Velkommen

Velkommen til Hellerud videregående skole, og gratulerer med valg av skole!

Læring består av to parter; en som ønsker å lære bort og en som ønsker å lære. Her på Hellerud vil du møte topp motiverte lærere som ønsker å hjelpe deg gjennom dette skoleåret slik at du kan få best mulig utbytte av undervisningen.

Imidlertid kan ingen av oss trylle. Skal vi kunne hjelpe deg til å oppnå best mulig resultat er det fire krav du må oppfylle. Du må:

- Møte til undervisning
- Møte presist
- Møte interessert
- Møte forberedt

Ønsker du å beholde karakteren din fra ungdomsskolen må du være forberedt på å jobbe hardt og seriøst med faget, men om du oppfyller dine krav er vi helt sikre på at vi sammen greier å nå målet ditt.

Forord til 10. utgave:

I denne boken vil du finne presentasjonsoppgaver, hvor du skal presentere dine løsninger enten skriftlig eller muntlig. Presentasjonene vil være en del av vurderingsgrunnlaget faglæreren din vil bruke når hun eller han skal sette standpunktkarakter.

Presentasjonsoppgavene gir deg anledning til å

- Være kreativ
- Vise hva du har lært
- Velge dine egne løsninger
- Argumentere for dine valg og løsninger

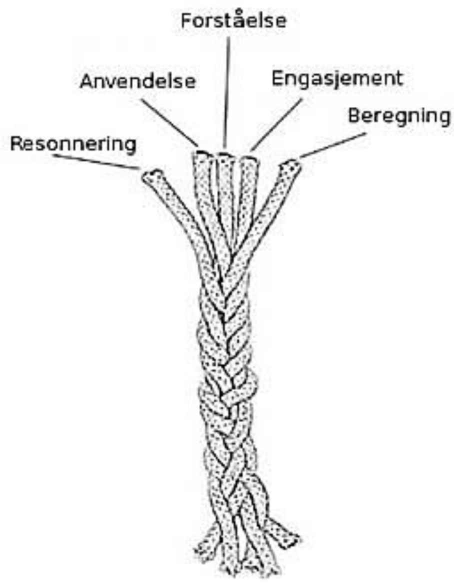
Husk at dine tanker og meninger er like viktige som alle andres!

Matematikkseksjonen ved Hellerud videregående skole
Juli 2022

Forsiden er laget av Zainab Naqvi, elev ved Hellerud vgs. Baksiden er laget av lærer Christian Gruehagen.

Trådmodellen – hva vil det si å være god i matematikk?

1. **Forståelse:** Forstå matematiske begreper, representasjoner, operasjoner og relasjoner



2. **Beregning:** Utføre prosedyrer som involverer tall, størrelser og figurer, effektivt, nøyaktig og fleksibelt

3. **Anvendelse:** Formulere problemer matematisk og utvikle strategier for å løse problemer ved å bruke passende begreper og prosedyrer

Figur 1: Å være god i matematikk består av fem sammenflettede tråder (oversatt utgave, hentet fra Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001, s. 117)

4. **Resonnering:** Forklare og begrunne en løsning til et problem, eller utvide fra noe kjent til noe som ikke er kjent

5. **Engasjement:** Være motivert for å lære matematikk, se på matematikk som nyttig og verdifullt, og tro at innsats bidrar til økt læring i matematikk

(Kilde: http://www.matematikksenteret.no/content/4526/Hva-betyr-det-a-vare-god-i-matematikk)

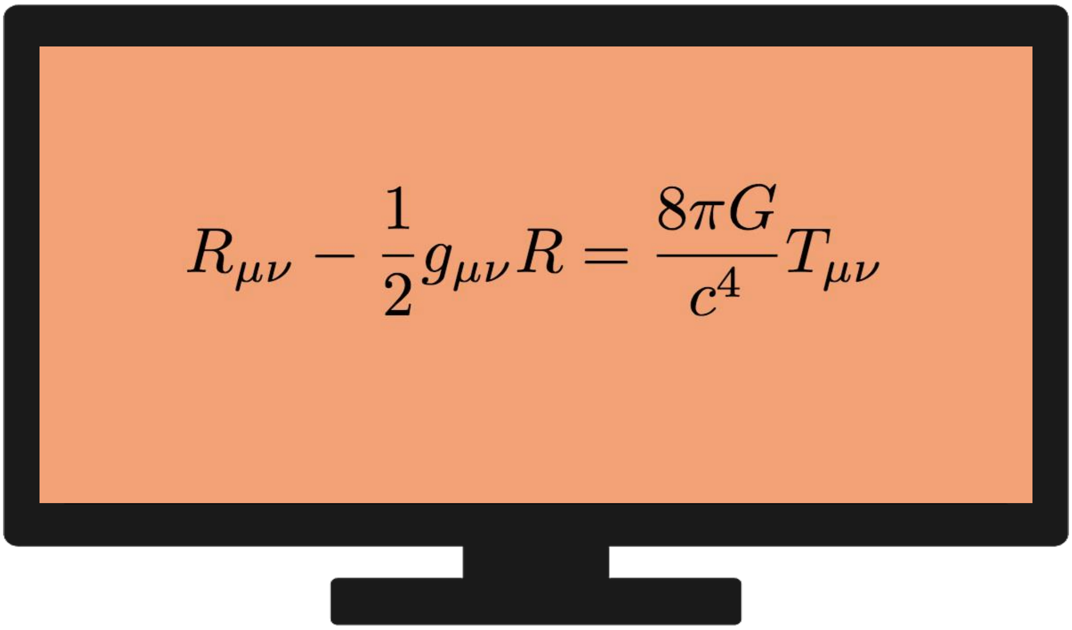
Jo Boalers 7 bud

1. **Alle kan lære matematikk på høyeste nivå**
   - Det er ikke slik at noen er født med en «mattehjerne» - det handler om at alle kan lære hvis de vil gjøre jobben.
2. **Å gjøre feil er verdifull**
   - Feil gjør at hjernen din vokser. Det er bra å streve og gjøre feil.
3. **Å stille spørsmål er viktig**
   - Spør om det er noe du lurer på, og svar på andre sine spørsmål. Spør deg selv: er dette riktig?
4. **Matematikk handler om å være kreativ, og skal gi mening**
   - Finn mønstre og sammenhenger, og diskuter disse med andre.
5. **Matematikk er å se sammenhenger og å diskutere**
   - I matematikk kan det samme sies på ulike måter, for eksempel ord, bide, graf og funksjon. Finn sammenhengen mellom dem, og diskuter hvilken som passer best i de ulike situasjonene!
6. **Matematikk handler om å lære, ikke prestere**
   - Det tar tid å lære matematikk, og det handler om innsats.
7. **Det er viktigere å tenke grundig enn fort**
   - Det handler om å forstå noe godt, og det er ikke viktig å være rask

(fritt oversatt fra Jo Boalers «Positive Norms to Encourage in Math Class»)

Innhold

Formler og digitale ferdigheter



Målet for opplæringen er at eleven skal kunne:

- identifisere variable størrelser i ulike situasjoner, og bruke dem til utforsking og generalisering
- tolke og bruke formler som gjelder samfunnsliv og arbeidsliv
- bruke digitale verktøy i utforsking og problemløsning knyttet til egenskaper ved funksjoner, og diskutere løsningene

Programmering

Gjennom de neste sidene blir du introdusert for grunnleggende programmering, og det du trenger for å lykkes med programmering i 1P.

Senere i skoleåret skal du bruke programmering til å løse faglige utfordringer.

Hva er programmering?
Programmering handler om å gi PC-en informasjon, og deretter instruksjoner om hva som skal gjøres med informasjonen.

Hvordan programmere?
Det finnes forskjellige programmer som kan brukes. Vi skal bruke en enkel nettversjon av Python, som du finner ved å skrive:

trinket.io/python3

Denne nettversjonen lar deg ikke lagre programmene du har laget. Dersom du ønsker å ta vare på noe du har laget, må du kopiere koden du har skrevet inn i et word-dokument.

Oppgave 1

Opprett en mappe som heter "1P". Dersom du bytter fag til 1T kan du endre navnet på mappen ved en senere anledning.

Åpne mappen, og opprett en ny mappe som heter "Digitale ferdigheter".

Opprett et dokument som heter "Programmering". Lagre dette dokumentet i mappen "Digitale ferdigheter".

Her kan du lagre alle programkodene du ønsker å ta vare på.

Hvorfor programmere?
Gjennom å programmere blir du trent i å tenke grundig gjennom alle prosesser som må gjøres for å løse en oppgave. Du må finne nødvendig informasjon skal brukes, vurdere hvilke regneoperasjoner som skal utføres, og hvilket svar som skal presenteres. Dette gjør at du får en bedre forståelse av matematikken du skal lære.

Sentrale begreper
Kode: et sett med informasjon som PC-en kan forstå og instruksjoner som PC-en kan utføre

Verdi: tall eller "bokstaver". Bokstaver må skrives innenfor tegnene "".

Variabel: brukes for at PC-en skal huske verdier

Instruksjoner: oppgaver du kan gi til PC-en

Litt mer om variabler
Du kan tenke på variabler som en boks hvor du kan legge informasjon til PC-en. En variabel skrives slik:

variabelnavn= en verdi (tall eller "bokstaver"), et regnestykke eller en annen variabel

Viktig å skjønne: målet med et program er ofte å forandre på de opprinnelige verdiene, slik at resultatet er annerledes i starten.

Viktig å vite: det finnes regler for variabelnavn som må følges.

8. Ingen spesialtegn, som ,.-§!+ eller lignende
9. Ingen tall i starten av variabelnavnet
10. Ingen ord som blir brukt av Python. Disse ordene blir farget når du skriver dem i trinket. Eksempler:
    i. print, if, else, for, while, min, max

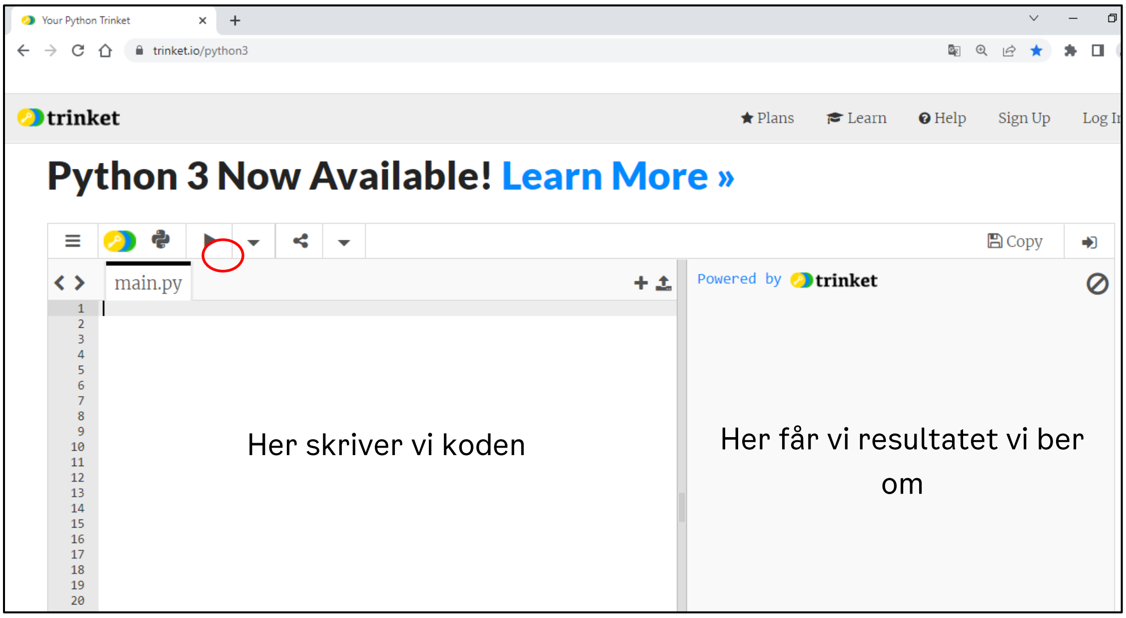
Nedenfor ser du eksempler på noen variabler med verdier.

```
klasse="1STF"
jenter=16
gutter=14
heleklassen=jenter+gutter

```

Oppgave 2
a) Hvilke variabler har vi laget i eksempelet?
b) Hva er verdien til variablene vi har laget i eksempelet?

Kjøre programmet

Trinket.io/python3 ser slik ut:



Når du har skrevet inn koden kan du kjøre programmet ved å trykke på run-knappen, som vi har markert med en rød sirkel i bildet ovenfor.

Ved å trykke på run-knappen vil Python lese all informasjon du har skrevet og gjennomføre alle instruksjoner du har gitt, dersom du har skrevet dette riktig. Hvis ikke får du en feilmelding.

Oppgave 3

a) Skriv programmet nedenfor inn i trinketen.

main.py

```
klasse=
jenter=
gutter=
tilsammen=jenter+gutter

```

b) Skriv inn verdiene som passer til klassen din, og kjør programmet. Har du skrevet alt riktig, eller får du en feilmelding?

Oppgave 4

a) Skriv inn programmet nedenfor inn i trinketen.

```
navn=
alder=
bosted=
ungdomsskole=
antallsøsken=
favorittmat=

```

b) Skriv inn verdier som passer til deg, og kjør programmet. Har du skrevet alt riktig, eller får du en feilmelding?

Oppgave 5

a) Skriv programmet nedenfor inn i trinketen.

```
tallA=5
tallB=2

sum=tallA+tallB
differanse=tallA-tallB
produkt=tallA*tallB
forhold=tallA/tallB
potens=tallA**tallB
```

b) Kjør programmet. Har du skrevet alt riktig, eller får du en feilmelding?

Feilmelding

Dersom du har skrevet verdier eller instruksjoner på en måte som programmet ikke forstår, får du en feilmelding.

I en feilmelding gir programmet informasjon om i hvilken linje feilen er skrevet, og hva som er skrevet galt. Klarer du å se hva feilen er i programmet nedenfor?

main.py

```
1 klasse=1STF
2 jenter=16
3 gutter=14
4 tilsammen=jenter+gutter
```

Powered by trinket

```
  File "/tmp/sessions/2b6e141da340181c/main.py",
line 1
    klasse=1STF
            ^
SyntaxError: invalid syntax
```

Programmet gir beskjed om at feilen er i linje 1, og at noe er skrevet inn galt. Dersom du ser nøye på linje 1 oppdager du kanskje at verdien 1STF er skrevet uten "". Programmet skjønner derfor ikke at 1STF er en verdi.

Oppgave 6

I programmene nedenfor er det noe som er feil. Skriv programmet med riktig kode inn i trinketen, og kjør programmet.

a)

main.py

```
navn="Arnfinn"
alder=41
stilling=Rektor
hjemsted="Stord"
```

Powered by trinket

```
Traceback (most recent call last):
  File "/tmp/sessions/889920f740e5cba4/main.py",
line 3, in <module>
    stilling=Rektor
NameError: name 'Rektor' is not defined
```

b)

main.py

```
TallA=5
TallB=2

sum=tallA+TallB
```

Powered by trinket

```
Traceback (most recent call last):
  File "/tmp/sessions/43b5029316d3edda/main.py",
line 4, in <module>
    sum=tallA+TallB
NameError: name 'tallA' is not defined
```

Resultatet – print()

I programmet nedenfor har vi gitt instruksjon om å legge sammen antall jenter og antall gutter, men når vi kjører programmet får vi ikke vite hva svaret blir.

```python
klasse="1STF"
jenter=16
gutter=14
heleklassen=jenter+gutter

```

Dersom vi ønsker informasjon fra programmet, må vi bruke instruksjonen **print()**.

Inni parentesen skriver vi den informasjonen vi ønsker skrevet. De vanligste utskriftsønskene er:

print(variabelnavn**)**

print(variabelnavn +-*/ et annet variabelnavn**)**

print("tekst"**)**

Disse kan også kombineres:

print("Tekst"**,**variabelnavn**,**"tekst"**)**

Legg merke til at vi skiller hvert element med komma.

I programmet utenfor ønsker vi å vite hvor mange elever det er til sammen i klassen. Vi ber programmet skrive ut verdien til variabelen tilsammen, ved å skrive:

print(tilsammen**)**

main.py

```python
klasse="1STF"
jenter=16
gutter=14
tilsammen=jenter+gutter

print(tilsammen)
```

Powered by trinket

```
30
```

Når vi kjører programmet, kommer svaret i resultatfeltet.

Oppgave 7

Skriv programmet på forrige side i trinketen, og kjør programmet. Du kan gjerne endre verdiene slik at det passer med klassen din.

Oppgave 8

a) Skriv programmet nedenfor inn i trinketen, og kjør programmet.

```
tallA=5
tallB=2

sum=tallA+tallB
differanse=tallA-tallB
produkt=tallA*tallB
forhold=tallA/tallB
potens=tallA**tallB

print(sum)
print(differanse)
print(produkt)
print(forhold)
print(potens)
```

b) Velg andre verdier for tallA og tallB, og kjør programmet på nytt.

Oppgave 9

a) Skriv inn programmet nedenfor i trinketen, og skriv inn riktige verdier.

```
navn=
alder=
bosted=
ungdomsskole=
antallsøsken=
favorittmat=

```

b) Bruk print-funksjonen, og be programmet skrive ut verdien til alle variablene.

Svare med tekst

Dersom du ønsker forklarende tekst til svaret, kan du legge tekst inn i parentesen. Husk å bruke "". Tekst og variabler skilles med komma.

Eksempel:

main.py

```python
klasse="1STF"
jenter=16
gutter=14
tilsammen=jenter+gutter

print("I klasse",klasse,"er det tilsammen",tilsammen,"elever")
```

Powered by trinket

```
I klasse 1STF er det
tilsammen 30 elever
```

Oppgave 10

Skriv programmet i eksempelet ovenfor i trinketen, og kjør programmet. Du kan gjerne endre verdiene slik at det passer med klassen din.

