temaer i 2P-Y. Nedenfor finner du en tabell med begreper og forklaringer.

Begrep	**Forklaring**
Probability	(Engelsk) Sannsynlighet, forkortes P
Hendelse	Et forsøk, et trekk, en test eller et eksperiment
Tilfeldig trekk	Vi gjennomfører en hendelse uten å påvirke utfallet
Variabel	Noe man måler eller teller, et svar
Utfall	Resultatet av en hendelse
Utfallsrom	Alle mulige resultater til en hendelse
Gunstige utfall	Antall ønskede resultater til en hendelse
Mulige utfall	Antall mulige resultater til en hendelse
Anta	Tenk, eller se for deg
Visualisere	Vise, tegne, lage tabell
Gitt	Det viser seg, tenk deg, dersom, hvis
Sammensatt forsøk	Resultatet av flere hendelser

Sannsynlighetsformelen

Som nevnt på forrige side skrives sannsynligheten til et utfall som en brøk. Denne brøken kalles sannsynlighetsformelen, og er slik:

$$P(utfall) = \frac{antall\ gunstige\ utfall}{antall\ mulige\ utfall}$$

I formelen er det brukt to fagbegreper. Utfall kan oversettes til resultat, og istedenfor gunstig kan vi skrive ønskede. Dermed kan vi skrive brøken på nytt med forståelige ord:

$$P(resultat) = \frac{antall\ ønskede\ resultater}{antall\ mulige\ resultater}$$

Du lurer kanskje på hvorfor det står *P(resultat)*? P står for «probability», som er engelsk for sannsynlighet. Inne i parentesen skrives det vi undersøker sannsynligheten til.

Et eksempel. Anta at vi har undersøkt kjønn til 5 000 nyfødte barn på et stort sykehus. Vi setter opp resultatene i en tabell:

Utfall	**Antall**
Gutt	2 570
Jente	2 430
Gutt eller jente	5 000

Anta deretter at vi trekker et tilfeldig valgt nyfødt barn, og undersøker om det blir gutt eller jente. Da kan vi sette følgende eksempler på begrepene i begrepslista fra forrige side:

Begrep	**Forklaring**
Probability	P
Hendelse	Vi undersøker kjønnet til et nyfødt barn
Tilfeldig trekk	Alle de nyfødte barna har like stor sjanse på å bli trukket ut
Utfall	Hvilket kjønn blir det?
Utfallsrom	Gutt og jente
Gunstige utfall	Gutt: 2 570 Jente: 2 430
Mulige utfall	5 000

Hva er sannsynligheten for at det tilfeldig valgte barnet er en gutt?

Svar: *P*(gutt) = $\frac{2\,570}{5\,000}$ = 0,514 = 51,4%

Hva er sannsynligheten for at det tilfeldig valgte barnet er en jente?

Svar: *P*(jente) = $\frac{2\,430}{5\,000}$ = 0,486 = 48,6 %

Oppgave 1

På Hellerud VGS er det 650 elever. Blant disse elevene er 300 jenter.

a) Fremstill resultatene i en tabell som vist på forrige side.

Utfall	Antall

Anta at vi trekker en tilfeldig valgt elev.

b) Hva er sannsynligheten for at denne eleven er en jente?

c) Hva er sannsynligheten for at denne eleven er en gutt? Løs oppgaven på to måter.

Oppgave 2

Rød-grønn fargeblindhet rammer først og fremst gutter. Blant 5 460 undersøkte norske mannlige rekrutter var 437 fargeblinde. Resten hadde normalt fargesyn.

a) Fremstill resultatene i en tabell som vist på forrige side.

Utfall	Antall

Anta at vi trekker en tilfeldig valgt rekrutt.

b) Hva er sannsynligheten for at denne rekrutten er fargeblind?

c) Hva er sannsynligheten for at denne rekrutten *ikke* er fargeblind? Løs oppgaven på to måter.

Oppgave 3

Vi trekker et tilfeldig valgt kort fra en kortstokk. Finn:

a) P(hjerter) =

b) P(partall) =

c) P(sort kort) =

d) P(bildekort) =

e) P(spar ess) =

Kombinasjoner; multiplikasjonsprinsippet

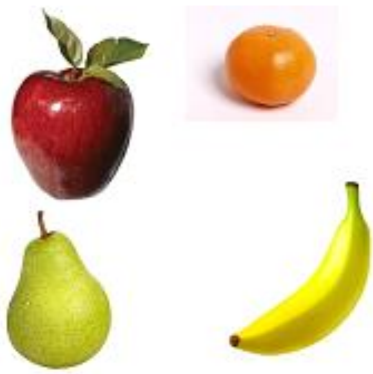
I de forrige oppgavene kunne vi telle oss frem til antall mulige utfall, men ofte er oppgavene såpass kompliserte at vi må regne oss frem til antall mulige utfall. Dette gjelder når et utfall består av flere valg.

Anta at du er på en restaurant som tilbyr 3 forretter og 5 hovedretter, og at hver av de 3 forrettene kan kombineres med hver av de 5 hovedrettene. Det gir $3 \cdot 5$ mulige kombinasjoner, altså 15 kombinasjoner.

Anta videre at restauranten tilbyr 4 ulike desserter, og at de tilbyr kundene en valgfri 3-rettersmeny til en fast pris. Hvor mange forskjellige 3-retersmenyer kan bestilles? 3 forretter, 5 hovedretter og 4 desserter kan kombineres på $3 \cdot 5 \cdot 4$ ulike måter, altså 60 kombinasjoner.

Oppgave 4

Kaia skal på tur, og vil kjøpe med en sjokolade og en frukt fra kiosken. Kioskens tilbud ser du nedenfor:



Hvor mange ulike kombinasjoner kan Kaia velge mellom?

Oppgave 5

Simen triller to terninger.

a) Hvor mange ulike kombinasjoner kan han få?

Anta at han legger sammen antall øyne på hver av terningene.

b) Hva er utfallsrommet til denne hendelsen?

Anta at han subtraherer antall øyne på hver av terningene.

c) Hva er utfallsrommet til denne hendelsen?

Anta at han multipliserer antall øyne på hver av terningene.

d) Hva er lavest og høyest verdi han kan oppnå? Er det noen av tallene imellom lavest og høyest verdi som er umulig å oppnå?

Visualisering av antall mulige (en variabel) – tabell og valgtre

I forrige delkapittel regnet vi oss frem til antall mulige utfall. Dersom vi trenger å finne antall gunstige utfall må vi ofte lage en oversikt over de mulige utfallene. Nedenfor presenterer vi to metoder; **tabell** og **valgtre.**

Tabell

Tabell gir en god oversikt over de mulige kombinasjonene, men kan bare brukes når kombinasjonene består av to valg. La oss visualisere alle mulige utfall i oppgave 4. I de grå rutene skriver vi hva Kaia kan velge mellom, i de hvite rutene skriver vi kombinasjonen av to valg. Vi bruker forkortelser for å slippe å fylle rutene med bokstaver. For eksempel betyr «E – D» kombinasjonen av eple og Daim.