Dersom du får en feilmelding, må du forsøke å rette opp i feilen før du spør læreren.

Oppgave 11

Skriv programmet nedenfor inn i trinketen. Legg til forklarende tekst til hver av utskriftene, for eksempel "Summen av tallen er:".

Dersom du får en feilmelding, må du forsøke å rette opp i feilen før du spør læreren.

```python
tallA=5
tallB=2

sum=tallA+tallB
differanse=tallA-tallB
produkt=tallA*tallB
forhold=tallA/tallB
potens=tallA**tallB

print(sum)
print(differanse)
print(produkt)
print(forhold)
print(potens)
```

Gjøre en instruksjon flere ganger - løkker

Dersom vi ønsker at programmet skal utføre en instruks flere ganger, kan vi løse dette ved å bruke løkker.

Det er to typer løkker du skal lære; **for-løkke** og **while-løkke**.

For-løkke

Vi bruker en for-løkke når vi ønsker å fortelle programmet hvor mange ganger en instruksjon skal utføres.

For å lage en for-løkke, trenger programmet:

11. Variabel eller variabler med startverdi
12. Instruksjon om hva som skal gjøres med variabelen eller variablene
13. Opplysning om hvor mange ganger instruksjonen skal utføres
14. En tellevariabel hvor programmet holder orden på hvor mange ganger instruksjonen er utført

I tillegg må vi fortelle programmet hva vi ønsker å få skrevet ut.

Eksempel:

Programmet nedenfor skriver ut sifrene 0 til 4.

main.py

```python
1 tall=0
2
3 for utskrift in range (5):
4   print(tall)
5   tall=tall+1
6
```

Powered by trinket

```
0
1
2
3
4
```

Variabelen "tall" er gitt startverdien 0.

I linje 3, der for-løkka begynner, har vi laget en tellevariabel som heter "utskrift". Det er helt valgfritt hva denne variabelen heter, og den gis ofte variabelnavnet "i". I slutten av linje 3 gis programmet beskjed om å utføre instruksjonene 5 ganger. Vi sier gjerne at løkka kjøres 5 ganger.

Inni løkka ber vi først programmet skrive ut verdien til variabelen "tall". Deretter ber vi programmet øke verdien til variabelen med 1.

Oppgave 12

Programmet nedenfor likner på programmet i eksempelet på forrige side. Likevel blir utskriften annerledes når vi kjører programmet.

main.py

```python
tall=0

for utskrift in range (5):
  tall=tall+1
  print(tall)

```

Powered by trinket

```
1
2
3
4
5
```

Hva er forskjellen på koden i dette programmet og koden i eksempelet?

Oppgave 13

Programmet nedenfor likner på programmet i eksempelet på forrige side. Likevel blir utskriften annerledes når vi kjører programmet.

main.py

```python
tall=0

for utskrift in range (5):
  tall=tall+1
print(tall)
```

Powered by trinket

```
5
```

Hva er forskjellen på koden i dette programmet og koden i eksempelet?

Oppgave 14

a) Skriv programmet i eksempelet på forrige side inn i trinketen, og kjør programmet. Dersom du får en feilmelding, må du forsøke å finne feilen før du spør læreren.
b) Gjør en forandring i koden, slik at programmet skriver ut sifrene fra 0 til 9.
c) Gjør en forandring i koden, slik at programmet skriver ut kun partall.

Oppgave 15

Programmet nedenfor skriver ut årstallene fra 2023 til 2032.

main.py

```
årstall=2022

for i in range(10):
  årstall=årstall+1
  print(årstall)
```

a) Skriv programmet ovenfor inn i trinketen, og kjør programmet. Dersom du får en feilmelding, må du forsøke å finne feilen før du spør læreren din.
b) Gjør en endring i koden slik at programmet skriver ut årstallene frem til 2040.
c) Gjør en endring i koden slik at programmet skriver ut kun oddetallsårene.

Oppgave 16

Programmet nedenfor skriver ut de 10 første svarene i gangetabellen til 1-gangen.

main.py

```
svar=0

for gangetabell in range(10):
  svar=svar+1
  print (svar)
```

a) Skriv programmet ovenfor inn i trinketen, og kjør programmet. Dersom du får en feilmelding, må du forsøke å finne feilen før du spør læreren din.
b) Gjør en endring i koden slik at programmet skriver ut svarene i en annen gangetabell, for eksempel 2-gangen eller 5-gangen.
c) Gjør en endring i koden slik at programmet skriver ut de 20 første svarene i en av gangetabellene.

Oppgave 17

Høsten 2015 begynte 550 elever på Hellerud vgs. I årene etter dette har elevtallet økt med 25 elever per år. Programmet nedenfor beregner og skriver ut elevtallet for hvert av årene fra 2016 til 2022.

```
elevtall=550
årstall=2015


for år in range(7):
  elevtall=elevtall+25
  årstall=årstall+1
  print(årstall,":",elevtall,"elever")

```

a) Skriv programmet ovenfor inn i trinketen, og kjør programmet. Dersom du får en feilmelding, må du forsøke å finne feilen før du spør læreren din.
b) Anta at elevtallet har økt med 30 elever per år. Gjør en endring i koden, slik at programmet skriver ut nytt elevtall fra 2016 til 2022.
c) Gjør en endring i koden slik at programmet skriver ut elevtallet hvert år frem til 2025.
d) Gjør en endring i koden slik at programmet skriver ut elevtallet for kun 2025.

Oppgave 18

I et boblebad varmes vannet med 1,5 °C i timen, frem til maksimal temperatur på 40 °C. Programmet nedenfor skal vise temperaturen for hver time frem til vannet blir 40 °C, men det mangler noe i koden.

main.py

```
1 grader=10
2 timer=0
3
4 for i in range():
5   grader=grader+
6   timer=timer+
7   print("Timer:",timer,"grader:",grader)
8
```

Skriv koden ovenfor inn i trinketen, og fyll inn tallene som mangler i linje 4, 5 og 6. Programmet skal skrive ut temperaturen for hver time frem til vannet blir 40 °C.

While-løkke

Vi bruker en while-løkke når vi ønsker å fortelle programmet hvor lenge en instruksjon skal utføres.

For å lage en while-løkke, trenger programmet:

1. Variabel eller variabler med startverdi
2. Instruksjon om hva som skal gjøres med variabelen eller variablene
3. Opplysning om når programmet skal slutte å utføre instruksen

I tillegg må vi fortelle programmet hva vi ønsker å få skrevet ut.

Eksempel:

Programmet nedenfor skriver ut sifrene 0 – 4.

main.py

```
1 tall=0
2
3 while tall<5:
4   print(tall)
5   tall=tall+1
6
```

Variabelen "tall" er gitt startverdien 0.

I linje 3, der while-løkka begynner, har vi gitt programmet beskjed om at så lenge (while) tallet er mindre enn 5, skal programmet utføre instruksjonene som er skrevet inni while-løkka. Vi sier gjerne at løkka skal kjøres så lenge tallet er mindre enn 5.

Inni løkka ber vi først programmet skrive ut verdien til variabelen "tall". Deretter ber vi programmet øke verdien til variabelen med 1.

Oppgave 19

Programmet nedenfor likner på programmet i eksempelet på forrige side. Likevel blir utskriften annerledes når vi kjører programmet.

main.py

```
tall=0

while tall<=5:
  print(tall)
  tall=tall+1
```

Powered by trinket

```
0
1
2
3
4
5
```

Hva er forskjellen på koden i dette programmet og koden i eksempelet?

Oppgave 20

a) Skriv programmet i eksempelet på forrige side inn i trinketen, og kjør programmet. Dersom du får en feilmelding, må du forsøke å finne feilen før du spør læreren.
b) Gjør en forandring i koden, slik at programmet skriver ut sifrene fra 0 til 9.

Oppgave 21

Programmet nedenfor teller hvor mange år det er til 2030.

main.py

```
årstall=2022
år=0

while årstall<2030:
  år=år+1
  årstall=årstall+1

print("Det er",år,"til 2030")
```

a) Skriv programmet ovenfor inn i trinketen, og kjør programmet. Dersom du får en feilmelding, må du forsøke å finne feilen før du spør læreren din.
b) Gjør en endring i koden slik at programmet teller antall år frem til 2050.

Oppgave 22

Kaia har kjøpt en moped. Hun antar at mopedens verdi synker med 1 200 kr per år. Når mopedens verdi synker under 10 000 kr, vil Kaia selge mopeden.

Programmet nedenfor beregner hvor mange år det tar før mopedens verdi blir lavere enn 10 000 kr.

```
verdi=14000
år=0

while verdi>10000:
  verdi=verdi-1200
  år=år+1

print(år)
```

a) Skriv programmet ovenfor inn i trinketen, og kjør programmet. Dersom du får en feilmelding, må du forsøke å finne feilen før du spør læreren din.
b) Legg til forklarende tekst i utskriften.
c) Gjør en endring i koden slik at programmet beregner hvor mange år det tar før mopedens verdi blir lavere enn 8 000 kr.
d) Gjør en endring i koden slik at mopedens verdi synker med 1 500 kr per år.

Oppgave 23

I et boblebad varmes vannet med 1,5 °C i timen, frem til maksimal temperatur på 40 °C. Programmet nedenfor skal beregne hvor mange timer det tar før vannets temperatur blir 40 °C, men det mangler noe i koden.

```
1 grader=4
2 timer=0
3
4 while grader 40:
5   grader=grader+
6   timer=timer+
7
8 print("Det tar",timer," timer før vannet blir 40 grader")
9
```

Skriv koden ovenfor inn i trinketen, og fyll inn tallene som mangler i linje 4, 5 og 6. Programmet skal skrive ut hvor mange timer bassenget bruker på å varme opp vannet til 40 °C.

Formler

I både hverdagen og i arbeidslivet har vi behov for å beskrive hvordan to eller flere størrelser henger sammen.

Eksempler på dette kan være:

- Prisen for smågodt i en butikk er 135 kr per kg
- En trebarnsfamilie må betale for to voksenbilletter og tre barnebilletter dersom de skal delta på aktiviteter
- En butikkansatt skal ha 119 kroner per time hen jobber

For å beskrive sammenhenger matematisk bruker vi **formler**.

En **formel** er en **regnemetode** hvor vi ikke kjenner alle **verdiene**.

Når vi kjenner alle **verdiene** forandres en **formel** fra en **regnemetode** til et **regnestykke**.

Tenk deg at en familie som består av 2 voksne og 3 barn skal tilbringe en dag i Oslo, hvor de skal betale seg på ulike aktiviteter. Før vi vet hvor mye billettene til aktivitetene koster kan vi ikke regne ut hvor mye familien må betale.

Vi kan imidlertid lage en **regnemetode** eller en **formel** som kan brukes til å regne ut hvor mye det vil koste familien å delta på en aktivitet.

I dette tilfellet vil **formelen** bli slik:

$$Pris\ for\ en\ aktivitet = 2\ \cdot voksenbillett + 3\ \cdot barnebillett$$

Vi forkorter gjerne ordene med en bokstav, slik at det blir mindre å skrive. Det er viktig at vi informerer om hva bokstavene representerer:

$Pris\ for\ en\ aktivitet = P$

$Voksenbillett = v$

$Barnebillett = b$

Dermed kan vi skrive **formelen** på en enklere måte:

$$P = 2v + 3b$$

Lurer du på hvor det ble av multiplikasjonstegnet? Vi bruker regelen at

$$2\ \cdot v = 2v \qquad \text{og} \qquad 3\ \cdot b = 3b$$

Resultat, konstanter og variabler

En **formel** er satt sammen av bokstaver og tall. De ulike ingrediensene har ulike navn, og det er viktig at du forstår disse begrepene.

Vi fortsetter med **formelen** som beskriver hvor mye en familie må betale for å delta på en aktivitet, og setter navn på **leddene** i **formelen**:

Konstant

Resultat $\rightarrow$ $P = 2v \cdot 3b$

Variabel

Resultat: det vi ønsker å regne ut, svaret på regnestykket. I dette tilfellet: hvor mye familien må betale for å delta på en aktivitet.

Konstant: noe som ikke forandrer **verdi**. I dette tilfellet: familien må alltid regne ut prisen for **2** voksne og **3** barn.

Variabel: noe som kan forandre **verdi**. I dette tilfellet: både prisen for en voksenbillett og prisen for en barnebillett er avhengig av hvilken aktivitet familien

Oppgave 24

Lag **formler** til situasjonen nedenfor. Velg passende bokstaver som forkortelse.

a) En barnefamilie består av to voksne og to barn. Lag en formel som kan brukes til å regne ut hvor mye familien betaler når de skal delta på ulike aktiviteter.

b) I de fleste fotballserier får et lag tre poeng for seier, ett poeng for dersom en kamp ender uavgjort og null poeng dersom de taper kampen. Lag en formel som kan brukes til å regne ut poengsummen til et lag utfra utfallet av kampene.

c) Dersom du ønsker å ta førerkort i klasse b (bil) må du beregne cirka 17 000 kroner i faste kostnader. I tillegg koster en kjøretime omtrent 600 kroner. Lag en formel som kan brukes til å regne ut totalpris for å ta førerkort utfra hvor mange kjøretimer du trenger.

Innsetting av verdier i formler

Når vi får oppgitt **verdien** til **variablene**, kan vi erstatte **variablene** i **formelen** med de oppgitte **verdiene**. Dermed endrer vi **formelen** fra å være en regnemetode til å bli et regnestykke, hvor vi kan regne ut svaret.

Tenk deg at familien ovenfor skal reise med t-banen, og velger å kjøpe enkeltbilletter. På Ruter.no finner de følgende prisoversikt:

Voksenbillett: 38 kr
Barnebillett: 19 kr

For å regne ut hvor mye familien må betale, må vi ta utgangspunkt i **formelen** vi lagde

$$P = 2v + 3b$$

og erstatte **variablene** med de oppgitte **verdiene**. Dermed får vi følgende regnestykke:

$$P = 2 \cdot 38 + 3 \cdot 19 = 76 + 57 = \underline{\underline{133}}$$

Oppgave 25

Bruk formelen fra eksempelet ovenfor, og regn ut hvor mye familien må betale til sammen når:

a) Voksenbilletten = 100 kr.
Barnebilletten = 80 kr.

b) Voksenbilletten = 180 kr.
Barnebilletten = 100 kr.

c) Voksenbilletten = 0 kr.
Barnebilletten = 150 kr.

d) Voksenbilletten = 250 kr.
Barnebilletten = 0 kr.

Utfordring: klarer du å lage et program i trinket.io/python3 som løser oppgavene ovenfor?

Oppgave 26

Til denne aktiviteten trenger du to terninger med ulik farge, for eksempel en hvit terning og en rød terning. Målet er å oppnå høyest mulig sluttsum.

Kast begge terningene. Den hvite terningen skal erstatte **variabelen** H i en **formel**, mens den røde terningen skal erstatte **variabelen** R.

Du skal gjøre aktiviteten to ganger. Første gang skal du løse **formlene** i rekkefølge. Begynn med den øverste.

Formel	Verdi		Innsetting	Sum
	H	R		
Sum = 3H + R				
Sum = 2R - H				
Sum = 4R + 2H				
Sum = 2R – 1				
Sum = 2H + 4				

Når du har regnet alle **formlene**, skal du gjøre aktiviteten en gang til. Denne gangen kaster du terningene først, og bestemmer deg for hvilken **formel** du skal løse etter at du har sett resultatet av kastet. Hver **formel** skal kun løses en gang.

Formel	Verdi		Innsetting	Sum
	H	R		
Sum = 3H + R				
Sum = 2R - H				
Sum = 4R + 2H				
Sum = 2R – 1				
Sum = 2H + 4				

Oppgave 27

For over 2000 år siden beskrev greske matematikere hvordan vi kan regne ut arealet og volumet til geometriske figurer. **Formlene** de skrev ned er fortsatt gyldige.

Nedenfor finner du oppgaver med noen av de meste kjente **formlene**.

a) Arealet til et rektangel kan regnes ved hjelp av formelen $A = l \cdot b$
Finn arealet til et rektangel med $l = 3{,}8\ m$ og $b = 6{,}2\ m$

b) Arealet til en trekant kan regnes ved hjelp av formelen $A = \frac{g \cdot h}{2}$
Finn arealet til en trekant med $g = 4{,}1\ cm$ og $h = 2{,}8\ cm$

c) Arealet til en sirkel kan regnes ved hjelp av formelen $A = \pi r^2$.
Finn arealet til midtsirkelen på en fotballbane, som har $r = 9\ m$

d) Volumet til et rektangulært prisme kan regnes ved hjelp av formelen $V = l \cdot b \cdot h$
Finn volumet til et rektangulært prisme med $l = 40\ cm$, $b = 28\ cm$ og $h = 30\ cm$

e) Volumet til en sylinder kan regnes ved hjelp av formelen $V = \pi r^2 \cdot h$
Finn volumet til en sylinder med $r = 2\ dm$ og $h = 1{,}5\ dm$

f) Volumet til en kule kan regnes ved hjelp av formelen $V = \frac{4}{3}\pi r^3$
Finn volumet til en kule med $r = 5\ cm$

g) Overflaten til et rektangulært prisme kan regnes ut ved hjelp av formelen
$O = 2lb + 2lh + 2hb$
Finn overflaten til et rektangulært prisme med $l = 8\ cm$, $b = 12\ cm$ og $h = 10\ cm$

h) Overflaten til en sylinder kan regnes ut ved hjelp av formelen $O = 2\pi r^2 + 2\pi rh$
Finn overflaten til en sylinder med $r = 7\ cm$ og $h = 12\ cm$

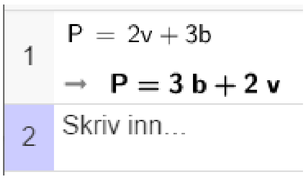
i) Overflaten til en kule kan regnes ut ved hjelp av formelen $O = 4\pi r^2$
Finn overflaten til en basketball med $r = 12\ cm$

Formelregning i CAS (Computer Algebra System)

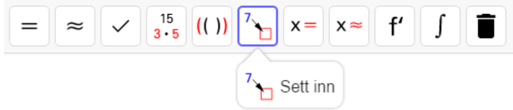
Det finnes digitale verktøy som kan hjelpe oss med innsetting i **formler**. Ett av disse verktøyene er **CAS**, som du finner i **GeoGebra**.