Oppgave 4		Frukt			
		Eple	Klementin	Pære	Banan
Sjokolade	Melkesjokolade	E – M	K – M	P – M	B – M
	Firkløver	E – Fir	K – Fir	P – Fir	B – Fir
	Helnøtt	E – H	K – H	P – H	B – H
	Fruktnøtt	E – Fru	K – Fru	P – Fru	B – Fru
	Appelsinkrokan	E – A	K – A	P – A	B – A
	Daim	E – D	K – D	P – D	B – D
	Non Stop	E – NS	K – NS	P – NS	B – NS

Nå som vi har visualisert alle mulige utfall kan vi svare på spørsmål.

Anta at Kaia trekker tilfeldig en sjokolade og en frukt.

a) Hva er sannsynligheten for at hun trekker en klementin?
Svar: Antall utfall som inneholder en klementin er 8. Til sammen er det 32 mulige utfall.
$P(\text{klementin}) = \frac{8}{32} = 0{,}25 = 25\ \%$.

b) Hva er sannsynligheten for at hun trekker en Non Stop?
Svar: Antall utfall som inneholder Non Stop er 4.
$P(\text{Non Stop}) = \frac{4}{32} = 0{,}125 = 12{,}5\ \%$.

Det viser seg at Kaia har nøtteallergi, og må derfor velge en sjokolade som ikke inneholder nøtter.

c) Hva er sannsynligheten for at hun ikke trekker en sjokolade med nøtter?
Svar: Firkløver, Helnøtt og Fruktnøtt inneholder nøtter. Dette gir 20 utfall uten nøtter.
$P(\text{ikke nøtter}) = \frac{20}{32} = 0{,}625 = 62{,}5\ \%$.

Merk: det er ikke mulig å løse oppgaver med mer enn to valg med en slik tabell. For eksempel kan ikke eksempelet med restauranten som tilbyr en 3-rettersmeny visualiseres på denne måten. Til slike tilfeller må vi bruke valgtre.

Oppgave 6

Simen triller to terninger og legger sammen antall øyne.

a) Fremstill antall mulige utfall tabellen nedenfor dersom vi legger sammen antall øyne på terningene.

Oppgave 6 Summen av to terninger		Rød terning					
		1	2	3	4	5	6
Blå terning	1	2	3				
	2						
	3						
	4					9	
	5						
	6						

Bruk summen av to terninger, og finn:

b) P(partall) =

c) P([3 – 7>) =

d) P(1) =

e) Skriv hvilke kombinasjoner som gir hvilke summer i skjemaet under. En rute skal kun inneholde 1 kombinasjon.

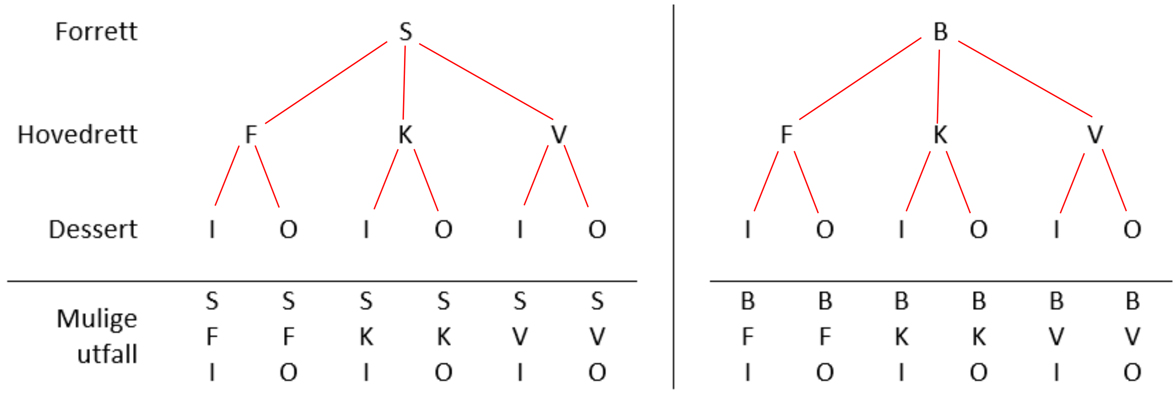
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Sum ved to terningkast											

f) Hvilken sum har høyest sannsynlighet for å bli kastet? Sammenlign mønsteret i skjemaet over med resultatene fra introduksjonsoppgaven. Ser du en likhet? Hvorfor blir det slik?

Valgtre

Et alternativ til å lage en tabell er å tegne et valgtre, spesielt om oppgaven består av flere enn to valg. En utfordring med valgtre er at det vil ta mye plass. Bakerst i dette kapittelet viser vi ulike løsninger på dette problemet.

Vi bruker restauranteksempelet fra delkapittel 2.2, og visualiserer alle mulige utfall. For enkelhets skyld reduserer vi utvalget til å være 2 forretter (suppe eller brød), 3 hovedretter (fisk, kjøtt eller vegetar) og 2 desserter (is eller ost). Nedenfor har vi visualisert alle mulige utfall. For å spare plass har vi brukt forkortelser for forrettene, hovedrettene og dessertene.



De røde linjene viser mulige «veier å gå» i valgene. Under linja har vi skrevet alle mulige utfall. For eksempel betyr «S F I» at man har valgt suppe, fisk og is.

Nå som vi har visualisert alle mulige utfall kan vi svare på spørsmål.

a) Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt meny inneholder is til dessert?
Svar: Det er til sammen 12 mulige utfall. Av disse inneholder 6 is til dessert. Dermed blir
$P(\text{is}) = \frac{6}{12} = 0{,}5 = 50\ \%$

b) En person ønsker både kjøtt og ost. Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt meny inneholder dette?
Svar: Antall gunstige utfall (meny som inneholder kjøtt og ost) er 2. Dermed blir
$P(\text{kjøtt og ost}) = \frac{2}{12} = 0{,}167 = 16{,}7\ \%$

c) En annen person ønsket seg enten suppe eller is. Hva er sannsynligheten for at denne personen får oppfylt ønsket sitt ved en tilfeldig valgt meny?
Svar: Det er 9 gunstige utfall. Dermed blir
$P(\text{suppe eller is}) = \frac{9}{12} = 0{,}75 = 75\ \%$

Oppgave 7

En familie består av 3 barn.

a) Tegn et valgtre som visualiserer alle mulige kombinasjoner av gutter og jenter i en trebarnsfamilie.
b) Hva er sannsynligheten for utfallet jente – gutt – gutt?
c) Hva er sannsynligheten for en familie består av to jenter og en gutt?

Visualisering av antall mulige (to variabler) – krysstabell

Oppgave 8

Finne et mønster i en tabell

- Tenk to minutter individuelt
- Gå sammen med læringspartner og diskuter forslag fem minutter
- Fyll ut tabell 1 og 2
- Et felles metodeforslag i klassen. Fint om alle kan bidra muntlig

7	4	11
3		9
10		20

8		
	2	8
14	7	

Oppgave 9

Finn og fyll ut mønsteret i tabell 3 og 4 individuelt.

6	8	
7		
		34

	9	12
9		
		27

Oppgave 10

Forklar mønsteret med egne ord:

Når vi gjennomfører en undersøkelse hender det ofte at de som deltar i undersøkelsen må svare på flere spørsmål. Dermed får vi flere variabler. Vi bruker en krysstabell for å visualisere svarene.
Gjør en undersøkelse i klassen, hvor dere besvarer følgende spørsmål:

- Tok du t-banen til skolen i dag?
- Tok du buss til skolen i dag?
- Tok du hverken t-bane eller buss til skolen i dag?

Skriv inn resultatet av undersøkelsen i krysstabellen nedenfor:

Klasse:	Tok t-bane i dag	Tok ikke t-bane i dag	Sum
Tok buss i dag	T-bane og buss	Buss, men ikke t-bane	Alle som tok buss
Tok ikke buss i dag	T-bane men ikke buss	Ingen	Alle som ikke tok buss
Sum	Alle som tok t-bane	Alle som ikke tok t-bane	Hele klassen

Nå som vi har visualisert alle mulige utfall kan vi svare på spørsmål.

Vi trekker en tilfeldig valgt elev fra klassen.

a) Hva er sannsynligheten for at denne eleven tok t-bane til skolen i dag?
b) Hva er sannsynligheten for at denne eleven hverken tok t-bane eller buss til skolen i dag?
c) Hva er sannsynligheten for at denne eleven tok t-bane, men ikke buss til skolen i dag?

Det viser seg at eleven tok buss til skolen i dag.

d) Hva er sannsynligheten for at denne eleven ikke tok t-bane?

Oppgave 11

Siv har fire blå og seks svarte bukser i skapet. En av de blå og tre av de svarte buksene passer ikke lenger.

Fyll inn krysstabellen nedenfor slik at den passer med oppgaven.

	Blå bukser	Svarte bukser	Sum
Bukser som passer			
Bukser som ikke passer	1	3	
Sum	4	6	

Siv skal trekke en bukse fra skapet.

a) Bestem sannsynligheten for at buksen hun trekker, er svart.
b) Gitt at buksen er blå, bestem sannsynligheten for at buksen ikke passer.

Oppgave 12

I en klasse er det 15 jenter og 10 gutter. 5 av jentene og 5 av guttene drikker kaffe.

Fyll inn krysstabellen nedenfor slik at den passer med oppgaven.

	Jenter	Gutter	Sum
Drikker kaffe			
Drikker ikke kaffe			
Sum			

a) Hvis vi trekker en elev, hva er sannsynligheten for at eleven ikke drikker kaffe?

Det viser seg at eleven drikker kaffe.

b) Hva er sannsynligheten for at eleven er en jente?

Oppgave 13

I en klasse er det 20 elever. 8 av elevene har vært i USA. 11 har vært i Spania. 5 av elevene har verken vært i USA eller Spania.

Systematiser opplysningene ovenfor i en krysstabell

	Har vært i USA	Har ikke vært i USA	SUM
Har vært i Spania			
Har ikke vært i Spania			
SUM			

a) Hvis vi trekker en tilfeldig elev, hva er sannsynligheten for at denne har vært i USA men ikke i Spania?
b) Hva er sannsynligheten for at eleven ikke har vært i noen av landene?
c) Hva er sannsynligheten for at eleven har vært i minst ett av landene? Løs oppgaven på to måter.

Det viser seg at eleven har vært i Spania.

d) Hva er sannsynligheten for at denne eleven også har vært i USA?

En serie med hendelser – sammensatte forsøk

Så langt har vi funnet sannsynligheten til et utfall når vi kun har foretatt ett trekk, gjort kun en undersøkelse eller gjennomført kun ett eksperiment. Imidlertid gjør vi ofte et forsøk flere ganger, og ser på det samlede resultatet av alle forsøkene. Vi er da interessert i utfallet etter en serie hendelser.

I en slik hendelsen lager vi en brøk til hvert utfall. Hva vi gjør med brøkene avhenger av hvordan oppgaven er formulert. Du kan bli bedt om å finne sannsynligheten til et ønsket resultat i:

- Begge (alle) hendelsene
- Nøyaktig 1 av hendelsene
- Minst 1 av hendelsene

Regnemetodene nedenfor er et alternativ til å lage tabell eller et valgtre.

Med eller uten tilbakelegging?

Selv om vi foretar det samme trekket, gjør den samme undersøkelsen eller gjennomfører det samme eksperimentet flere ganger er det ikke sikkert at brøken til hendelsene er like. Dette avhenger av om det samme resultatet kan oppnås flere ganger. Vi kaller dette «med eller uten tilbakelegging».

Eksempler på «med tilbakelegging»:

- Når du kaster en terning kan du få samme antall øyne hver gang du kaster terningen
- Hver fotballkamp som spilles kan få det samme resultatet
- Hver gang du knipser et kronestykke kan mynten lande med den samme siden opp
- Hver gang et barn fødes kan det bli en gutt eller en jente

Felles for disse eksemplene er at utfallet ikke «brukes opp», og utfallet kan dermed hende en gang til. Kan du komme med andre eksempler på utfall som ikke brukes opp?

Eksempler på «uten tilbakelegging»:

- Dersom to elever skal trekkes til en oppgave kan ikke den samme eleven trekkes to ganger
- Når et lodd er trukket kan ikke dette loddet trekkes på nytt
- Når en bingokule er trukket kan ikke denne trekkes på nytt
- Skal du velge to epler fra en fruktdisk trekker du ikke det samme eplet to ganger

Felles for disse eksemplene er at utfallet brukes opp, og at utfallet dermed ikke kan hende en gang til. Kan du komme med andre eksempler på utfall som kan brukes opp?
I eksemplene nevnt ovenfor må vi selv forstå om det sammensatte forsøket er med eller uten tilbakelegging. I andre situasjoner er ikke dette like tydelig. I så fall vil det være skrevet i oppgaven.

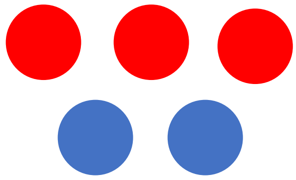
Eksempler som kan være både med og uten tilbakelegging:

- Det skal trekkes en og en kule ut fra en bolle
- Det skal trekkes ett og ett kort ut fra en kortstokk.

Dersom det sammensatte forsøket er med tilbakelegging vil brøken være lik for hver hendelse. Dersom det sammensatte forsøket er uten tilbakelegging vil antall gunstige og antall mulige reduseres med en for hver hendelse.