Trykk «Oppsett», og velg CAS

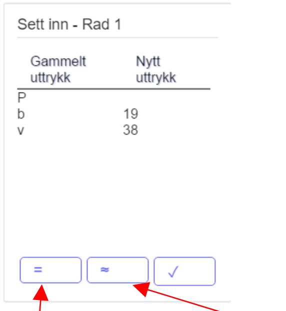
Skriv inn **formelen**



Velg «Sett inn»



Vi får opp denne boksen. Her kan vi erstatte **variablene** med **verdier.**



Nøyaktig

Tilnærmet

Vi kan velge mellom å få et nøyaktig svar, eller et tilnærmet svar. I dette tilfellet blir svarene like.

Oppgave 28

Bruk CAS til å løse alle deloppgavene i **oppgave 27**. Hint: desimaltall må skrives med punktum.

Hver enkelt løsning skal kopieres til ett Word-dokument, som du leverer til læreren din.

Ved innlevering må du huske:

1. Tydelig nummerering av oppgavene
2. Tekstsvar
3. Ryddig og oversiktlig besvarelse

Utregning av variabler i formler

Dersom vi får oppgitt **resultatet** til en **formel**, kan vi regne ut **verdien** til en av **variablene** i **formelen**. Dette kan gjøres både ved hjelp av likningsregler du lærte på ungdomskolen, eller ved å bruke CAS.

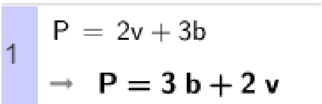
Tenk deg at familien fra forrige eksempel betalte 410 kroner for en aktivitet, og at prisen for voksenbillett var 100 kroner. Hvor høy var prisen for en barnebillett?

Vi kan løse dette ved hjelp av likningsregler:

$3b + 2 \cdot 100 = 410$	Setter inn **verdien** for voksenbillett og **resultatet** i **formelen**
$3b + 200 = 410$	Regner ut
$3b = 410 - 200$	Trekker fra 200 på hver side av likhetstegnet
$3b = 210$	Regner ut
$b = 70$	Dividerer med 3 på hver side av likhetstegnet

Vi kan løse dette ved hjelp av CAS:

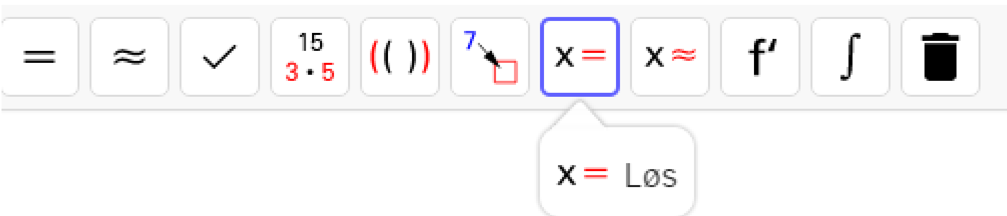
Vi skriver inn **formelen**



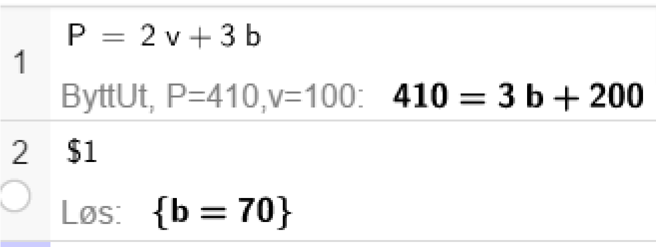
og setter inn **verdiene**

Dermed får vi følgende:

Når vi står i rad 2, kan vi trykke på «Løs»:



CAS løser likningen for oss:



Oppgave 29

Familien fra eksempelet dro på kino, og betalte til sammen 630 kroner for billettene. Barnebillettene kostet 120 kroner per stykk. Hvor mye kostet voksenbillettene per stykk?

Oppgave 30

Fra fysikkens verden kan vi lære at bevegelsesenergi, *E*, måles i joule (J) og kan regnes ut med formelen

$$E = \frac{1}{2} mv^2$$

der *m* er massen målt i kilogram (kg) og *v* er farten målt i meter per sekund (m/s).

a) Hvor høy er bevegelsesenergien E til en person som veier 70 kg, og løper i en fart på 8 m/s?
b) Hvor stor masse *m* har en fallende kule med bevegelsesenergi på 8000 joule og som faller i 40 m/s?

Oppgave 31

Løs noen av oppgavene nedenfor i CAS.

a) Arealet til et rektangel kan regnes ved hjelp av formelen $A = l \cdot b$
Finn lengden til et rektangel med $A = 32{,}8\ m^2$ og $b = 6{,}2\ m$

b) Arealet til en trekant kan regnes ved hjelp av formelen $A = \frac{g \cdot h}{2}$
Finn høyden til en trekant med $A = 16\ cm^2$ og $g = 6{,}8\ cm$

c) Arealet til en sirkel kan regnes ved hjelp av formelen $A = \pi r^2$.
Finn radiusen til en sirkel med $A = 100\ cm^2$

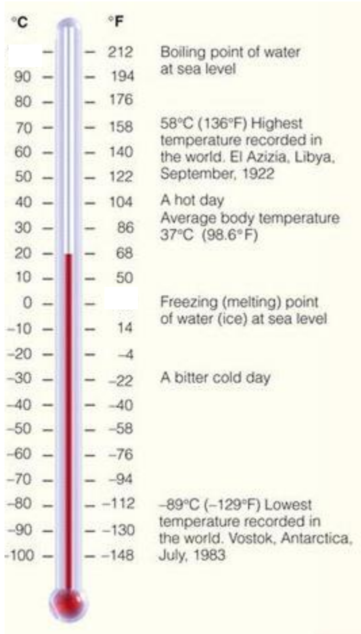
d) Volumet til et rektangulært prisme kan regnes ved hjelp av formelen $V = l \cdot b \cdot h$
Finn høyden til et rektangulært prisme med $V = 200\ cm^3$, $b = 4\ cm$ og $l = 12\ cm$

e) Volumet til en sylinder kan regnes ved hjelp av formelen $V = \pi r^2 \cdot h$
Finn radius til en sylinder med $V = 7\ dm^3$ og $h = 0{,}8\ dm$

f) Volumet til en kule kan regnes ved hjelp av formelen $V = \frac{4}{3}\pi r^3$
Finn radius til en kule med $V = 3\ 000\ cm^3$

Oppgave 32

I Norge måler vi temperatur i antall Celsius, forkortet ℃. I USA brukes en annen skala, som kalles Fahrenheit, forkortet ℉.



Sammenhengen mellom ℃ og ℉ kan beskrives ved formelen

$$℉ = ℃ \cdot \frac{9}{5} + 32$$

a) Bruk CAS til å
   - Gjøre 0℃ om til ℉
   - Gjøre 212℉ om til ℃

   Hvorfor har vi valgt akkurat disse temperaturene?

b) Velg noen andre temperaturer som du omgjør mellom skalaene.

Oppgave 33

Maksimal belastning

$$P = U \cdot I$$

P = effekt, som måles i Watt (W)
U = spenning, som måles i Volt (V)
I = strøm, som måles i Ampere (A)

Har du noen gang opplevd at strømmen hjemme har gått? Dette kan skyldes at det er koblet for mange elektriske apparater i stikkontaktene, noe som fører til en overbelastning av strømkretsen.

Alle strømkretser har en maksimal kapasitet, og dersom det trekkes mer strøm enn dette vil sikringen slå ut for å forhindre brann. Maksimal kapasitet til en strømkrets kan regnes ut med **formelen** ovenfor.

I Norge har vi en spenning på 230 Volt. En normal kurs i hus og leiligheter er på 16 Ampere. For sikkerhets skyld vil sikringen ut av dersom det brukes 80 % av maksimal belastning.

a) Hvor høy er kapasiteten (målt i Watt) på en normal kurs i hus og leiligheter i Norge?

Tenk deg at en strømkrets går til badet, og en annen går til kjøkkenet.

b) Undersøk effekten til ulike elektriske apparater som er vanlig å bruke på badet og på kjøkkenet. Lag en oversikt over ulike kombinasjoner av apparater som kan være tilkoblet en strømkrets uten at sikringen slår ut.

Noen strømkretser har kurs på 10A.

c) Hvordan vil dette påvirke svarene dine i a) og b)?

Formler er mye brukt ved dosering av medisin. På de neste sidene finner du tre eksempler på dette.

Oppgave 34

Noen medisiner doseres etter hvor stor kroppsoverflate en pasient har. Mostellers **formel** kan brukes til å beregne arealet av en persons kroppsoverflate.

Mostellers **formel**

$$O = \frac{1}{60} \cdot \sqrt{h \cdot m}$$

O: antall kvadratmeter kroppsoverflate
h: personens høyde målt i centimeter
m: antall kilogram personen veier

En person er 180 cm høy og veier 75 kg

a) Bruk Mostellers formel til å beregne arealet av kroppsoverflaten til denne personen.
b) Hva vil skje med denne personens kroppsoverflate dersom hen går opp eller ned i vekt?

En pasient veier 61 kg. Arealet av kroppsoverflaten er 1,66 m^2

c) Hvor høy er denne pesonen ifølge Mostellers formel?

Oppgave 35

Parklands **formel** blir brukt for å beregne hvor mange milliliter væske en pasient med store brannskader skal ha tilført i løpet av de første 24 timene etter en forbrenning.

Parklands **formel**

$$V = 4 \cdot m \cdot A$$

V: Væske (milliliter)
m: personens vekt målt i kilogram
A: prosenten av kroppsoverflaten som er forbrent

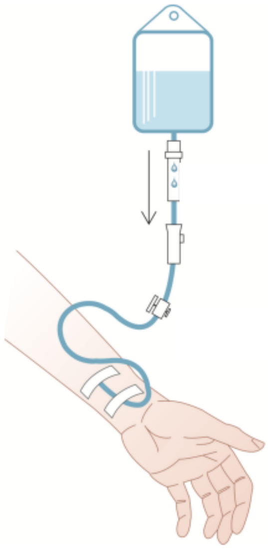
En pasient veier 63 kg, og 25 % av kroppsoverflaten er forbrent.

a) Hvor mye væske skal pasienten ha tilført i løpet av de 24 første timene etter forbrenniga?
b) Hvordan vil endring i vekt påvirke mengden væske?

En annen pasient veier 85 kg. En lege beregener at pasienten skal ha tilført 10 000 mL væske de første 24 timene etter en forbrenning.

c) Hvor stor prosentandel av kroppsoverflaten er forbrent hos denne pasienten?

Oppgave 36



Intravenøst drypp brukes for å gi pasienter væsker og flytende medisiner.

For å regne ut drypphastigheten H i dråper per minutt for intravenøse drypp brukes **formelen**

$$H = \frac{d \cdot v}{60 \cdot t}$$

der

d = dråpefaktoren målt i dråper per milliliter
v = volumet i milliliter av den intravenøse væsken
t = antall timer det vil ta å tilføre den intravenøse væsken

En pasient skal ha intravenøst drypp i 2 timer. Volumet av den intravenøse væsken er 240 mL. Dråpefaktoren er 20 dråper per milliliter.

a) Regn ut drypphastigheten H.
b) Hva skjer med H dersom t dobles, mens d og v ikke endres?

En annen pasient skal ha intravenøst drypp i 3 timer med en drypphastighet på 50 dråper per minutt. Dråpefaktoren er 25 dråper per milliliter.

c) Bestem volumet av den intravenøse væsken denne pasienten skal ha.

Presentasjonsoppgave

Når du skal øvelseskjøre, vil kjørelæreren din snakke mye med deg om bilens bremselengde. Du vil også få spørsmål om dette på teoriprøven.

Bremselengden til en bil er avhengig av to faktorer: bilens fart og hjulenes veigrep. Det er viktig å være klar over at slitte dekk eller våt asfalt gir dårligere veigrep.

En bils bremselengde (S) kan beskrives ved hjelp av formelen

$$S = \frac{v^2}{2 \cdot \mu \cdot g}$$

hvor

v = bilens fart, målt i meter per sekund. Se omgjøring mellom m/s og km/t nedenfor.

g = gravitasjonens påvirkningskraft ≈ 9,81 (på jorda).

μ = veigrepet (friksjonskoeffisienten). Denne endres etter forholdene. Se tabellen nedenfor.

Kjøreforhold	μ
Tørr asfalt	1,0
Våt asfalt	0,6
Snø	0,3
Is	0,15

Km/t		**m/s**
30	=	8,3
40	=	11,1
50	=	13,9
60	=	16,7
70	=	19,4
80	=	22,2
90	=	25,0
100	=	27,8

Bruk **formelen** som beskriver en bils bremselengde, og lag en presentasjon av hvordan bilens bremselengde endres etter hvert som både farten og veigrepet endres.

Du velger selv hvilket av programmene Python, CAS, GeoGebra eller ExCel du vil bruke.

Løsningsforslag

Oppgave	Svar	Oppgave	Svar
2	a) Klasse, jenter, gutter og	**20**	b) while tall<9
	heleklassen er variabler.	**21**	b) while årstall<2050
	b) Verdien er det som kommer	**22**	c) while verdi>8000
	etter likhetstegnet		d) verdi=verdi-1500
6	a) "Rektor" b) Stor forbokstav	**23**	Linje 4: while grader<40
	i «TallA».		Linje 5: grader=grader+1.5
12	Dette programmet adderer 1 til		Linje 6: timer=timer+1
	variabelen «Tall» før første	**24**	a) $S = 2v + 2b$ b) $P = 3s + u$
	utskrift.		c) $T = 600k + 17000$
13	Her står print utenfor løkka.	**25**	a) 440 kr b) 660 kr c) 450 kr
14	b) Range må økes til 10		d) 500 kr
	c) tall=tall+2	**27**	a) 23,6 m^2 b) 5,7 cm^2 c) 254 m^2
15	b) Range må økes til 18		d) 33,6 dm^3 e) 6 dm^3 f) 523 cm^3
	c) årstall=årstall+2		g) 592 cm^2 h) 923 cm^2
16	b) svar=svar+ønsket gangetabell		i) 1809 cm^2
	c) Range må økes til 20	**29**	135 kroner
17	b) elevtall=elevtall+30	**30**	a) 2 240 joule b) 10 kg
	c) Range må økes til 10	**31**	a) 5,3 m b) 4,7 cm c) 5,6 cm
	d) Print må settes utenfor løkka		d) 4,2 cm e) 1,7 dm f) 8,9 cm
18	Linje 4: range(20)	**32**	a) 32℉, 100℃. Dette er
	Linje 5: grader=grader+1.5		temperaturene hvor vann
	Linje 6: timer=timer+1		endrer form.
19	Programmet skriver ut «tall»	**33**	a) 2944 W c) 1840 W
	før første addisjon.		

34	a) 1,94 m^2 b) Økt vekt vil føre til	**35**	a) 6300 mL b) Høyere vekt betyr
	økt overflateareal. Nedgang i		mer væske. c) 29,4 %
	vekt vil føre til nedgang i	**36**	a) 40 dråper/min b) Drypp-
	overflateareal. c) 162,6 cm		hastigheten halveres. c) 360 mL

Prosent

Målet for opplæringen er at eleven skal kunne:

- bruke prosent, prosentpoeng, promille og vekstfaktor i utregninger, og presentere og grunngi løsninger
- lese, hente ut og vurdere matematikk i tekster om situasjoner lokalmiljøet, gjøre beregner knyttet til dette, og presentere og argumentere for resultatene

Hva er prosent?

Ordet **prosent** har latinsk opprinnelse, og er satt sammen av ordene **pro** (av) og **cent** (hundre). **Prosent** betyr derfor «av hundre», men det kan også leses som «hundredel».

Finne prosenten

Prosent er nyttig å bruke både når vi ønsker å beskrive hvor mye en **del** utgjør av en **helhet**, og når vi ønsker å sammenligne **andeler** av **helheter** med ulik størrelse.

Vi regner ut **prosenten** med følgende regnemetode:

$$\boldsymbol{prosenten} = \frac{verdien\ av\ \boldsymbol{delen}}{verdien\ av\ \boldsymbol{helheten}} \cdot 100\ \%$$

Vi bruker **prosent** når vi ønsker å beskrive:

- hvor mye strøm vi har på telefonen
- hvor mye prisen på klær er redusert når butikkene har salg
- hvor stor andel del av Oslos befolkning som bor i Groruddalen
- hvor stor oppslutning partiene får ved Stortingsvalget
- hvor stor del av verdens verdier Norge eier gjennom Oljefondet

og i mange andre situasjoner.

Tenk deg følgende eksempel. En lærer ønsker å undersøke hvilken ungdomsskole elevene i klassen kommer fra, og lager denne oversikten:

Ungdomsskole	**Antall**	**Andel**	
		(Forholdstall)	**(Forholdstall · $\mathbf{100\ \%}$)**
Haugerud	8	$\frac{8}{30} = 0{,}27$	$0{,}27 \cdot 100\ \% = 27\ \%$
Lindeberg	7	$\frac{7}{30} = 0{,}23$	$0{,}23 \cdot 100\ \% = 23\ \%$
Granstangen	10	$\frac{10}{30} = 0{,}33$	$0{,}33 \cdot 100\ \% = 33\ \%$
Andre	5	$\frac{5}{30} = 0{,}17$	$0{,}17 \cdot 100\ \% = 17\ \%$
Sum	**30**	$\mathbf{\frac{30}{30} = 1{,}0}$	$1{,}0 \cdot 100\ \% = 100\ \%$

Oppgave 1

Gjør tilsvarende undersøkelse for klassen din.