I de neste delkapitlene skal vi se på hvordan vi bruker brøkene til hendelsene gjennom følgende sammensatte forsøk:

I en bolle ligger det 5 kuler. Av disse er 3 av kulene røde, og 2 er blå (se bildet til høyre).
Vi trekker tilfeldig to kuler etter hverandre, og ser på utfallet for det sammensatte forsøket. Vi kaller det første trekket for trekk A og det andre trekket for trekk B.



Dersom vi legger den første kula tilbake vil sannsynligheten for å trekke en rød kule være $\frac{3}{5}$ i begge trekk.
Dersom vi ikke legger den første kula tilbake vil sannsynligheten for å trekke en rød kule være $\frac{3}{5}$ i første trekk og $\frac{2}{4}$ i andre trekk. Denne brøken kan forkortes til $\frac{1}{2}$.

Begge (alle) hendelsene: produktsetningen

Spørsmål: Hva er sannsynligheten for at begge kulene er røde?

Metode: Når det må trekkes en rød kule i både trekk A og i trekk B må vi multiplisere sannsynligheten for å trekke en rød kule i trekk A med sannsynligheten for å trekke en rød kule i trekk B.

Dette kan skrives slik: *P*(to røde kuler) = P(rød i trekk A) · *P*(rød i trekk B)
Svar:
Med tilbakelegging: $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$ = 0,36 = 36 %
Uten tilbakelegging: $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$ = 0,3 = 30 %

Spørsmål: Hva er sannsynligheten for at ingen av kulene er røde.

Metode: Når ingen av kulene skal være røde man unngå å trekke rød kule i både trekk A og trekk B. Antall gunstige blir dermed alle kulene som ikke er røde. Deretter blir regningen lik.
Svar:
Med tilbakelegging: $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$ = 0,16 = 16 %
Uten tilbakelegging: $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{20}$ = 0,1 = 10 %

I et sammensatt forsøk er sannsynligheten for hendelsen *A* i første delforsøk og hendelsen *B* i andre delforsøk gitt ved *produktsetningen*:

$$P(A \text{ og } B) = P(A) \cdot P(B)$$

Det kan hende at sannsynligheten for *B* påvirkes av at *A* har skjedd.

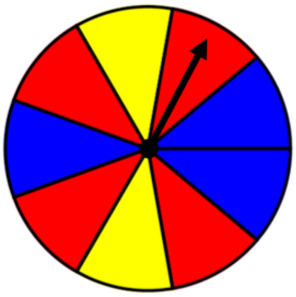
Oppgave 14

I en boks er det 6 grønne kuler og 3 hvite kuler. Du trekker to tilfeldige kuler uten å legge tilbake den første kula du trekker.

a) Hva er sannsynligheten for at begge kulene er grønne?
b) Hva er sannsynligheten for at ingen av kulene er grønne?

Oppgave 15

På et tivoli ser du et lykkehjul. For å vinne førstepremien må du snurre pila tre ganger, og treffe gul alle tre gangene.



a) Finn sannsynligheten for å vinne førstepremien.
b) Hva er sannsynligheten for at pila ikke lander på gul i noen av snurrene?

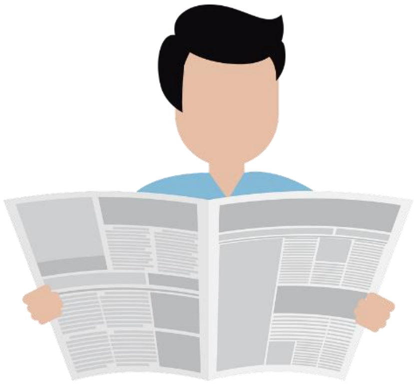
Oppgave 16

Ved en skole med 100 elever leser 80 av elevene aviser på nett, 50 leser papiraviser, og 2 leser ikke aviser.

a) Systematiser opplysningene gitt i teksten ovenfor i krysstabellen nedenfor.

Du møter tilfeldigvis to av elevene i skolegården

b) Bestem sannsynligheten for at begge leser både aviser på nett og papiraviser.
c) Bestem sannsynligheten for at ingen av dem leser nettaviser.



Det viser seg at begge leser aviser på nett

d) Bestem sannsynligheten for at begge også leser papiraviser.

Nøyaktig 1: addisjonssetningen

Spørsmål: Hva er sannsynligheten for at 1 av kulene er røde?

Metode: Når du skal trekke nøyaktig 1 rød kule kan dette gjøres på to måter: enten trekke rød kule i trekk A (og ikke i trekk B) eller trekke rød kule i trekk B (men ikke i trekk A).
I og med at dette kan gjøres på to måter regner vi ut sannsynligheten for hvert av mulighetene, og legger dem sammen.

Dette kan skrives slik:
P(rød i trekk A eller B) = *P*(rød i trekk A) · *P*(ikke rød i trekk B) + *P*(ikke rød i trekk A) · *P*(rød i trekk B)

Svar:
Med tilbakelegging: $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{25}$ = 0,48 = 48 %
Uten tilbakelegging: $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{12}{20}$ = 0,6 = 60 %

Addisjonssetningen. Vi finner sannsynligheten for at hendelse *A eller* hendelse *B* vil inntreffe ved å *legge sammen* sannsynlighetene for hver av hendelsene.

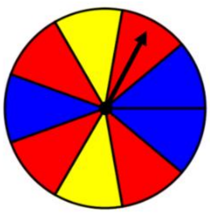
P(*A* eller *B*) = *P*(*A*) + *P*(*B*).

Forutsetningen er at hendelsene ikke har noen felles utfall. Det betyr at ikke begge kan skje samtidig. Dette kommer vi tilbake til i neste delkapittel.

Oppgave 17
I en boks er det 6 grønne kuler og 3 hvite kuler. Du trekker to ganger fra boksen, og legger tilbake den første kula du trekker.

Hva er sannsynligheten for at du trekker nøyaktig 1 hvit kule?

Oppgave 18
Tilbake på tivoliet ser du at kan vinne en annen premie dersom du snurrer pila tre ganger, og får nøyaktig 1 blå.



Finn sannsynligheten for å vinne denne premien.

Oppgave 19
En klasse på 20 elever planlegger sommerferien.
- 16 har fått sommerjobb
- 10 av elevene som har fått sommerjobb, skal også på ferie.
- 2 elever har ikke fått sommerjobb og skal heller ikke på ferie.

Systematiser opplysningene ovenfor i krysstabellen på neste side.

Vi velger oss to elever som skal på ferie. Bestem sannsynligheten for at kun en av dem har sommerjobb.

Minst 1: to metoder

Spørsmål: Hva er sannsynligheten for at minst 1 av kulene er røde?
Dette spørsmålet kan løses ved hjelp av to metoder. Vi deler derfor dette delkapittelet opp i to deler, men først må vi lage en oversikt over hvilke utfall som er mulig. Dette kan visualiseres slik:

Mulige kombinasjoner

Trekk A	Rød	Rød	Blå	Blå
Trekk B	Rød	Blå	Rød	Blå

Dette er utfallsrommet når vi trekker to kuler.