Hvordan er fordelingen i klassen din sammenlignet med hele skolen?

Oppgave 2

Som du ser i eksempelet på forrige side, kan vi beskrive en **andel** på tre ulike måter:

BRØK <-> DESIMAL <-> PROSENT

I oppgavene nedenfor får du trening i å regne mellom disse ulike representasjonsmåtene.

Fyll ut tabellen. Klarer du noen av oppgavene uten kalkulator?						
Brøk	**Desimal**	**Prosent**		**Brøk**	**Desimal**	**Prosent**
$\frac{28}{100}$				$\frac{37}{56}$		
	0,48			$\frac{85}{127}$		
	0,61			$\frac{21}{18}$		
	0,7				0,8	
$\frac{5}{100}$					0,9	
		37 %				7 %
		8 %				113 %

Kan du lage en regel på hvordan du regner mellom **desimaltall** og **prosenttall**?

Oppgave 3

I en klasse er det 13 gutter og 15 jenter.

a) Hvor mange prosent av elevene i klassen er jenter?
b) Hvor mange prosent av elevene i klassen er gutter?

Oppgave 4

I mange butikker finner du følgende tilbud:

Kjøp 4

Betal for 3!

Hvor mange prosent får du i rabatt dersom du benytter deg av dette tilbudet?

Oppgave 5

I mange butikker finner du følgende tilbud:

Kjøp 3

Betal for 2!

Hvor mange prosent får du i rabatt dersom du benytter deg av dette tilbudet?

Oppgave 6

Meny har følgende priser på rundstykker:

Antall:	Pris:
1	10 kr
2	20 kr
3	25 kr

a) Hvor mange prosent rabatt får du på det tredje rundstykket?
b) Hvor mange prosent rabatt får du til sammen dersom du kjøper 3 rundstykker?

Oppgave 7

Det er vanlig å dele de politiske partiene i 3 hovedbolker: venstresiden, sentrum og høyresiden.

I et valgdistrikt fordelte stemmene seg slik:

- $\frac{3}{7}$ av stemmene gikk til partier på venstresiden
- En andel på $0{,}2$ av stemmene gikk til partier i sentrum
- Resten av stemmene gikk til partier på høyresiden

Hvor mange prosent av stemmene gikk til partier på høyresiden?

En eksamensoppgave

I en eske ligger det røde, grønne og gule kuler.

$\frac{3}{5}$ av kulene er røde, og $\frac{1}{10}$ av kulene er grønne.

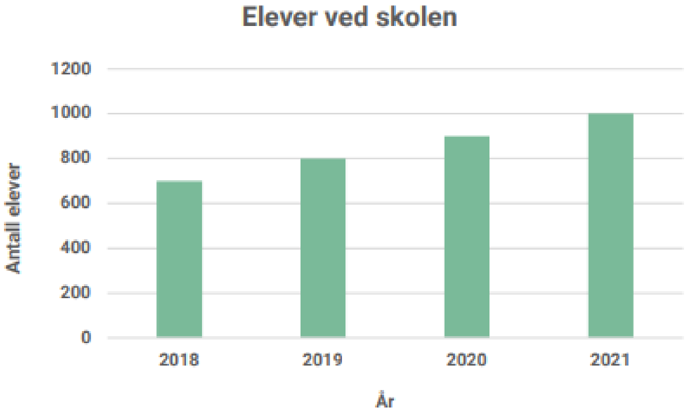
Hvor mange prosent av kulene er gule?

En eksamensoppgave

En gullring er stemplet med 585.
Det betyr at 585 tusendeler av ringen er gull.

Hvor mange prosent av ringen er gull?

En eksamensoppgave



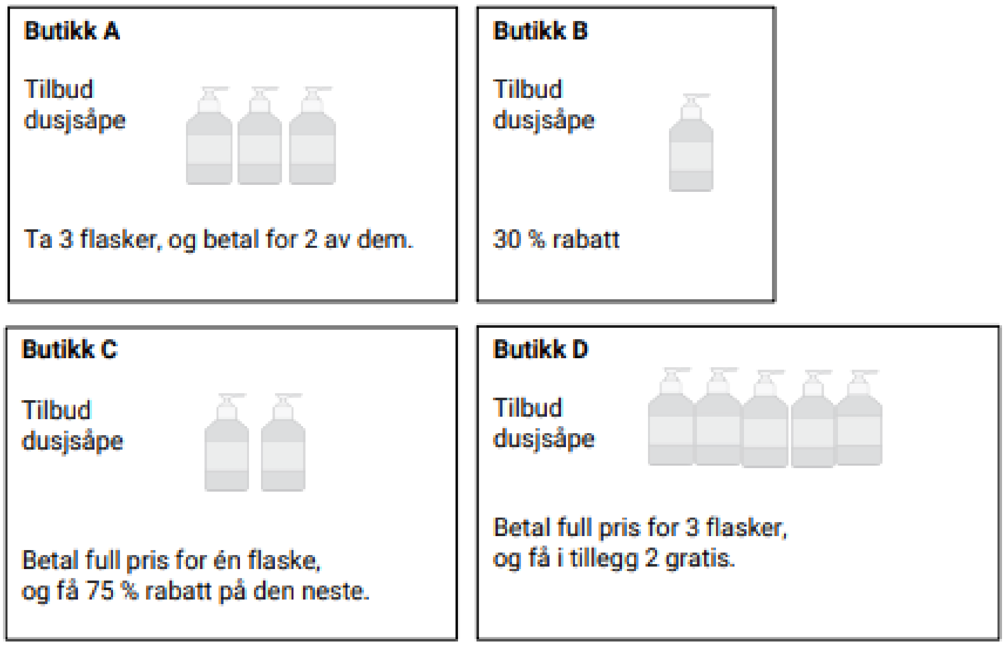
Diagrammet viser antall elever ved en videregående skole de fire siste årene.

Når var det størst prosentvis økning i antall elever fra et år til det neste?

En eksamensoppgave

En flaske dusjsåpe koster det samme i fire butikker.

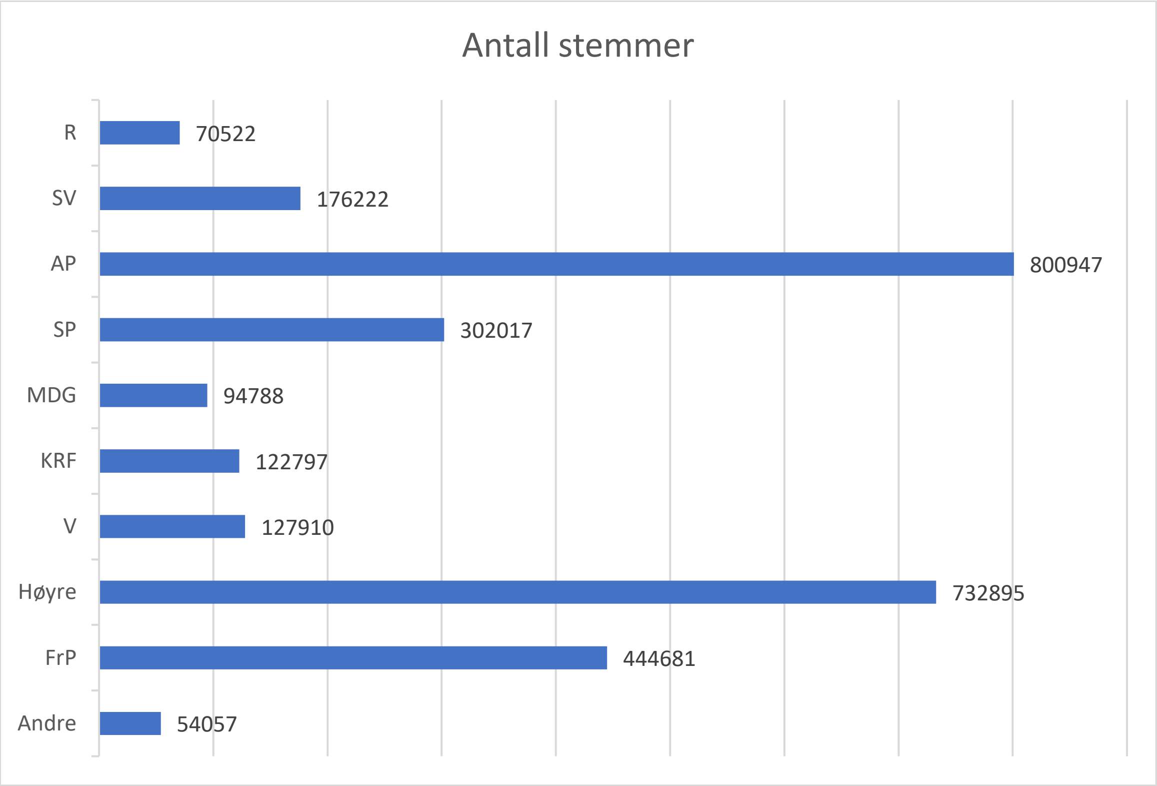
De fire butikkene bestemmer seg for å sette ned prisen.
Dette gjør de på hver sin måte. Se nedenfor.



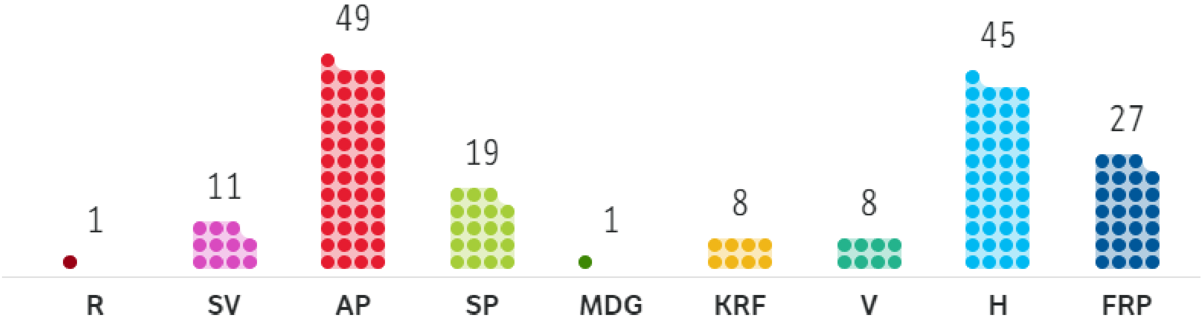
Gjør beregninger, og sett opp en oversikt hvor du sorterer tilbudene etter hvor gode de er.

Presentasjonsoppgave

Ved Stortingsvalget i 2017 ble det totalt avgitt 2 926 836 stemmer. Nedenfor finner du resultatet for partiene som oppnådde minst 1 representant på Stortinget (en slik representant kalles en mandat).



Fordelingen av mandater på Stortinget ble slik:



Bruk resultatene ovenfor til å si noe om valgresultatet.

Bruke prosenten

Dersom vi vet hvor stor **prosent** en **del** er av en **helhet**, kan vi regne verdien til **delen** ved hjelp av følgende **regnemetode**:

$$\boldsymbol{Verdien}\ til\ \boldsymbol{helheten}\ \cdot \boldsymbol{prosenten} = \boldsymbol{verdien}\ til\ \boldsymbol{delen}$$

I oppgave 2 trente du på å gjøre **prosent** om til **desimaltall**. Dersom vi bruker **desimaltallet** i utregningen istedenfor **prosenten**, bruker vi ordet **prosentfaktor** om **desimaltallet**. Da får vi følgende **regnemetode**:

$$\boldsymbol{Verdien}\ til\ \boldsymbol{helheten}\ \cdot \boldsymbol{prosentfaktoren} = \boldsymbol{verdien}\ til\ \boldsymbol{delen}$$

I starten av skoleåret 2022/2023 vil 720 elever begynne på Hellerud vgs. **Andelen** av Helleruds elever som kommer fra Granstangen er omtrent 18 %.

Ved hjelp av **formlene** ovenfor kan vi regne ut hvor mange av Helleruds elever som kommer fra Granstangen.

Prosenten

$$Antall\ elever\ fra\ Granstangen = 720\ elever\ \cdot 18\ \% = 129{,}6\ elever \approx 130\ elever$$

Prosentfaktoren

$$Antall\ elever\ fra\ Granstangen = 720\ elever\ \cdot 0{,}18 = 129{,}6\ elever \approx 130\ elever$$

Du velger selv hvilken metode du ønsker å bruke. Det er imidlertid greit å vite hvilke metoder du kan bruke på de ulike digitale hjelpemidlene:

Digitale hjelpemidler	Prosentfaktoren	Prosenten
ExCel	✓	✓
GeoGebra	✓	✓
CAS	✓	✓
Kalkulator	✓	Ikke alle

Oppgave 8

Regn oppgavene nedenfor ved hjelp av kalkulator. Du velger selv om du ønsker å bruke **prosenten** eller **prosentfaktoren**, men prøv gjerne begge metodene.

a) 35 % av 400	b) 28 % av 1 200	c) 40 % av 35 600
d) 8 % av 92 400	e) 6,4 % av 7 600	f) 0,8 % av 159 200

Oppgave 9

Espen sparer 12 % av lønna si for å bruke på en lengre reise. Han han 15 000 kr i månedslønn.

Hvor mye sparer han hver måned?

Oppgave 10

Mari får 25 % ekstra i timelønn når hun arbeider etter kl. 16 på hverdager, og 75 % ekstra i timelønn når hun arbeider på lørdager. Hennes ordinære timelønn er 160 kr.

a) Hvor høyt er tillegget hennes etter kl. 16 på hverdager?
b) Hvor høyt er tillegget hennes på lørdager?

Oppgave 11

Et eiendomsfirma tar 5 % av salgsprisen ved salg av en bolig. Av dette får eiendomsmegleren 4% i lønn.

Hvor mye får eiendomsmegleren i lønn dersom hen selger en bolig til 2 000 000 kr?

Oppgave 12

En klesbutikk ville selge unna beholdningen av sommerkolleksjonen, og alle varene skal selges med 30 % rabatt.

	A	B		C
1	Vare	Pris		Rabatt
2	Ankelsokker	kr	59	
3	Bluse	kr	99	
4	Caps	kr	149	
5	Kort kjole	kr	199	
6	Lang kjole	kr	299	
7	Linskjorte	kr	249	
8	Pique-skjorte	kr	299	
9	Sandaler	kr	269	
10	Shorts	kr	399	
11	Skjørt	kr	159	
12	Solbriller	kr	499	
13	Solkrem	kr	169	
14	T-skjorte	kr	99	
15	Vannflaske	kr	149	

Lag et regneark som vist til ovenfor som kan brukes til å regne rabatten på hver enkelt vare. I de grønne rutene skal du skrive formler.

En eksamensoppgave

Angelica har laget blåbærsaft. Saften inneholder 10 % sukker. Angelica synes saften er sur og vil lage en ny saftblanding med 50 % mer sukker.

Hvor mange prosent sukker vil den nye saftblandingen inneholde?

Oppgave 13

En klesbutikk ville selge unna beholdningen av sommerkolleksjonen, og alle varene skal selges med 30 % rabatt.

	A	B		C
1	Rabatt		30 %	
2	Vare	Pris		Rabatt
3	Ankelsokker	kr	59	
4	Bluse	kr	99	
5	Caps	kr	149	
6	Kort kjole	kr	199	
7	Lang kjole	kr	299	
8	Linskjorte	kr	249	
9	Pique-skjorte	kr	299	
10	Sandaler	kr	269	
11	Shorts	kr	399	
12	Skjørt	kr	159	
13	Solbriller	kr	499	
14	Solkrem	kr	169	
15	T-skjorte	kr	99	
16	Vannflaske	kr	149	

Lag et regneark som vist til venstre som kan brukes til å regne rabatten på hver enkelt vare.

I rute C3 skal du skrive en formel som kan kopieres helt ned til rute C16.

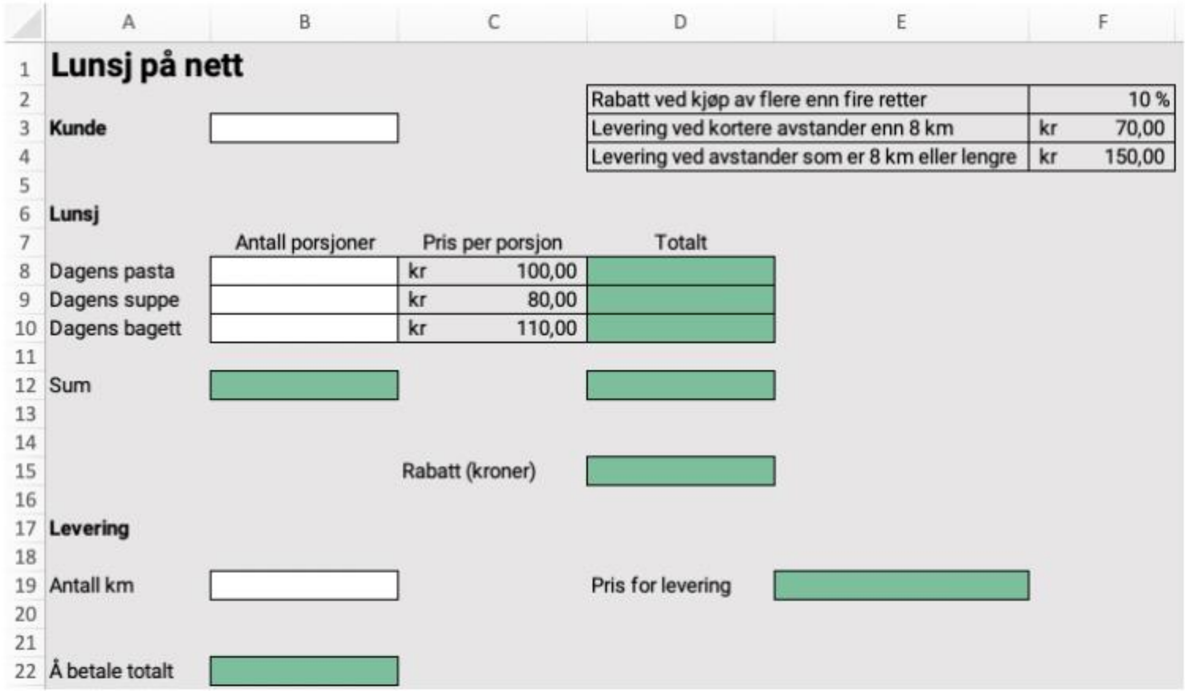
En eksamensoppgave

For å reise til flyplassen kan Herman ta flybussen eller bybanen.
Flybussen koster 100 kroner, og bybanen koster 40 kroner.

a) Hvor mange prosent billigere er bybanen sammenlignet med flybussen?

b) Hvor mange prosent dyrere er flybussen sammenlignet med bybanen?

En eksamensoppgave



	A	B	C	D	E	F
1	**Lunsj på nett**					
2				Rabatt ved kjøp av flere enn fire retter		10 %
3	**Kunde**			Levering ved kortere avstander enn 8 km		kr 70,00
4				Levering ved avstander som er 8 km eller lengre		kr 150,00
5						
6	**Lunsj**					
7		Antall porsjoner	Pris per porsjon	Totalt		
8	Dagens pasta		kr 100,00			
9	Dagens suppe		kr 80,00			
10	Dagens bagett		kr 110,00			
11						
12	Sum					
13						
14						
15			Rabatt (kroner)			
16						
17	**Levering**					
18						
19	Antall km			Pris for levering		
20						
21						
22	Å betale totalt					

«Lunsj på nett» er et firma som lager og leverer ferdige lunsjretter.

Kundene kan velge mellom tre retter:

- Dagens pasta koster 100 kroner
- Dagen suppe koster 80 kroner
- Dagens bagett koster 110 kroner

«Lunsj på nett» gir 10 % rabatt til kunder som bestiller flere enn fire lunsjretter.

Levering koster 70 kroner for avstander som er kortere enn 8 km.
For lengre avstander er prisen 150 kroner

Lag et regneark som «Lunsj på nett» kan bruke for å registrere en bestilling.
Når bestillingen er registrert, skal regnearket beregne hvor mye kunden skal betale.

I de hvite cellene skal «Lunsj på nett» registrere opplysninger når de tar imot en bestilling. I de grønne cellene skal du lage formler.

Sammenligne prosenter – prosentpoeng

Hvilken av disse påstandene er riktige, og hva må forandres i den gale påstanden for at den skal bli riktig?

- ☐ 60 % er 20 % mer enn 40 %
- ☐ 60 % er 50 % mer enn 40 %

Den riktige påstanden er påstand nummer to; 60 % er 50 % mer enn 40 %.

For at den første påstanden skal være riktig, må den skrives slik:
60 % er 20 **prosentpoeng** mer enn 40 %.

Dersom vi ønsker å beskrive **forskjellen** mellom to **prosenter**, bruker vi begrepet **prosentpoeng**.

Prosentpoeng = den ene **prosenten** – den andre **prosenten**

En familie med el-bil skal på kjøretur. Ved oppstart viser måleren at batteriet er 80 % fulladet. Etter en times kjøring har batterinivået sunket til 60 %. Dette betyr at batterinivået har sunket med:

- $80 - 60 = 20$ **prosentpoeng**.
- $\frac{20}{80} = 0{,}25 = 25$ **prosent**

Oppgave 14

Batterinivået på en telefon var på 36 %. Etter en stund hadde nivået sunket til 28 %.

Beskriv nedgangen både i **prosentpoeng** og **prosent**.

Oppgave 15

Ved Stortingsvalget 2017 oppnådde MDG en oppslutning på 3,2 %. Det er viktig for et parti å komme over sperregrensa på 4 %.

a) Med hvor mange **prosentpoeng** må oppslutningen til MDG øke for å oppnå dette?
b) Med hvor mange **prosent** må oppslutningen til MDG øke for å oppnå dette?

En eksamensoppgave

Renta på et lån steg fra 2,0 % til 2,2 %.

a) Hvor mange prosentpoeng steg renta med?
b) Hvor mange prosent steg renta med?

Presentasjonsoppgave

I regnearket nedenfor finner du informasjon om resultatet ved Stortingsvalget i 2013 og i 2017.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	År	Stemmeberettigede	Antall avgitte stemmer	Valgdeltakelse %				
2	2013	3641994	2848903					
3	2017	3762746	2926836					
4								
5								
6		2013		2017		Endring fra 2013 til 2017		
7	Parti	Andel	Antall stemmer	Andel	Antall stemmer	Antall stemmer	Prosentpoeng	Prosent
8	R	1,1 %		2,4 %				
9	SV	4,1 %		6,0 %				
10	AP	30,8 %		27,4 %				
11	SP	5,5 %		10,3 %				
12	MDG	2,8 %		3,2 %				
13	KRF	5,6 %		4,2 %				
14	V	5,2 %		4,4 %				
15	Høyre	26,8 %		25,0 %				
16	FrP	16,3 %		15,2 %				
17	Andre	1,8 %		1,9 %				
18	Sum							

Lag et regneark som vist ovenfor. I de grønne rutene skal du lage formler.

Bruk regnearket til å finne:

- Antall stemmer hvert parti oppnådde ved hvert av valgene.
- Hvert partis **prosentvise** oppslutning ved hvert av valgene.
- Valgdeltakelse i **prosent**
- Endringen i valgresultatene i 2013 og 2017 for alle partiene. Endringen skal vises både i antall stemmer, **prosentpoeng** og **prosent.**

Lag en presentasjon med fokus på endringene mellom Stortingsvalget i 2013 og 2017. I presentasjonen bør du ha med:

- Kommentarer om interessante funn
- Diagrammer som viser både resultat og endringer

Løsningsforslag

Oppgave 2						
Brøk	**Desimal**	**Prosent**		**Brøk**	**Desimal**	**Prosent**
$\frac{28}{100}$	0,28	28 %		$\frac{37}{56}$	0,66	66 %
$\frac{48}{100}$	0,48	48 %		$\frac{85}{127}$	0,67	67 %
$\frac{61}{100}$	0,61	61 %		$\frac{21}{18}$	1,17	117 %
$\frac{70}{100}$	0,7	70 %		$\frac{80}{100}$	0,8	80 %
$\frac{5}{100}$	0,05	5%		$\frac{90}{100}$	0,9	90 %
$\frac{37}{100}$	0,37	37 %		$\frac{7}{100}$	0,07	7 %
$\frac{8}{100}$	0,08	8 %		$\frac{113}{100}$	1,13	113 %

Oppgave	Svar	Oppgave	Svar
3	a) 54 % jenter b) 46 % gutter	**9**	1 800 kr/måned
4	Du sparer 25 %.	**10**	a) 40 kr ekstra b) 120 kr ekstra
5	Du sparer 33 %.	**11**	4 000 kr
6	a) 50 % rabatt b) Du sparer 17 %.	**14**	- 6 prosentpoeng = -17 %
7	37 %	**15**	0,8 prosentpoeng = 25 %
8	a) 140 b) 336 c) 14 240		
	d) 7 392 e) 486,4 f) 1 273,6		

Eksamensoppgave side 39

$$\frac{3}{5} = 3 \cdot \frac{1}{5} = 3 \cdot 20\ \% = \underline{60\ \%}$$

$$\frac{1}{10} = \underline{10\ \%}$$

$$100\ \% - 60\ \% - 10\ \% = \underline{30\ \%}$$

30 % av kulene er gule.

Eksamensoppgave side 39

$$\frac{585}{1000} = \frac{58,5}{100}$$

58,5 % av ringen er gull.

Eksamensoppgave side 40

Siden økningen i antall elever er lik mellom hvert år, vil den prosentvise økningen være størst fra det året det var færrest elever. Det betyr at det er størst prosentvis økning fra 2018 til 2019.

Eksamensoppgave side 40

For enkelhets skyld kan vi sette opprinnelig pris på en flaske dusjsåpe til 100 kroner. Da vil tilbudene i hver av butikken bli slik:

Butikk	Sum	Ant. flasker	Pris per flaske.
A	200 kr	3	66,70 kr/flaske
B			70 kr/flaske
C	125 kr	2	62,50 kr/flaske
D	300 kr	5	60 kr/flaske

Butikk D har lavest pris per flaske, men der må du kjøpe 5 flasker for å oppnå denne prisen. Butikk B har høyest pris per flaske, men dette er den eneste av butikkene som tilbyr prisen selv om man kun kjøper en flaske.
Det blir dermed opp til deg å rangere tilbudene. Lønner det seg å kjøpe mange flasker for å oppnå lavest mulig pris per flaske?

Oppgave 12

	A	B	C
1	Vare	Pris	Rabatt
2	Ankelsokker	kr 59	kr 18
3	Bluse	kr 99	kr 30
4	Caps	kr 149	kr 45
5	Kort kjole	kr 199	kr 60
6	Lang kjole	kr 299	kr 90
7	Linskjorte	kr 249	kr 75
8	Pique-skjorte	kr 299	kr 90
9	Sandaler	kr 269	kr 81
10	Shorts	kr 399	kr 120
11	Skjørt	kr 159	kr 48
12	Solbriller	kr 499	kr 150
13	Solkrem	kr 169	kr 51
14	T-skjorte	kr 99	kr 30
15	Vannflaske	kr 149	kr 45

	A	B	C
1	Vare	Pris	Rabatt
2	Ankelsokker	59	=B2*30%
3	Bluse	99	=B3*30%
4	Caps	149	=B4*30%
5	Kort kjole	199	=B5*30%
6	Lang kjole	299	=B6*30%
7	Linskjorte	249	=B7*30%
8	Pique-skjorte	299	=B8*30%
9	Sandaler	269	=B9*30%
10	Shorts	399	=B10*30%
11	Skjørt	159	=B11*30%
12	Solbriller	499	=B12*30%
13	Solkrem	169	=B13*30%
14	T-skjorte	99	=B14*30%
15	Vannflaske	149	=B15*30%

Eksamensoppgave side 44

Saftblandingen består av en del sukker og ni deler ikke sukker. Dersom mengden sukker øker med 50 % betyr det at vi har 1,5 del sukker og ni deler ikke sukker. Det er totalt 10,5 deler.

$\frac{1,5}{10,5} = 14,3$

Den nye blandingen vil inneholde i overkant av 14 % sukker.

Oppgave 13

For å løse utfordringen har vi brukt «absolutt cellereferanse».

	A	B	C
1	Rabatt:	30 %	
2	Vare	Pris	Rabatt
3	Ankelsokker	kr 59	kr 18
4	Bluse	kr 99	kr 30
5	Caps	kr 149	kr 45
6	Kort kjole	kr 199	kr 60
7	Lang kjole	kr 299	kr 90
8	Linskjorte	kr 249	kr 75
9	Pique-skjorte	kr 299	kr 90
10	Sandaler	kr 269	kr 81
11	Shorts	kr 399	kr 120
12	Skjørt	kr 159	kr 48
13	Solbriller	kr 499	kr 150
14	Solkrem	kr 169	kr 51
15	T-skjorte	kr 99	kr 30
16	Vannflaske	kr 149	kr 45

	A	B	C
1	Rabatt:	0,3	
2	Vare	Pris	Rabatt
3	Ankelsokker	59	=B3*B1
4	Bluse	99	=B4*B1
5	Caps	149	=B5*B1
6	Kort kjole	199	=B6*B1
7	Lang kjole	299	=B7*B1
8	Linskjorte	249	=B8*B1
9	Pique-skjorte	299	=B9*B1
10	Sandaler	269	=B10*B1
11	Shorts	399	=B11*B1
12	Skjørt	159	=B12*B1
13	Solbriller	499	=B13*B1
14	Solkrem	169	=B14*B1
15	T-skjorte	99	=B15*B1
16	Vannflaske	149	=B16*B1

Eksamensoppgave side 45

Det er en prisforskjell på 60 kr mellom flybussen og bybanen.

a) $\frac{60}{100} = 60$ %. Bybanen er 60 % billigere enn flybussen

b) $\frac{60}{40}$ = 150 %. Flybussen er 150 % dyrere enn bybanen

Eksamensoppgave side 46

	A	B	C	D	E	F
1	**Lunsj på nett**					
2				Rabatt ved kjøp av flere enn fire retter		10 %
3	**Kunde**	Snekker Andersen		Levering ved kortere avstander enn 8 km		kr 70,00
4				Levering ved avstander som er 8 km eller lengre		kr 150,00
5						
6	**Lunsj**					
7		Antall porsjoner	Pris per porsjon	Totalt		
8	Dagens pasta	1	kr 100,00	kr 100,00		
9	Dagens suppe	4	kr 80,00	kr 320,00		
10	Dagens bagett	1	kr 110,00	kr 110,00		
11						
12	Sum	6		kr 530,00		
13						
14						
15			Rabatt (kroner)	kr 53,00		
16						
17	**Levering**					
18						
19	Antall km	8		Pris for levering	kr 150,00	
20						
21						
22	Å betale totalt	kr 627,00				

Jeg har laget regnearket og testet det for en kunde som kjøper 6 porsjoner og skal betale for levering når avstanden er 8 km. Under har jeg vist formlene som er brukt i regnearket.

	A	B	C	D	E	F
1	**Lunsj på nett**					
2				Rabatt ved kjøp av flere enn fire retter		0,1
3	**Kunde**	Snekker Andersen		Levering ved kortere avstander enn 8 km		70
4				Levering ved avstander som er 8 km eller lengre		150
5						
6	**Lunsj**					
7		Antall porsjoner	Pris per porsjon	Totalt		
8	Dagens pasta	1	100	=B8*C8		
9	Dagens suppe	4	80	=B9*C9		
10	Dagens bagett	1	110	=B10*C10		
11						
12	Sum	=SUMMER(B8:B10)		=SUMMER(D8:D10)		
13						
14						
15			Rabatt (kroner)	=HVIS(B12>4;D12*F2;0)		
16						
17	**Levering**					
18						
19	Antall km	8		Pris for levering	=HVIS(B19<8;F3;F4)	
20						
21						
22	Å betale totalt	=D12-D15+E19				

Eksamensoppgave side 48

a) Renta steg med 0,2 prosentpoeng.

b) $\frac{0{,}2}{2} = 0{,}1 = 10\%$. Renta steg med 10 %.

Forhold

Målet for opplæringen er at eleven skal kunne:

- utforske, beskrive og bruke begrepene proporsjonalitet og omvendt proporsjonalitet
- tolke og bruke sammensatte måleenheter i praktiske sammenhenger, og velge egne måleenheter
- tolke og regne med rotuttrykk, potenser og tall på standardform

Forholdstall

I matematikk 1P får vi ofte bruk for å sammenligne to tall, og det er i hovedsak tre måter å sammenligne tall på:

- Vi kan avgjøre hvilket av tallene som har ***høyest verdi***. For eksempel har tallet **10** høyere verdi enn tallet **2**. Dette kan virke enkelt, men blir mer komplisert når man for eksempel skal sammenligne verdien av en brøk med et prosenttall.

- Vi kan finne ***forskjellen*** mellom to tall ved å ta det største minus det minste. Forskjellen mellom 10 og 2 er 8. Det betyr at 10 er 8 større enn 2.

- Vi kan finne ***forholdet*** mellom to tall ved å dividere det ene med det andre. Som regel dividerer vi det største med det minste. Forholdet mellom 10 og 2 er 5. Det vil si at 10 er 5 ganger større enn 2. Det betyr også at 2 er $\frac{1}{5}$ av 10. Forholdet mellom to tall kalles ***forholdstall***

På ungdomsskolen har du regnet med forholdstall i mange situasjoner:

- når noe skal forstørres eller forminskes
- målestokk på kart
- omgjøring fra m til cm, eller m^2 til cm^2
- omgjøring fra timer til minutter
- regning med valutakurser
- prosent og vekstfaktor
- formlike figurer

Oppgave 1

Finn **forholdet** mellom:

a) 100 og 25. Svar: 100 er ____ ganger større enn 25, mens 25 er ____ av 100.

b) 9 og 3. Svar: 9 er ____ ganger større enn 3, mens 3 er ____ av 9.

c) 200 og 25. Svar: 200 er ____ ganger større enn 25, mens 25 er ____ av 200.

d) 5 000 og 2. Svar: 5000 er _____ ganger større enn 2, mens 2 er _____av 5 000.

e) 6 og 4. Svar: 6 er ____ ganger større enn 4, mens 4 er ____ av 6.

f) 11 og 5. Svar: 11 er _____ ganger større enn 5, mens 5 er _____av 11

Observasjoner fra klasserommet

Finn tallene du trenger i klasserommet ditt.

a) Hvordan er forholdet mellom antall gutter og antall jenter?
b) Hvordan er forholdet mellom antall pulter og antall stoler?
c) Hvordan er forholdet mellom antall røde tusjer og antall sorte tusjer?
d) Finn noen andre forhold som kan være interessant å regne ut.

Oppgave 2

Trine kjøpte en kjole i Spania, og hun betalte med kort.

Det ble trukket 719,67 kroner fra kontoen hennes.

Hva var kursen på euro (€) den dagen?

Oppgave 3

I virkeligheten er avstanden mellom Oslo og Berlin 840 km. På et Europa-kart er den samme avstanden 8,4 cm.

Finn målestokken til dette kartet.