Dette kan vi oppsummere det slik:
(RR) + (RB) + (BR) + (BB) = 1
Vi har brukt forkortelser for å spare plass. For eksempel betyr (RB) rød i trekk A og blå i trekk B.

Addisjonssetningen
Metode: Når minst 1 av kulene skal være røde vil dette oppnås dersom resultatet blir ett av de første tre utfallene. Dermed kan vi finne sannsynligheten til å trekke minst 1 rød kule ved å legge sammen sannsynligheten til hvert av de tre utfallene.

Dette kan skrives slik: *P*(minst 1 rød kule) = P(RR) + *P*(RB) + *P*(BR).
Svar:
Med tilbakelegging: $(\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5}) + (\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}) + (\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5}) = \frac{9}{25} + \frac{6}{25} + \frac{6}{25} = \frac{21}{25} = 0{,}84 = 84\ \%$
Uten tilbakelegging: $(\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}) + (\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}) + (\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{6}{20} = \frac{9}{10} = 0{,}9 = 90\ \%$

Spør læreren din om du ikke henger helt med på brøkregningen.

Komplimentsetningen
Metode: Når minst 1 av kulene skal være røde kan vi oppnå dette ved å unngå å trekke to blå kuler (altså ingen røde kuler). Vi vet at sannsynligheten for utfallsrommet er 1 (100 %), og dersom vi subtraherer (tar bort) sannsynligheten for at begge kulene er blå sitter vi igjen med sannsynligheten for å trekke minst 1 rød.

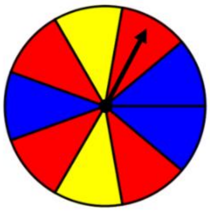
Dette kan skrives slik: *P*(minst 1 rød kule) = 1 – *P*(BB)
Svar:
Med tilbakelegging: $1 - (\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}) = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25} = 0{,}84 = 84\ \%$
Uten tilbakelegging: $1 - (\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}) = 1 - \frac{2}{20} = \frac{18}{20} = 0{,}9 = 90\ \%$

Spør læreren din om du ikke henger helt med på brøkregningen.

Oppgave 20
I en boks er det 6 grønne kuler og 3 hvite kuler. Du trekker to tilfeldige kuler samtidig. Hva er sannsynligheten for at minst 1 av kulene er hvit?

Løs oppgaven både ved hjelp av addisjonssetningen og komplimentsetningen. Hvilken metode likte du best?

Oppgave 21
I lykkehjulkonkurransen får du trøstepremie dersom du treffer minst 1 rød på tre forsøk.



Hva er sannsynligheten for at du får trøstepremien?

Oppgave 22
En studie av 1000 Oslo-elever hadde følgende resultater:

- 43 % tar t-banen til skolen
- 12 % tar både buss og t-bane til skolen
- $\frac{1}{4}$ tar buss, men ikke t-bane til skolen

a) Systematiser opplysningene i krysstabellen nedenfor.

Vi trekker tilfeldig tre personer fra undersøkelsen.

b) Hva er sannsynligheten for at minst en av disse tar buss til skolen?

Komprimerte valgtre

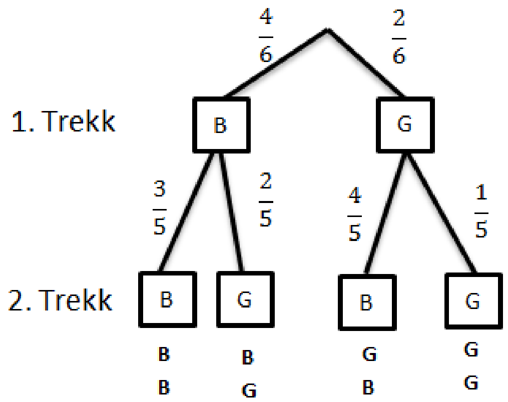
På side 164 skrev vi at et problem med å lage valgtre er at de fort kan vokse seg uhåndterbart store. I dette delkapittelet viser vi to løsninger på dette problemet.

Vektet valgtre

Dersom mange av valgene er like kan vi uttrykke dette ved en brøk istedenfor å tegne alle mulige utfall. Dette kalles et vektet valgtre.

Oppgave: Anta at vi har 4 blå kuler og 2 grønne kuler, og skal trekke to tilfeldige kuler (uten tilbakelegging). Tegn et valgtre som viser alle mulige utfall.

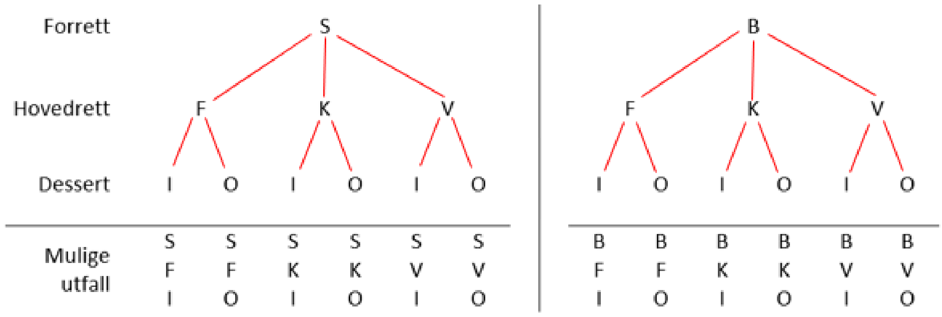
Metode: Vi *kunne* ha tegnet et valgtre med 6 forgreninger, men det ville tatt for stor plass. Vi tegner istedenfor en forgrening til hver av fargene, og vekter dem med en brøk som viser sannsynligheten for å trekke kulene:



Deretter bruker vi produktsetningen, addisjonssetningen eller komplimentsetningen til å løse oppgaver, som vist i delkapittel 3.

Tegne til vi ser et mønster

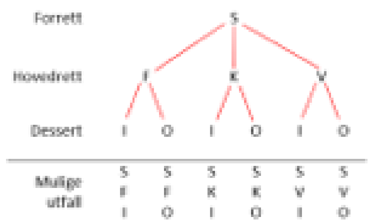
Når vi tegner et valgtre vil vi etter hvert kunne se for oss hvordan resten av valgtreet vil bli. I delkapittel **2.3** lagde vi dette valgtreet for en restaurant som tilbyr en meny bestående av forrett, hovedrett og dessert:



Fordi restauranten tilbyr 2 ulike forretter (suppe og brød) blir dette et valgtre med to forgreninger. Undersøker vi mulige utfall på de to forgreningene ser vi at det kun er øverste linje som er ulik. Det betyr at vi egentlig kunne stoppet å tegne etter den første forgreningen; alt etter valg av forrett er jo likt for begge forgreningene.

Oppgave: Anta at restauranten utvider antall forretter med avocadosalat og carpaccio. Lag en oversikt som viser alle mulige utfall av en meny bestående av forrett, hovedrett og dessert.

Metode: vi lager først et valgtre med suppe som forrett:
Deretter kan vi tenke oss til at de andre forgreiningenene vil ha ulik forrett, mens resten av menyen vil være lik. Vi erstatter derfor forretten, og får dette utfallsrommet:



Mulige utfall	S	S	S	S	S	S	B	B	B	B	B	B	A	A	A	A	A	A	C	C	C	C	C	C
	F	F	K	K	V	V	F	F	K	K	V	V	F	F	K	K	V	V	F	F	K	K	V	V
	I	O	I	O	I	O	I	O	I	O	I	O	I	O	I	O	I	O	I	O	I	O	I	O

Oppgave 23
Politiet kontrollerte sjåførers bruk av bilbelte.

Dette er resultatet:
Antall kontrollerte trafikanter: 1 500
Antall trafikanter som brukte bilbelte: 1 200
Antall trafikanter som ikke brukte bilbelte: 300

Bruk tallene ovenfor til å besvare spørsmålene nedenfor.
For å løse oppgave b – d kan du forsøke å lage et vektet valgtre for å visualisere alle mulige utfall.

a) Finn *P*(bilbelte) og *P*(ikke bilbelte).

Politiet kontrollerte to sjåfører.

b) Hva er sannsynligheten for at begge brukte bilbelte?
c) Hva er sannsynligheten for at kun 1 av sjåførene ikke brukte bilbelte?
d) Hva er sannsynligheten for at minst 1 av sjåførene ikke brukte bilbelte?

Fasit sannsynlighetsregning

Oppgave	Svar	Oppgave	Svar
1	b) P(jente) = 46 % c) P(gutt) = 54 %	**14**	a) P(to grønne) = 41,7 %
2	b) P(fargeblind) = 8 % c) P(ikke f.b.) = 92 %		b) P(ingen grønne) = 58,3 %
3	a) P(hjerter) = 25 % b) P(partall) = 50 %	**15**	a) P(3 gule) = 1 %
	c) P(sort) = 50 % d) P(spar ess) = 1,9 %		b) P(ingen gule) = 47 %
4	28 mulige kombinasjoner	**16**	b) P(både nett og papir) = 992/9900
5	a) 36 b) [2 , 12] c) [-5 , 5] d) L: 1 , h: 36		c) P(ingen nettaviser) = 380/9900
	Ja.		d) P(nett –> papir) = 992/6320
6	b) P(partall) = 50 % c) P([3-7>) = 39 %	**17**	P(nøyaktig 1 hvit) = 4/9
	d) P(1) = 0 f) P(7)	**18**	P(nøyaktig 1 blå) = 44,4 %
7	b) P(j-g-g) = 1/8 c) P(2j + 1g) = 3/8	**19**	P(kun en har sommerjobb) = 30,3 %
11	b) P(svart) = 60 %	**20**	P(minst 1 hvit) = 58,3 %
	c) P(blå –> ikke passer) = 25 %	**21**	P(trøstepremie) = 82,9 %
12	b) P(ikke kaffe) = 60 %	**22**	P(minst 1 tar buss) = 82,5 %
	c) P(kaffe –> jente) = 50 %	**23**	a) P(bilbelte) = 4/5
13	a) P(USA men ikke Spania) = 20 %		P(ikke bilbelte) = 1/5
	b) P(ingen av landene) = 25 %		b) P(begge brukte bilbelte) = 64 %
	c) P(minst ett land) = 75 %		c) P(kun 1 ikke belte) = 32 %
	d) P(Spania –> USA) = 4/11		d) P(minst 1 ikke belte) = 36 %

Tabeller

Oppgave 1

Utfall	Antall
Jente	300
Gutt	350
Totalt	600

Oppgave 2

Utfall	Antall
Fargeblind	437
Ikke f.b.	5 023
Totalt	5 460

Oppgave 8

7	4	11
3	6	9
10	10	20

8	5	13
6	2	8
14	7	21

Oppgave 9

6	8	14
7	13	20
13	21	34

3	9	12
9	6	15
12	15	27

Oppgave 11

	Blå bukser	Svarte bukser	Sum
Passer	3	3	6
Passer ikke	1	3	4
Sum	4	6	10

Oppgave 12

	Jenter	Gutter	Sum
Kaffe	5	5	10
Ikke kaffe	10	5	15
Sum	15	10	25

Oppgave 13

	USA	Ikke USA	SUM
Spania	4	7	11
Ikke Spania	4	5	9
SUM	8	12	20

Oppgave 15

	Nett	Ikke nett	Sum
Papir	32	18	50
Ikke papir	48	2	50
Sum	80	20	100

Oppgave 19

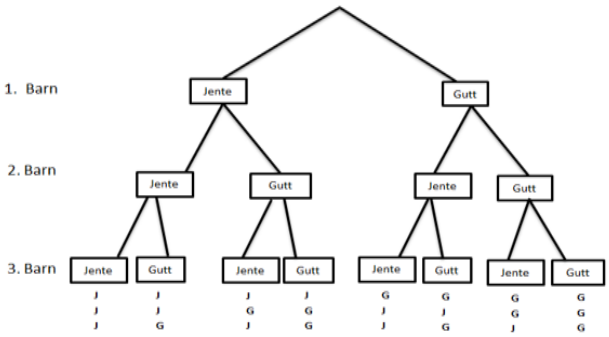
	Sommer-jobb	Ikke sommerjobb	Sum
Ferie	10	2	12
Ikke ferie	6	2	8
Sum	16	4	20

Oppgave 22

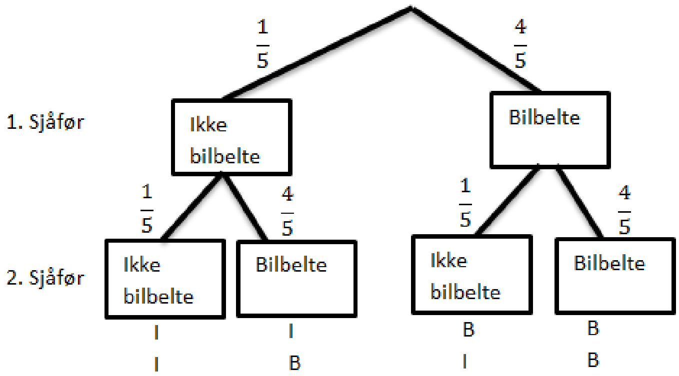
	T-bane	Ikke t-bane	Sum
Buss	120	320	440
Ikke buss	310	250	560
Sum	430	570	1 000

Valgtre

Oppgave 7



Oppgave 23



Algebra og potensregning

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad 3^4 \cdot 3^2 = 3^{4+2} = 3^6$$

$$\frac{a^m}{a^n} a^{m-n} \qquad \frac{5^3}{5^2} = 5^{3-2} = 5^1 = 5$$

$$a^0 = 1 \qquad 5^0 = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad 3^{-2} = \frac{1}{3^2};\ 4^2 = \frac{1}{4^{-2}}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \qquad (2 \cdot 3)^3 = 2^3 \cdot 3^3$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \qquad (3^2)^3 = 3^{2 \cdot 3} = 3^6$$

Målet for opplæringen er at eleven skal kunne:

- identifisere variable størrelser i ulike situasjoner og bruke dem til utforsking og generalisering

Hva er en potens i matematikken?