Oppgave 4

Nedenfor finner du vekten til to ulike el-biler. Hva er forholdet mellom bilenes vekt?

Til venstre:
Tesla X

Til høyre:

BMW i3

Vekt: 2 500 kg

Vekt: 1 200 kg

Oppgave 5

Tove var i USA, og kjøpte en koffert. Hun betalte 119 $ for kofferten. I nettbanken sin så hun at hun 1 042,44

Hva var kursen på amerikanske dollar den dagen?

Oppgave 6

En syklist sykler 80 km på 4 timer. Hva er hastigheten, målt i km/t?

Oppgave 7

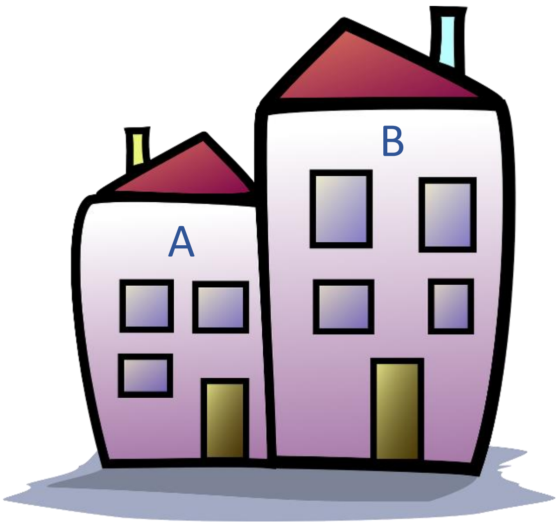
En bil bruker 5 timer på å kjøre 325 km. Hva er hastigheten, målt i km/t?

En eksamensoppgave

4 cm på et kart tilsvarer 60 km i virkeligheten. Hvilken målestokk har kartet?

Praktisk regning med forholdstall

Ved praktisk bruk av **forholdstall** kan du enten måtte *finne* **forholdstallet** eller *bruke* **forholdstallet**. Nedenfor ser du verdivurderingen til to hus:



Verdivurdering hus A

2 600 000 kr

Verdivurdering hus B

4 160 000 kr

Regnestykket $\frac{4\,160\,000\ kr}{2\,600\,000\ kr}$ forteller oss at verdien til hus B er 1,6 ganger høyere enn verdien til
hus A. Vi har nå funnet **forholdstallet** mellom verdien til hus A og B.

Anta forholdet mellom verdien til hus A og hus B forblir 1,6 i noen år fremover, og at verdien til hus A på et tidspunkt blir vurdert til 3 000 000 kr. Da vil verdien til hus B være:

$$3\,000\,000\ kr \cdot 1{,}6 = 4\,800\,000\ kr$$

Anta at på et annet tidspunkt vurderes verdien til hus B til å være 5 424 000 kr. Da vil verdien til hus A være:

$$5\,424\,000\ kr : 1{,}6 = 3\,390\,000\ kr$$

Du kan tenke at vi ***multipliserer*** med **forholdstallet** når vi ønsker et høyere svar og ***dividerer*** med **forholdstallet** når vi ønsker et lavere svar.

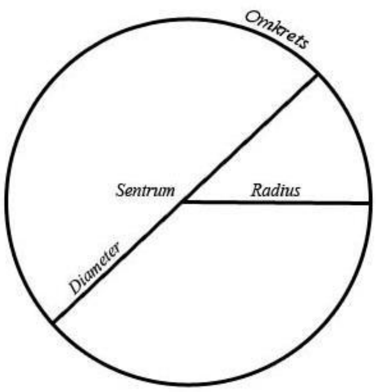
Oppgave 8

Forholdet mellom den store og den lille flaska er 2,5

a) Hvor stort er volumet til den lille flaska dersom volumet til den store er 2 liter?

b) Hvor stort er volumet til den store flaska dersom volumet til den lille er 1,5 liter?

Oppgave 9



Forholdet mellom diameteren og omkretsen i en sirkel kalles pi (π) og gis ofte tallverdien 3,14.

a) Diameteren til en tallerken er 20 cm. Hvor lang er omkretsen til denne sirkelen?
b) Omkretsen til en frisbee er 69,1 cm. Hvor lang er diameteren til denne frisbee-en?
c) Omkretsen til et kakefat er 40 cm, og kakefatet måler 14 cm på tvers. Avgjør om kakefatet er en sirkel.

Utfordring: lag et program i trinket.io/python3 som regner ut omkretsen til en sirkel utfra diameter eller radius.

Oppgave 10

Det gylne snitt (φ) er et forholdstall som er mye brukt innenfor kunst og arkitektur, og er gitt verdien

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$$

Løs gjerne oppgavene nedenfor ved hjelp av GeoGebra.

a) Tenk deg at det skal bygges en hytte, og høyden på stuevinduet i forhold til hytteveggen skal samsvare med det gylne snitt. Hvor høyt må stuevinduet være dersom veggen er 233 cm?

b) Et kredittkort har lengde 86 cm og bredde 53 cm. Er kredittkortet konstruert etter det gylne snitt?

Ifølge nordnorsk vitensenter er noen av forholdene på en voksen menneskekropp tilnærmet lik det gylne snitt. De nevner følgende eksempler:

Høyden og høyden til navlen

Mål fra bakken opp til navlen, så deler du hele høyden din på høyden opp til navlen. Gyllent?

Navle og kne

Avstanden fra navle til bakken, mot avstanden fra kne til bakken.

Navle og Hode

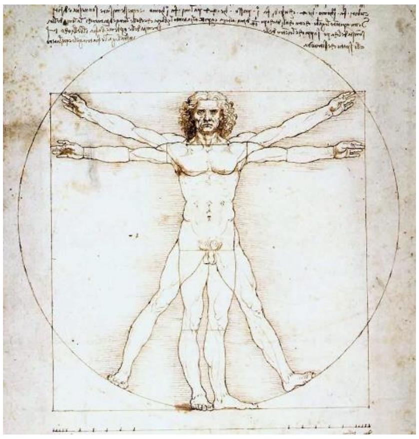
Avstanden fra navlen til toppen av hode, mot avstanden fra skulderen til toppen av hode.

Skulder og albue

Avstanden fra skulderen til fingertuppene, og fra albuen til fingertuppene. Tilnærmet gyldent?

Albue og hånd

Avstanden fra albuen og ut til fingertuppene, mot avstanden fra håndleddet og ut til fingertuppene.



c) Mål noen av avstandene ovenfor på din egen kropp, og avgjør om kroppen din er ferdig utvokst.
Utfordring: lag et program i trinket.io/python3 som regner ut forholdet.

Oppgave 11

Et kart har målestokk 1 : 50 000.

På kartet er det 12 cm mellom Hellerud vgs og Oslo S.

a) Hvor lang er avstanden mellom disse stedene i virkeligheten?

Det er 2,9 km mellom Hellerud vgs og Lindeberg.

b) Hvor lang er avstanden mellom disse stedene på kartet?

Oppgave 12

En tilfeldig dag i 2021 var kursen på USD (amerikanske dollar) 8,42 NOK.

a) Hvor mange dollar fikk man for 300 NOK denne dagen?
b)) Hvor mange norske kroner må man betale for en vare som kostet 149 USD?

Oppgave 13

En bil holder en hastighet på 70 km/t.

a) Hvor langt har bilen kjørt etter 1,5 timer?
b) Hvor lang tid bruker bilen på å kjøre 315 km?

Oppgave 14

Her ser du et kart over Norge (med de gamle fylkesnavnene).

I luftlinje er avstanden mellom Oslo og Trondheim 392 km.

a) Hvilken målestokk har kartet på forrige side? Gjør en hensiktsmessig avrunding.

b) Bruk kartet og målestokken du regnet i a) til å finne avstanden mellom Oslo og Bergen. Du kan kontrollere svaret ditt ved å søke opp avstanden på nettet.

På nettet kan vi lese at det er ca. 1 700 km fra Lindesnes til Nordkapp.

c) Stemmer dette med kartet ovenfor?

Presentasjonsoppgave

Tenk deg at du er interessert i å kjøpe en ny mobiltelefon, og at du søker på nettet etter gode tilbud. Du finner den samme telefonen på to forskjellige nettsider; en amerikansk nettside og en svensk nettside.

Dersom du kjøper telefonen fra den svenske nettbutikken, må du betale SEK 3 200 for telefonen. I tillegg må du betale 300 norske kroner i frakt.

Dersom du kjøper telefonen fra den amerikanske nettsiden, må du betale $ 350 for telefonen. I tillegg må du betale 3 % i frakt.

På nettsiden til Norges bank finner du følgende informasjon om valutakursene på amerikanske dollar og svenske kroner:

Valuta	Antall	Kurs
Amerikanske dollar	1	8,91
Svenske kroner	100	95,98

Gjør beregninger og avgjør hvor det lønner seg å kjøpe telefonen fra.

Proporsjonale størrelser

Du har kanskje opplevd at brusflasker selges i ulik størrelse, eller at du kan kjøpe rundstykker enkeltvis eller i pakker på 3?

Forretninger forsøker noen ganger å få oss kunder til å kjøpe mer av en vare enn vi i utgangspunktet hadde tenkt ved å gi oss kvantumsrabatt, som betyr at vi betaler mindre per enhet dersom vi kjøper flere av den. Enhet kan være antall, liter eller kg.

Dersom prisen per enhet er lik uansett hvor mange enheter vi kjøper er dette et eksempel på det vi kaller **proporsjonale størrelser**.

Proporsjonale størrelser er to størrelser x og y som har det samme forholdstallet uavhengig av antall. Dette kan avgjøres ved regning eller grafisk.

Ved regning skrives dette slik: $\frac{y}{x} = k$.

Grafisk kan vi sjekke om alle punkter ligger på en stråle med utgangspunkt i origo.

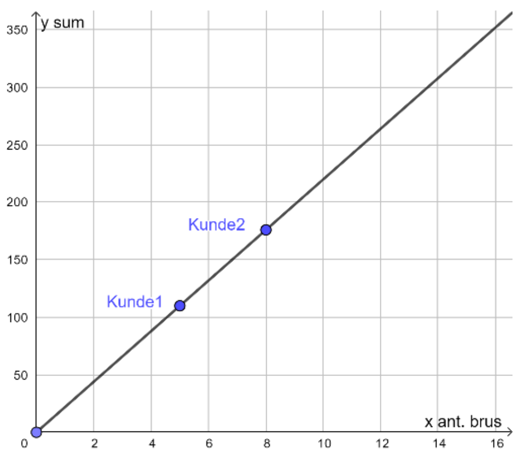
Anta at to personer går inn i en butikk for å kjøpe brus. Den ene kunden kjøper 5 brus og betaler 110 kr, mens den andre kjøper 8 brus og betaler 176 kr. Betaler begge kundene lik pris per brusflaske, eller sagt på en annen måte: er pris og brus **proporsjonale størrelser**?

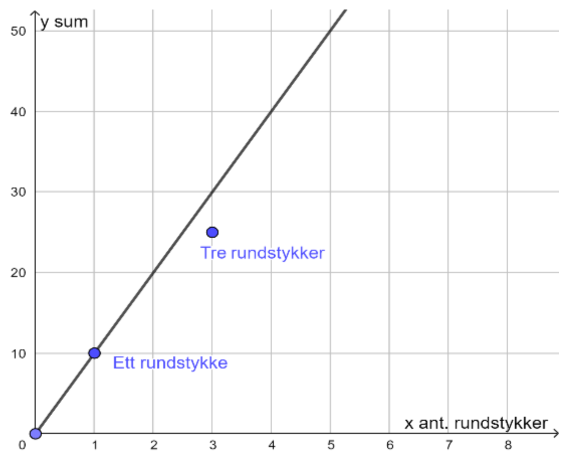
Meny på Tveita selger rundstykker til 10 kr per stykk. Dersom vi kjøper 3 rundstykker betaler vi 25 kr til sammen. Er pris og rundstykker **proporsjonale størrelser?**

X	y	$\frac{y}{x}$
Antall brus	Sum	Pris per brus
5	110	22
8	176	22

x	y	$\frac{y}{x}$
Ant. rundstykker	Sum	Pris per rundstykke
1	10	10
3	25	8,33

Vi kan også markere punktene i et koordinatsystem, og sjekke om punktene ligger på en stråle med utgangspunkt i origo:





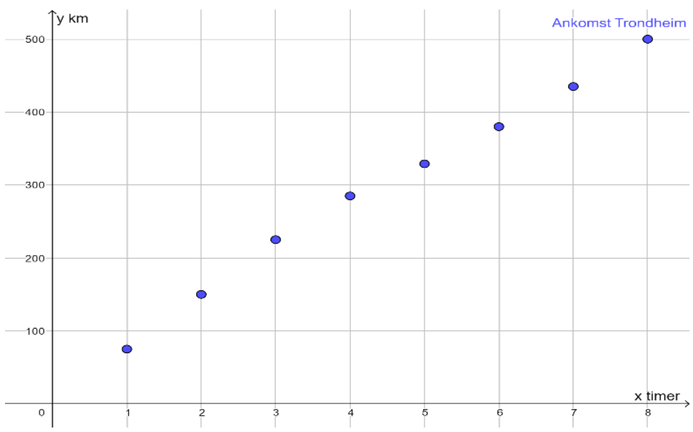
Både ved regning og grafisk ser vi at pris og antall brus er **proporsjonale størrelser**, mens pris og antall rundstykker ikke er det.

Oppgave 15

En familie kjører fra Oslo til Kristiansand. Etter 2 timer har de kjørt 12 mil, og etter 3 timer har de kjørt 18 mil.

a) Er tid og avstand proporsjonale størrelser så langt på turen?

En annen familie kjørte fra Oslo til Trondheim. Hver time registrerte de hvor langt de hadde kommet. Se grafikkbildet til høyre:



b) Hvor lenge er timer og avstand proporsjonale størrelser?

Oppgave 16

Ove selger egg på torget. Han har laget en plakat som viser hvor mye eggene koster, se figuren til høyre. Undersøk om antall egg og pris er proporsjonale størrelser.

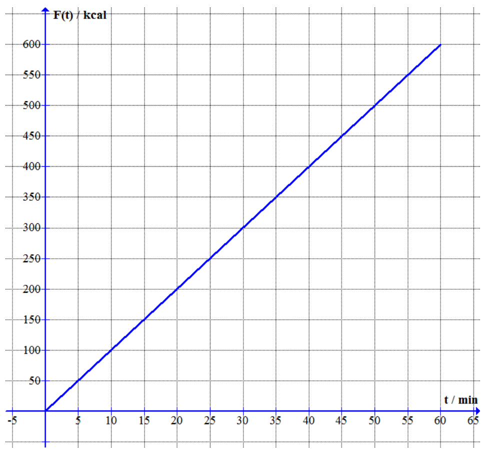
6 egg	10,50 kroner
10 egg	17,50 kroner
15 egg	24,00 kroner
30 egg	45,00 kroner

Oppgave 17

En pakke med to ruller toalettpapir koster 12 kr. En pakke med 8 ruller koster 38 kr, og 16 ruller koster 64 kr. Undersøk om prisen er proporsjonal med antall ruller.

Oppgave 18

Noman løper på en tredemølle. Grafen viser forbrenningen *F* i kilokalorier (kcal) som en funksjon av tida *t* i minutter.



Er *F* og *t* proporsjonale størrelser? Begrunn svaret på to måter.

Oppgave 19

Kathrine arbeider i en klesforretning som lørdagshjelp. Tabellen nedenfor viser hvor mange timer hun arbeidet og hvor mye hun tjente i løpet av fire lørdager.

t (timer)	5	8	7	6
L (kr)	600	960	840	720

a) Vis at lønna og antall arbeidstimer er proporsjonale størrelser.
b) Hvor mye tjener Kathrine hvis hun en lørdag arbeider 9,5 timer?

Oppgave 20

En malebutikk selger malingsspann i tre ulike størrelser.

Det mellomste spannet inneholder 3 liter, og koster 618 kroner.

Det minste spannet inneholder 0,75 liter, og det største spannet inneholder 5 liter.

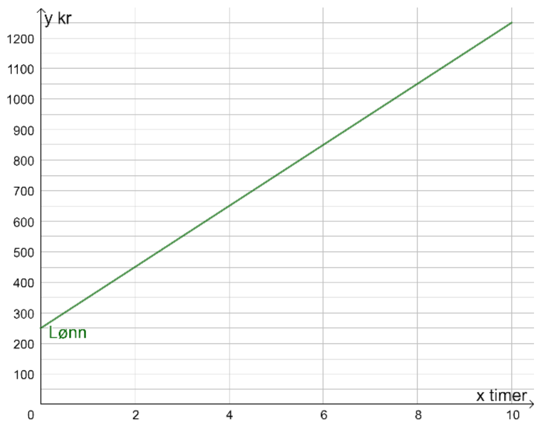
Hvor mye vil det minste og det største spannet koste dersom pris og liter er proporsjonale størrelser?

Oppgave 21

En ungdom har sittet barnevakt som deltidsjobb. Lønna beregnes ut fra et fast beløp for oppmøte, og et fast beløp for hver time ungdommen sitter barnevakt.

Grafen til høyre viser sammenhengen mellom antall timer ungdommen sitter barnevakt, og hvor mye ungdommen får i lønn.

Er antall timer og lønn proporsjonale størrelser?



En eksamensoppgave

En type hårspray selgse i tre størrelser: Mini, Normal og Biggie.

Normal inneholder 400 mL og koster 160 kroner.

Mini inneholder 100 mL, og Biggie inneholder 600 mL.

Hvor mye ville Mini og Biggie kostet dersom pris og volum hadde vært proporsjonale størrelser?

Omvendt proporsjonale størrelser

Tenk at et beboerne i et lite borettslag med 6 familier skal kjøpe en ny trampoline, og at alle familiene som ønsker å benytte trampolina må være med på å betale for den. Jo flere som blir med på spleiselaget jo billigere blir det for hver enkelt familie. Prisen for trampolina er imidlertid den samme, uavhengig av hvor mange som ønsker å bruke den.