Ofte har vi bruk for å multiplisere et tall med seg selv to eller flere ganger. Da bruker vi en kortere skrivemåte slik som eksemplene under viser.

Eksempel 1

$$3 \cdot 3 = 3^2$$
$$x \cdot x = x^2$$
$$4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$$

De tre høyresidene er eksempler på *potenser*. I potensen 3^2 kalles 3 for *grunntallet* og 2 for *eksponenten.* Eksponenten skal stå oppe til høyre for grunntallet og skal skrives med mindre skrift enn grunntallet. Det skal være lett å se forskjell på 3^2 og 32!

Advarsel: Du må ikke blande sammen 3^2, som betyr $3 \cdot 3$ og er lik 9, med $3 \cdot 2$, som er lik 6!

Oppgave 1
Regn ut potensene uten kalkulator:

4^2, 2^3, 5^2, $(-3)^2$, 5^1

Oppgave 2

Finn ut hvilken tast du må bruke på kalkulatoren og regn ut:

$2{,}5^2$, 12^3

Multiplisere potenser med samme grunntall

Hvordan kan du regne ut et produkt av to potenser med samme grunntall, f.eks. $3^2 \cdot 3^4$?
Dette er egentlig lett. Vi har et produkt med 2 tretall og et produkt med 4 tretall. Når disse to produktene multipliseres, må det bli 2 + 4 = 6 tretall, slik:

$$3^2 \cdot 3^4 = 3 \cdot 3 \cdot \; 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6$$

Vi multipliserer to potenser med samme grunntall ved å *legge sammen* eksponentene.

Eksempel 2

$$4^3 \cdot 4^5 = 4^{3+5} = 4^8$$
$$5 \cdot 5^4 = 5^{1+4} = 5^5$$
$$3^2 \cdot 3^4 \cdot 3^5 = 3^{2+4+5} = 3^{11}$$
$$x^3 \cdot x^2 = x^5$$

Oppgave 3

Multipliser potensene og skriv svaret som en ny potens.
a) $6^2 \cdot 6^3$ b) $2^6 \cdot 2^4$ c) $10 \cdot 10^3$ d) $a^4 \cdot a^2$

Dividere potenser med samme grunntall

Divisjon av to potenser skriver vi nesten alltid med brøkstrek. Da kan vi bruke kunnskap om brøkforkorting for å utføre divisjonen.

Eksempel 3

$$\frac{4^5}{4^2} = \frac{4\cdot 4\cdot 4\cdot \cancel{4\cdot 4}}{\cancel{4\cdot 4}} = \frac{4\cdot 4\cdot 4}{1\cdot 1} = 4\cdot 4\cdot 4 = 4^3$$

Vi forkortet altså bort 2 firetall slik at det ble igjen 5 – 2 = 3 firetall.

Når vi dividerer to potenser med samme grunntall trekker vi eksponenten i nevner fra eksponenten i teller.

Eksempel 4

$$\frac{10^6}{10^3} = 10^{6-3} = 10^3$$

$$\frac{5^7}{5} = 5^{7-1} = 5^6$$

$$\frac{x^5}{x^2} = x^{5-2} = x^3$$

Oppgave 4

Divider potensene og skriv svaret som en ny potens.

a) $\frac{8^5}{8^3}$ b) $\frac{6^5}{6}$ c) $\frac{5^4}{5^3}$ d) $\frac{z^8}{z^5}$

Vi må ofte bruke begge disse reglene i samme oppgave:

Eksempel 5

$$\frac{4^2\cdot 4^6}{4^3} = \frac{4^8}{4^3} = 4^5$$

$$\frac{10^7}{10^2\cdot 10^4} = \frac{10^7}{10^6} = 10^1 = 10$$

Oppgave 5

Skriv disse uttrykkene som *en* potens.

a) $\frac{2^8\cdot 2^3}{2^4}$ b) $\frac{3^6}{3^4\cdot 3}$ c) $\frac{a^3\cdot a^4}{a^2}$

Regne ut potens hvor grunntallet er en potens

$\left(10^2\right)^3$ er et eksempel på en potens hvor grunntallet også er en potens. Hvis vi tenker over hva $\left(10^2\right)^3$ egentlig betyr, ser vi at

$$\left(10^2\right)^3 = 10^2 \cdot 10^2 \cdot 10^2 = 10^{2+2+2} = 10^{3\cdot 2} = 10^6$$

Her må vi altså *multiplisere* de to eksponentene.

En potens av en potens regner vi ut ved å *multiplisere* eksponentene.

Du må ikke blande sammen $10^2 \cdot 10^3 = 10^5$ og $\left(10^2\right)^3 = 10^6$!

Oppgave 6

Gjør disse potensene enklere:

a) $\left(6^3\right)^4$ b) $\left(8^5\right)^2$ c) $\left(x^3\right)^2$ d) $\left(a^2\right)^4$

Nå forenkler vi to uttrykk hvor vi må bruke alle reglene for potensregning vi har lært hittil:

Eksempel 6

$$\left(3^4\right)^2 \cdot 3^3 = 3^8 \cdot 3^3 = 3^{11}$$

$$\frac{\left(2^3\right)^4 \cdot 2^2}{2^5} = \frac{2^{12} \cdot 2^2}{2^5} = \frac{2^{14}}{2^5} = 2^9$$

Oppgave 7

Gjør disse uttrykkene så enkle som mulig.

a) $\left(4^2\right)^3 \cdot 4$ b) $\dfrac{\left(5^2\right)^3}{5^2}$ c) $\dfrac{\left(a^2\right)^3 \cdot a^2}{a^5}$

Potenser hvor eksponenten er null eller negativ

I brøken $\frac{5^4}{5^4}$ er telleren og nevneren like store slik at denne brøken må være lik 1. Men hva får vi ved å bruke regelen for divisjon av potenser? Jo:

$$\frac{5^4}{5^4} = 5^{4-4} = 5^0$$

5 ganget med seg selv null ganger kan ikke ha noen direkte mening, men hvis vi er så smarte at vi lar 5^0 *bety* 1, kan vi bruke potensregelen også på denne brøken.

Viktig: Alle tall opphøyd i null er lik 1!

a^0 = 1 for alle tall *a*.

Advarsel: Du må heretter aldri tro at 2^0 er lik 0!! 2^0 = 1! Derimot er $2 \cdot 0$ lik 0.

Oppgave 8

Hvor mye er a) 10^0 b) 6^0 c) $(-1)^0$?

Hva får vi hvis vi bruker divisjonsregelen på brøken $\frac{5^4}{5^6}$? Jo:

$$\frac{5^4}{5^6} = 5^{4-6} = 5^{-2}$$ (du er vel klar over at 4 - 6 = -2 og ikke 2?)

Men dette svaret er heller ikke meningsløst. I brøken $\frac{5^4}{5^6}$ kan vi forkorte bort 4 femtall, og sitter da igjen med 2 femtall i nevner. Det betyr at

$$\frac{5^4}{5^6} = \frac{\cancel{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}}{\cancel{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1}{5 \cdot 5} = \frac{1}{5^2}$$

Da gjør vi det geniale og sier at 5^{-2} skal *bety* $\frac{1}{5^2}$. På samme måte har vi også:

Eksempel 7

$$4^{-3} = \frac{1}{4^3}$$

$$2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$10^{-4} = \frac{1}{10^4}$$

$$a^{-5} = \frac{1}{a^5}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

a^{-n} betyr $\frac{1}{a^n}$ for alle verdier av *a* (unntatt 0) og *n*.

Advarsel: Du må heretter aldri tro at 10^{-2} = -20 eller at 2^{-3} = -6 eller -8!!

Av og til kan det være nyttig å merke seg at en potens med *negativ* eksponent *under* en brøkstrek, er lik en potens med *positiv* eksponent *over* brøkstreken. Da blir noen uttrykk enklere å regne ut.

Eksempel 8

$$\frac{1}{4^{-2}} = 4^2$$

$$\frac{3^4}{5^{-1}} = 3^4 \cdot 5$$

$$\frac{2^5}{4 \cdot 3^{-2}} = \frac{2^5 \cdot 3^2}{4}$$

$$\left(\frac{1}{2^{-4}}\right)^2 = \left(2^4\right)^2 = 2^{4\cdot 2} = 2^8$$

(I de to første eksemplene skriver vi ikke brøkstreken fordi vi får 1 i nevneren.)

Oppgave 9

Skriv om brøkene slik at det ikke blir noen potenser med negativ eksponent.

a) $\frac{1}{10^{-2}}$ b) $\frac{2^6}{5^{-3}}$ c) $\frac{5 \cdot 2^4}{6 \cdot 3^{-4}}$ d) $\left(\frac{1}{4^{-3}}\right)^5$

Heldigvis virker alle potensreglene like bra også for eksponenter som er null og negative:

Eksempel 9

$$2^4 \cdot 2^3 \cdot 2^0 = 2^{4+3+0} = 2^7$$
$$4^6 \cdot 4^{-2} = 4^{6+(-2)} = 4^{6-2} = 4^4$$
$$\frac{6^3}{6^{-2}} = 6^{3-(-2)} = 6^{3+2} = 6^5$$
$$\left(10^{-2}\right)^3 = 10^{-2\cdot 3} = 10^{-6}$$
$$\left(x^3\right)^{-4} = x^{3\cdot(-4)} = x^{-12}$$

Oppgave 10

Skriv disse uttrykkene som *en* potens.

a) $\frac{3^6}{3^0}$ b) $5^{-1} \cdot 5^4$ c) $\frac{10^{-4}}{10^3}$ d) $\frac{10^4}{10^{-3}}$ e) $(2^{-4})^3$

Potensuttrykk med flere grunntall

I noen eksamensoppgaver forekommer det potenser med to eller tre ulike grunntall. Da er det to muligheter:

1. Ingen av grunntallene kan skrives som en potens av et av de andre grunntallene

Da bruker vi potensreglene på hver av potensene som har ulike grunntall.

Eksempel 10

$$3 \cdot 2^3 \cdot 3^{-4} \cdot 2^2 = 2^{3+2} \cdot 3^{1+(-4)} = 2^5 \cdot 3^{-3}$$
$$\frac{4^2 \cdot 5^3}{4^{-1} \cdot 5^4} = 4^{2-(-1)} \cdot 5^{3-4} = 4^3 \cdot 5^{-1}$$

Oppgave 11

Gjør disse uttrykkene så enkle som mulige:

a) $5 \cdot 4^6 \cdot 5^{-3} \cdot 4^2$ b) $\frac{6^3 \cdot 10^{-2}}{6^{-1} \cdot 10^3}$

2. Ett eller flere av grunntallene kan skrives som en potens av et annet grunntall

<u>Eksempel 11</u>
Det ser ved første øyekast ikke ut som om uttrykket $4 \cdot 2^3$ kan skrives som én potens.
Men fordi $4 = 2^2$ går det likevel:

$$4 \cdot 2^3 = 2^2 \cdot 2^3 = 2^5$$

Det kan være nyttig å se at $4 = 2^2$, $8 = 2^3$, $16 = 2^4$, $9 = 3^2$ og $27 = 3^3$.

Oppgave 12

Gjør disse uttrykkene så enkle som mulige.
a) $2^4 \cdot 4$ b) $8 \cdot 2^{-2}$ c) $\frac{4}{2^{-3}}$ d) $9 \cdot 3^2$ e) $4^2 \cdot 2^3$

Slike omskrivinger får du bruk for i noen av eksamensoppgavene i potensregning.

Potens hvor grunntallet er et produkt eller en brøk

<u>Eksempel 12</u>
I potensen $(2x)^3$ er grunntallet et produkt av faktorene 2 og x. Dette kan vi skrive uten parenteser slik:

$$(2x)^3 = 2x \cdot 2x \cdot 2x = 2 \cdot x \cdot 2 \cdot x \cdot 2 \cdot x = 2^3 x^3$$

På lignende måte har vi at

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{2^3}{5^3}$$

Oppgave 13

Skriv disse uttrykkene uten parenteser. Du behøver ikke ta med mellomregninger slik som det er gjort i eksemplene ovenfor.

a) $(3a)^4$ b) $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ c) $\left(a^2 b^{-1}\right)^3$ d)  $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$

Fasit algebra og potensregning

Oppgave	Svar	Oppgave	Svar
1	16, 8, 25, 9, 5	**8**	a) 1 b) 1 c) 1
2	6,25 1728	**9**	a) 10^2 b) $2^6 \cdot 5^3$ c) $\frac{5 \cdot 2^4 \cdot 3^4}{6}$ d) 4^{15}
3	a) 6^5 b) 2^{10} c) 10^4 d) a^6	**10**	a) 3^6 b) 5^3 c) 10^{-7} d) 10^7 e) 2^{-12}
4	a) 8^2 b) 6^4 c) 5 d) z^3	**11**	a) $4 \cdot 5^{-2}$ b) $6^4 \cdot 10^{-5}$
5	a) 2^7 b) 3 c) a^5	**12**	a) 2^6 b) 2 c) 2^5 d) 3^4 e) 2^7
6	a) 6^{12} b) 8^{10} c) x^6 d) a^8	**13**	a) 3^4a^4 b) $\frac{3^2}{2^2}$ c) a^6b^{-3} d) 16
7	a) 4^7 b) 5^4 c) a^3		