Dersom prisen per familie blir lavere jo flere som betaler, samtidig som prisen for trampolina forblir uendret, er dette et eksempel på det vi kaller **omvendt proporsjonale størrelser**.

Omvendt proporsjonale størrelser er to størrelser som varierer samtidig på en slik måte at

$$\frac{k}{x} = y$$

der k er et fast tall (en konstant).

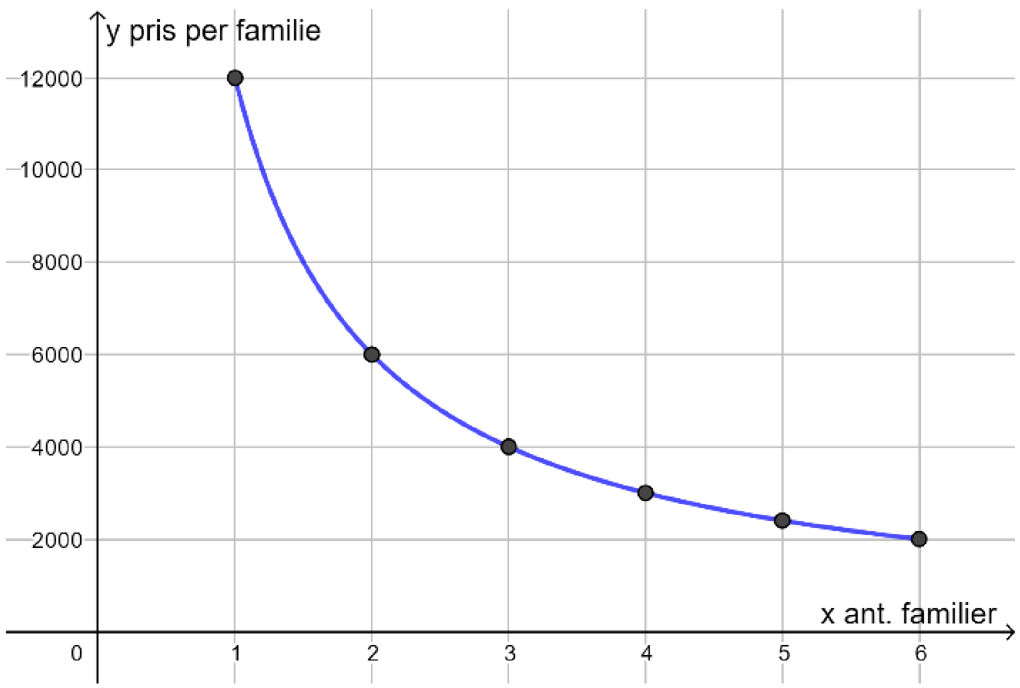
Dette kan også skrives som at $x \cdot y = k$

Vi kan teste om antall personer (x) og pris per familie (y) i eksempelet ovenfor er omvendt proporsjonale. Borettslaget finner en trampoline som koster kr 12 000 (k), og lager følgende oversikt:

Ant. familier	1	2	3	4	5	6
$\frac{k}{x} = y$	12 000	6 000	4 000	3 000	2 400	2 000
$x \cdot y = k$	12 000	12 000	12 000	12 000	12 000	12 000

Vi ser at x og y i dette eksempelet oppfyller kravene for å være omvendt proporsjonale størrelser.

Grafisk kan dette visualiseres slik:



Denne kurven er typisk for omvendt proporsjonale størrelser.

Oppgave 22

En trinn med 50 elever har leid et lokale til en Halloween - fest. Leien er 5 000 kroner.

a) Hva må hver elev betale hvis alle elevene deltar på festen?

Kall prisen per deltaker for y og antall deltakere for x.

b) Lag en formel som kan brukes til å regne y dersom det kommer x deltakere.
c) Bruk GeoGebra til å visualisere sammenhengen mellom antall deltakere og pris per deltaker. Finn noen interessante punkter.
d) Er x og y omvendt proporsjonale størrelser?

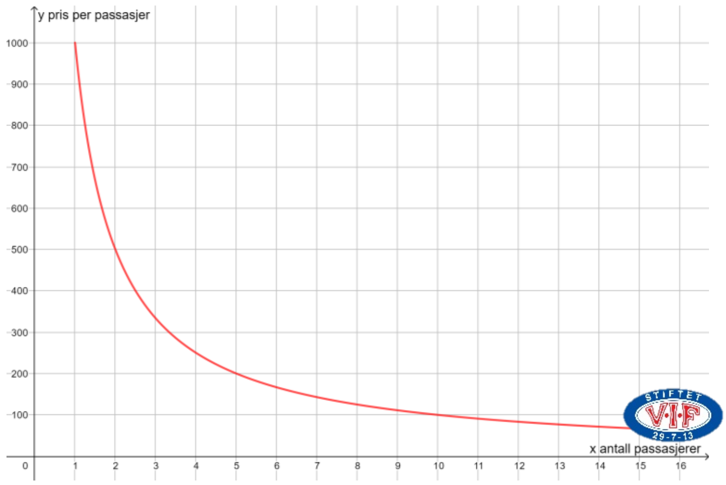
Oppgave 23

Tina betaler 400 kr for et dagskort i en alpinbakke.

a) En dag kjører hun 10 turer. Hva blir prisen per tur?
b) Bruk GeoGebra til å visualisere sammenhengen mellom antall turer og pris per tur. Bruk fornuftig avgrensning.
c) Forklar hvorfor prisen per tur er omvendt proporsjonal med antall turer.

Oppgave 24

Et taxiselskap tilbyr minibuss med fast pris fra Oslo til Gardermoen. Prisen per avhenger av antall passasjerer, som vist nedenfor:



a) Forklar hvorfor sammenhengen mellom antall personer og pris per person er omvendt proporsjonale størrelser.
b) Hvor høy er selskapets fastpris for strekningen Oslo – Gardermoen?
c) Noen har satt et fint klistremerke over grafen, og det går derfor ikke an å lese av hva hver enkelt passasjer må betale dersom 16 personer blir med på turen. Finn dette ved regning eller ved hjelp av GeoGebra.

Oppgave 25

En vennegjeng skal leie en hytte og finner to tilbud. De er usikre på hvor mange som blir med, så de lager en tabell for prisen per person med ulikt antall deltakere. Fyll ut de tomme rutene i tabellen.

Antall personer	1	3		10
Pris per person			700 kr	420 kr

Antall personer	1		5	
Pris per person		2000 kr	800 kr	400 kr

I hvilken rute kan vi finne prisen for leie av hytta?

En eksamensoppgave

Avgjør hvilken eller hvilke av påstandene nedenfor som er riktig(e).
Husk å begrunne svarene dine.

Påstand 1: Dersom utgiftene til en klassefest skal deles likt mellom elevene som er med på festen, vil beløpet hver ele må betale, alltid være omvendt proporsjonalt med antall elever.

Påstand 2: To størrelser er alltid proporsjonale dersom det er slik at når den ene øker, så øker den andre også.

Påstand 3: To størrelser er alltid omvendt proporsjonale dersom den ene størrelsen dobler seg når den andre halveres.

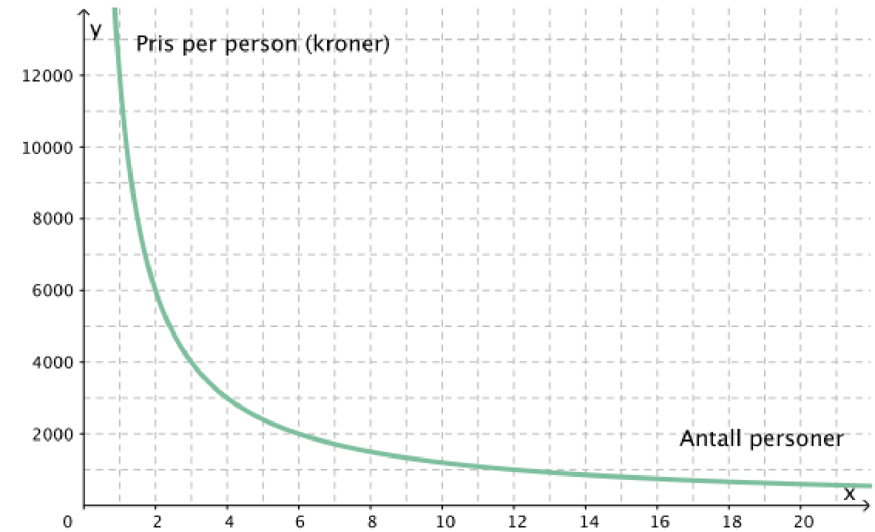
Påstand 4: Arealet av en sirkel er alltid proporsjonalt med omkretsen av sirkelen.

En eksamensoppgave

a) Gi et eksempel på to størrelser som er proporsjonale
b) Lag en grafisk fremstilling som viser sammenhengen mellom de to størrelsene

En eksamensoppgave

Et firma leier ut store hytter. Grafen til høyre viser prisen per person dersom x personer leier en hytte en uke.

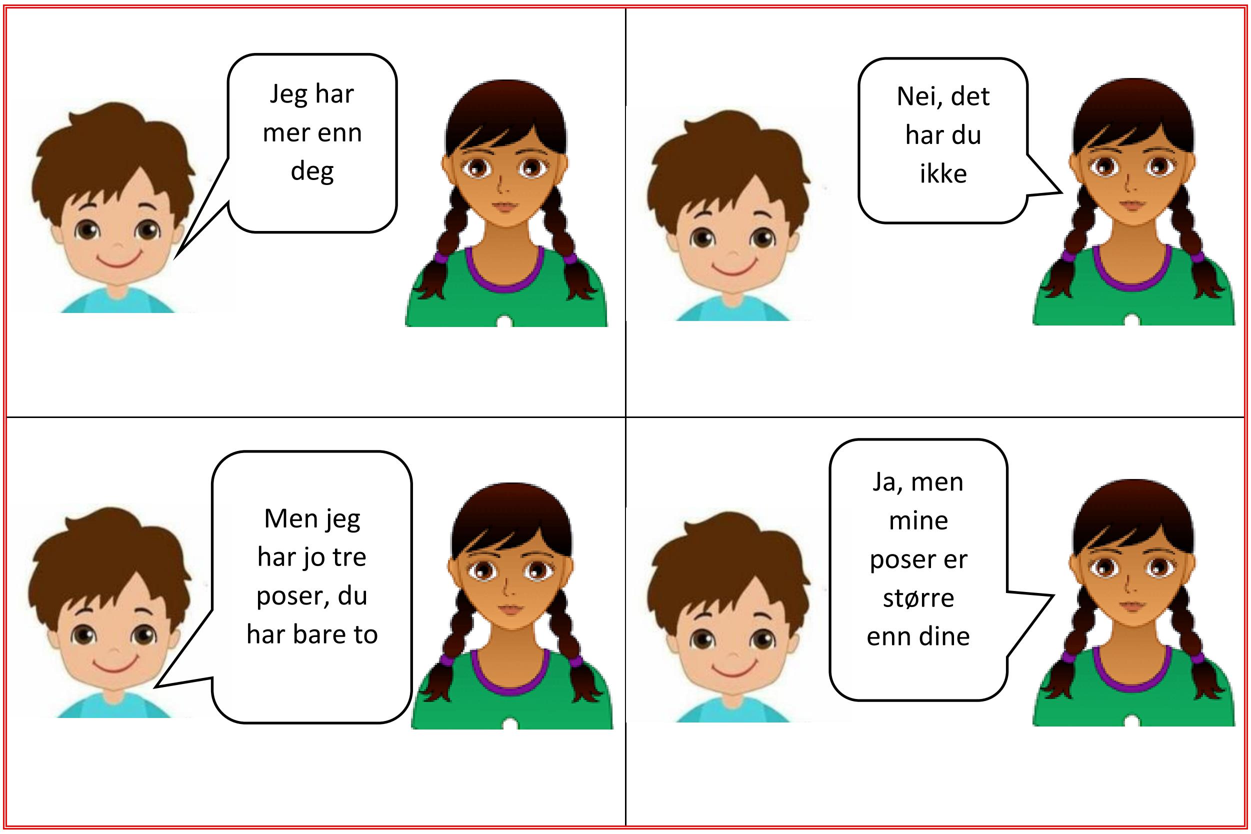


a) Hvor mye koster det å leie hytta en uke?

b) Forklar at antall personer og pris per person er omvendt proporsjonale størrelser.

c) Lag en formel som kan brukes for å finne prisen per person for å leie ei hytte

Enhet, prefiks og tierpotens



Samtalen i rutene ovenfor skal illustrere utfordringen ved å sammenligne mengder av ulik størrelse. Hvordan skal de avgjøre hvem som har mest når det de bruker til å sammenligne, i dette tilfellet poser, ikke er like store?

Når vi skal sammenligne mengder av ulik størrelse trenger vi en fast verdi eller en gitt størrelse. Dersom gutten og jenta i samtalen ovenfor hadde hatt like store poser ville det vært enklere å avgjøre hvem som har mest.

Dette kalles for måleenhet. Hvilken måleenhet vi bruker avhenger av hva vi skal måle. På neste side har vi presentert et utvalg av måleenheter, og hva de brukes til. Det finnes utallige måleenheter, og vi har ikke plass til alle. Vi har derfor valgt ut de måleenhetene vi tror du får mest bruk for.

Tabellen nedenfor viser et utvalg av standardiserte måleenheter. Det finnes mange, mange flere.

Når vi måler	bruker vi	som forkortes
Antall	Stykk	stk
Vekt	Gram	g
Lengde	Meter	m
Areal	Kvadratmeter	m^2
Volum	Liter eller kubikkmeter	L eller m^3
Penger	Kroner	kr
Tid	Sekund	sek eller s
Elektrisk effekt	Watt	W
Frekvens	Hertz	Hz
Energi i mat	Kilokalorier	kcal
Informasjon i datamaskin	Byte	B
Temperatur	Grader Celsius eller Fahrenheit	℃ eller ℉
Avstander i universet	Astronomisk enhet	AU

For å beskrive størrelsen til en mengde forteller vi hvor mange vi har av måleenheten tilhørende den mengden. For eksempel viser gradestokken at det 6 ℃ på Hellerud en dag i november, lengden av en fotballbane er 90 m, eller avstanden fra jorda til sola er 1 AU.

Dersom størrelsen til en mengde enten er veldig stor eller veldig liten kan tallet foran måleenheten bli langt, og kan være vanskelig å både lese og uttale. Skal vi måle lengden til New York eller størrelsen til et atom vil tallet foran meter bli omtrent uleselig. I slike tilfeller bruker vi enten **et prefiks** eller en **tierpotens**.

Et prefiks er ofte et latinsk ord for et tall, mens en **tierpotens** forteller hvor mange nuller en dekadisk enhet inneholder.

Et prefiks eller **en tierpotens** erstatter et bestemt antall nuller slik at tallet blir enklere å forstå.

Eksempel på tierpotens:

$1\,000 = 10^3$

Når vi forteller hvor mange vi har av en tierpotens kalles dette å skrive et tall på standardform.

Å skrive et tall på standardform betyr å fortelle hvor mange vi har av en tierpotens

Eksempel på standardform:

$4\,000 = 4 \cdot 1\,000 = 4 \cdot 10^3$

Dette tallet skal være større enn 1, og mindre enn 10.

$12\,000 = 1{,}2 \cdot 10\,000 = 1{,}2 \cdot 10^4$

Oppgave 26

Skriv på standardform:

a) 8 000 =
b) 30 000 =
c) 4 000 000 =

d) 8 500 =
e) 38 000 =
f) 4 250 000 =

Oppgave 27

Skriv på standardform:

a) 0,07 =
b) 0,0006 =
c) 0,0000002 =

d) 0,075 =
e) 0,00063 =
f) 0,00000024 =

Dekadisk enhet <-> tierpotens <-> prefiks

Dekadisk enhet	Tierpotens	Navn	Prefiks	Forkortes	
1 000 000 000 000	10^{12}	billion	Terra	T	
1 000 000 000	10^{9}	milliard	Giga	mrd.	G
1 000 000	10^{6}	million	Mega	mill.	M
1 000	10^{3}	tusen	kilo	k	
100	10^{2}	hundre	hekto	h	
10	10^{1}	ti	deka	dk	
1	10^{0}				
0,1	10^{-1}	tidel	desi	d	
0,01	10^{-2}	hundredel	centi	c	
0,001	10^{-3}	tusendel	milli	m	
0,000001	10^{-6}	milliondel	mikro	µ	
0,000000001	10^{-9}	milliarddel	nano	n	
0,000000000001	10^{-12}	billiondel	piko	p	

I tillegg bruker vi:

Mil = 10 km = 10 000 m

Tonn = 1 000 kg = 1 000 000 g

1 lysår = avstanden lyset tilbakelegger på ett år ≈ 9 500 000 000 000 km. $(9{,}5 \cdot 10^{15}\ m)$

Eksempel på praktisk bruk av prefiks og standardform

Jordens omkrets er beregnet til å være omtrent 40 000 000 meter. På en mer hensiktsmessig måte kan dette skrives som:
40 000 km, eller 4 000 mil, eller $4 \cdot 10^7$ m.

Rødt lys har en bølgelengde på omtrent 0,00000071 m. På en mer hensiktsmessig måte kan dette skrives som:
710 nanometer (710 nm) eller $7{,}1 \cdot 10^{-7}$ m.

Oppgave 28

Skriv størrelsene på en mer hensiktsmessig måte.

a) I en dL h-melk er det omtrent 0,0044 g natrium
b) En voksen blåhval kan veie opp mot 150 000 000 g
c) Størrelsen til et atom kan variere mellom 0,0000000001 m og 0,00000000005 m
d) Det lever omtrent 7 800 000 000 mennesker på jorda.
e) Man antar at vår galakse, Melkeveien, inneholder 300 000 000 000 stjerner
f) I 2020 kjøpte nordmenn omtrent 460 000 000 liter brus.

Oppgave 29

Finn egne eksempler på tall som har så høy verdi eller lav verdi at det er hensiktsmessig å skrive dem på standardform.

Skriv det du har funnet her:

Regneregler ved regning av tall på standardform

Regel	Eksempel
$10^x \cdot 10^y = 10^{x+y}$	$10^3 \cdot 10^4 = 10^{3+4} = 10^7$
$10^x : 10^y = 10^{x-y}$	$10^5 : 10^2 = 10^{5-2} = 10^3$
$\frac{10^x}{10^y} = 10^{x-y}$	$\frac{10^5}{10^2} = 10^{5-2} = 10^3$
$a \cdot 10^x \cdot b \cdot 10^y = a \cdot b \cdot 10^{x+y}$	$2 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^5 = 12 \cdot 10^8 = 1{,}2 \cdot 10 \cdot 10^8 = 1{,}2 \cdot 10^9$

Oppgave 30

Regn ut, og skriv svaret på standardform.

a) $10^3 \cdot 10^6 =$

b) $10 \cdot 10^3 =$

c) $10^4 \cdot 10^{-2} =$

d) $10^5 : 10^2 =$

e) $\frac{10^6}{10^2} =$

f) $10^3 : 10^5 =$

Oppgave 31

Regn ut, og skriv svaret på standardform.

a) $2 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^5 =$

b) $4 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^3 =$

c) $7 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^5 =$

d) $6 \cdot 10^4 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-2} =$

e) $\frac{6 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^2} =$

f) $\frac{8 \cdot 10^6}{4 \cdot 10^{-2}} =$

g) $9 \cdot 10^2 : (2 \cdot 10^5) =$

h) $2 \cdot 10^6 : (4 \cdot 10^2) =$

Eksempler på praktisk regning med tall på standardform

Det er anslagsvis 300 000 000 000 stjerner i Melkeveien. En teori sier at hver stjerne i solsystemet i gjennomsnitt har 3,5 planeter i omløp. Dersom det stemmer vil antall planeter i Melkeveien være:
$3{,}5 \cdot 3 \cdot 10^{11} = 10{,}5 \cdot 10^{11} = 1{,}05 \cdot 10^{12}$

Det lever omtrent 7 800 000 000 mennesker på jorda. Anta at gjennomsnittsvekten for en person er 40 kg. Jordas befolkning veier dermed:
$4 \cdot 10 \text{ kg} \cdot 7{,}8 \cdot 10^{9} = 4 \cdot 7{,}8 \cdot 10 \cdot 10^{9} \text{ kg} = 31{,}2 \cdot 10^{10} \text{ kg} = 3{,}12 \cdot 10^{11} \text{ kg}$

I 2015 måtte myndighetene i Paris fjerne alle hengelåsene som var hengt på brua Pont des Arts. Til sammen ble 45 tonn med hengelåser fjernet.

Dersom vi går ut fra at hver hengelås veier 50 g, ble så mange hengelåser fjernet:
$\frac{45 \text{ tonn}}{50 \text{ g per hengelås}} = \frac{45 \cdot 10^{6}\, g}{5 \cdot 10 \text{ g per hengelås}} = \frac{45}{5} \cdot \frac{10^{6}}{10} = 9 \cdot 10^{5}$ hengelåser

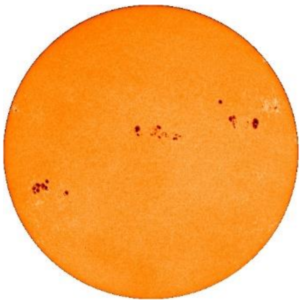
I alle oppgavene nedenfor skal du skrive svaret på standardform.

Oppgave 32

Anta at det drikkes 1 920 000 L kaffe i Norge hver dag, og at én kopp rommer 1,5 dL.
Hvor mange kopper drikkes det da i Norge hver dag?

Oppgave 33

I en kjøkkensvamp er det 40 milliarder bakterier per kubikkcentimeter. Svampen har et volum på 150 cm^3.
Hvor mange bakterier er det i hele svampen?



Oppgave 34

Solens volum er beregnet til å være omtrent $1{,}4 \times 10^{18}$ km^3. Planeten Uranus, som er solsystemets nest største planet, har et volum på omtrent $7 \cdot 10^{13}$ km^3.

Hvor mange ganger større er Solen enn Uranus?

En eksamensoppgave

En dag i juni 2020 var verdien av oljefondet $1{,}0417 \cdot 10^{13}$ kroner.
Samme dag var det $5{,}372 \cdot 10^6$ innbyggere i Norge.

Tenk deg at pengene i oljefondet ble delt likt mellom alle innbyggerne i Norge denne dagen.

Hvor mange kroner ville det da blitt til hver?

Eksempler på praktisk regning med prefiks

En trener skal blande saft til fotballaget sitt, som består av 25 spillere.
Treneren beregner 2 dL ublandet saft til hver spiller. Til sammen trenger treneren:
25 · 2 dL saft = 50 dL saft = 5 L saft.

Et voksent menneske bør innta 30 g kostfiber hver dag.
1 (grov) brødskive inneholder 2,5 g kostfiber. For å dekke sitt dagsbehov må et voksent menneske spise:
$\frac{30\ g}{2{,}5\ g}$ = 12 brødskiver

På en butikk koster 400 gram kjøttdeig 49 kroner. Prisen per kilogram, som ofte uttales pris per kilo blir da:

$\frac{49\ kr}{400\ g} \cdot 1000\ g$ = 122,50 kr/kg

En eksamensoppgave

300 g grillgrønnsaker koster 39 kroner.

Bestem prisen per kilogram.

En eksamensoppgave

En kopp med 220 mL cappuccino koster 22 kroner.

Hvor mye koster cappuccinoen per liter?

Oppgave 35

100 g Tine appelsinjuice har følgende næringsinnhold

Data	Mengde	Enhet
KJ	188	kilojoule
Kcal	44.9	kalorier
Protein	0.7	gram
Karbo	9.1	gram
Sukker	9.1	gram
Kostfiber	1	gram

I tillegg inneholder 100 g Tine appelsinjuice 20 mg C-vitaminer, som er 25 % av anbefalt daglig inntak av C-vitaminer for et voksent menneske.

Ett glass juice regnes som 2 dL som er omtrent 200 g juice.

a) Hvor mange glass juice må et voksent menneske drikke dersom det ønsker å få dekket det daglige behovet for C-vitaminer gjennom å drikke juice?

På helsedirektoratet.no kan vi lese følgende om inntak av sukker per dag:

> *Det anbefales at inntaket av sukker begrenses til 60 – 70 gram for menn og 50 – 55 gram for kvinner.*

b) Hva utgjør svaret du fikk i a) for den anbefalte øvre grensen for daglig inntak av sukker?

c) Finn næringsinnholdet til en annen drikke, og gjør samme beregning for den drikken.

En eksamensoppgave

Amalie skal lage appelsinsyltetøy og vil følge oppskriften til høyre.

Hun har et målebeger. Det viser at 1 L sukker har masse 0,8 kg.

Amalie skal bruke 26 kg appelsiner.
En pose sukker inneholder 1 kg.

Hvor mange poser sukker må hun minst kjøpe?

APPELSINSYLTETØY

1 kg appelsiner

1 sitron

1 grapefrukt

5 dL sukker

5 dL vann

En eksamensoppgave

Ved en temperatur på 22 ℃ veier 1 L olje 0,9124 kg.

a) Hvor mange gram veier 10 mL av oljen ved denne temperaturen?

Oljen i et beger veier 556,6 g ved en temperatur på 22 ℃.

b) Hvor mange desiliter olje er det i begeret?

En eksamensoppgave

Energiinnholdet i matvarer blir vanligvis oppgitt i kilojoule (kj) eller kilokalorier (kcal).

Tabellen viser eniergiinnholdet i noen næringsstoffer

Næringsstoff	Kilojoule (kJ) per gram	Kilokalorier (kcal) per gram
Fett	37	9
Protein	17	4
Karbohydrater	17	4

Tobias har lest at 100 g kokt egg inneholder 10,2 g fett, 12,4 g protein og 0,3 g karbohydrater.

Resten av egget er vitaminer og vann, som ikke inneholder energi.

a) Hva er energiinnholdet i 100 g kokt egg? Oppgi svaret i kcal

Tobias har funnet ut at han har et energibehov på 3000 kcal per dag. En dag spiser han 2 egg. Eggene veier til sammen 125 g med skall. Den spiselige delen av et egg er 88 % av totalvekten til egget.

b) Hvor mange prosent av Tobias sitt daglige energibehov utgjorde eggene han spiste denne dagen?

Tid- regning mellom to tallsystem

Mange av tidsenhetene vi bruker er bygd opp i 6-tallsystemet. For eksempel er det:

- $6 \cdot 10$ minutter i en time
- $6 \cdot 4$ timer i et døgn
- $6 \cdot 2$ måneder i et år
- $6 \cdot 61$ dager i et år (omtrent)

Dersom vi skal utføre regning med ulike enheter, må enhetene være bygd opp i det samme tallsystemet. Vi må derfor beherske å gjøre tidsenhetene om til 10-tallsystemet.

Alle tidsenheter kan gjøres om til 10-tallsystemet, men vi skal konsentrere oss om å gjøre minutter om til **desimaltimer** (som forteller hvor stor del av en time minuttene utgjør). Dette trenger vi når vi senere skal regne hastighet.

Vi benytter oss av følgende regler:

Skal du gjøre om minutter til timer må du dividere antall minutter på 60. Eksempel: 15 minutter til timer. 15 minutter = $\frac{15}{60}$ timer = 0,25 timer	Skal du gjøre om timer til minutter må du multiplisere antall timer med 60. Eksempel: 0,8 timer til minutter. 0,8 timer = $(0{,}8 \cdot 60)$ min. = 48 minutter

Oppgave 36

a) Hvor stor del av en time utgjør 45 minutter?

b) Hvor stor del av en time utgjør 24 minutter?

c) Hvor mange minutter er 0,6 timer?

d) Hvor stor del av en time utgjør 20 minutter?

e) Hvor mange minutter er 0,45 timer?

f) Omtrent hvor mange minutter er 0,72 timer?

g) Hvor stor del av en time utgjør 12 minutter?

Oppgave 37

Det er kun minuttene vi omgjør til desimaltimer (hele timer er hele timer uavhengig av tallsystem).

a) Skriv 2 timer og 45 minutter som desimaltimer

b) Skriv 1 time og 20 minutter som desimaltimer

c) Skriv 1,8 timer som timer og minutter

d) Skriv 3,6 timer som timer og minutter

e) Skriv 4 timer og 24 minutter som desimaltimer

f) Skriv 5,25 timer som timer og minutter

Oppgave 38

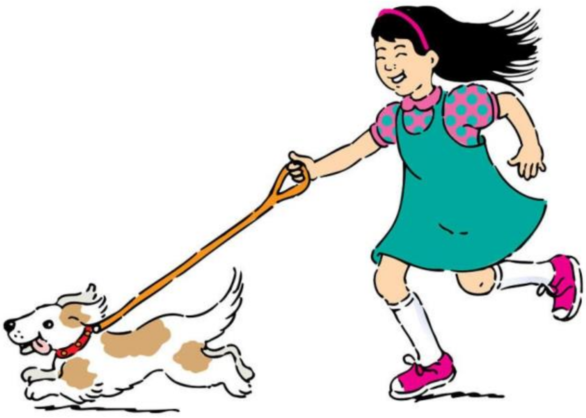
Toget fra Oslo S kjører kl. 13.34, og ankommer Trondheim kl. 21.10.

Hvor mange timer varer togturen?

Oppgave 39

En hundeeier går tur med hunden sin. Turen starter kl. 12.45 og varer i 1,4 timer.

Hvor mye hadde klokka blitt da turen var over?



Fart – regning med sammensatte enheter

Om vi ønsker å angi raskt et objekt beveger seg må vi både måle **lengden** objektet beveger seg og hvor lang **tid** objektet bruker på denne lengden.

Lengdeenheten vi bruker er som regel **km** eller **m**, og tidsenheten er som regel **time** eller **sekund**.

Når vi skal beskrive farten til et objekt må vi utføre regnestykket

$$\frac{lengde}{tid}$$

Dersom vi har målt lengden i **km** og tid i **time** blir fartsenheten **km/t** (km per time). Dersom vi har målt lengden i **m** og tid i **sekunder** blir fartsenheten **m/s** (meter per sekund).

Vi kan regne mellom **km/t** og **m/s** med forholdstallet 3,6. Hvorfor?

$$\frac{km}{time} = \frac{1\ 000\ m}{3\ 600\ sek} = \frac{1\ m}{3{,}6\ sek}$$

Det betyr at dersom en bil kjører i 50 km/t kjører den

$$\frac{50}{3{,}6} \approx 14 \text{ m/s}$$

Det betyr i tillegg at vindstyrke som måles til 8 m/s også kan beskrives som

$$8 \cdot 3{,}6 \approx 29 \text{ km/t}$$

Oppgave 40

Usain Bolt innehar verdensrekorden på 100 meter med tiden 9,58.

a) Hvor høy var gjennomsnittsfarten på dette løpet målt i **m/s**?
b) Hvor høy var gjennomsnittsfarten på dette løpet målt i **km/t**?

Oppgave 41

Avstanden mellom Oslo og Trondheim er 392 km. Flytiden mellom disse byene er 45 minutter.

a) Hvor høy er gjennomsnittsfarten til flyet på denne turen?

Avstanden mellom Oslo og Tromsø er 1150 km. På en slik tur er gjennomsnittsfarten ca. 690 km/t.

b) Hvor lang tid vil flyturen være på denne strekningen? Angi svaret på formen timer og minutter

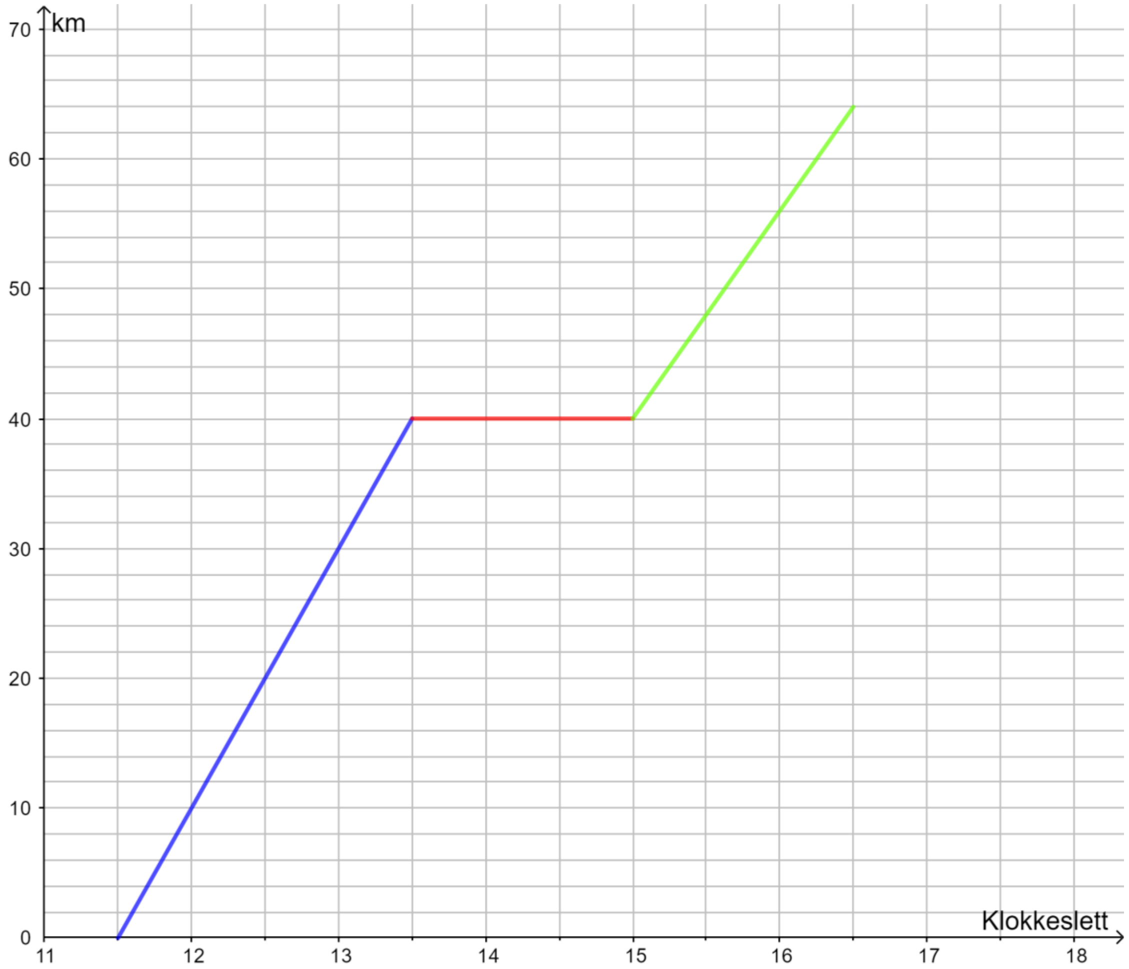
Marsjfarten til en Boeing 767 er på 851 km/t.

c) Hvor langt kommer et slikt fly på 2 timer og 30 minutter?

Oppgave 42

Stian syklet hjem fra bestemoren sin. På veien hjem stoppet han ved et vann for å bade og spise lunsj.

Stian visualiserte sykkelturen sin slik:



Gjør nødvendige beregninger, og lag en beskrivelse av farten Stian holdt på sykkelturen.

Oppgave 43

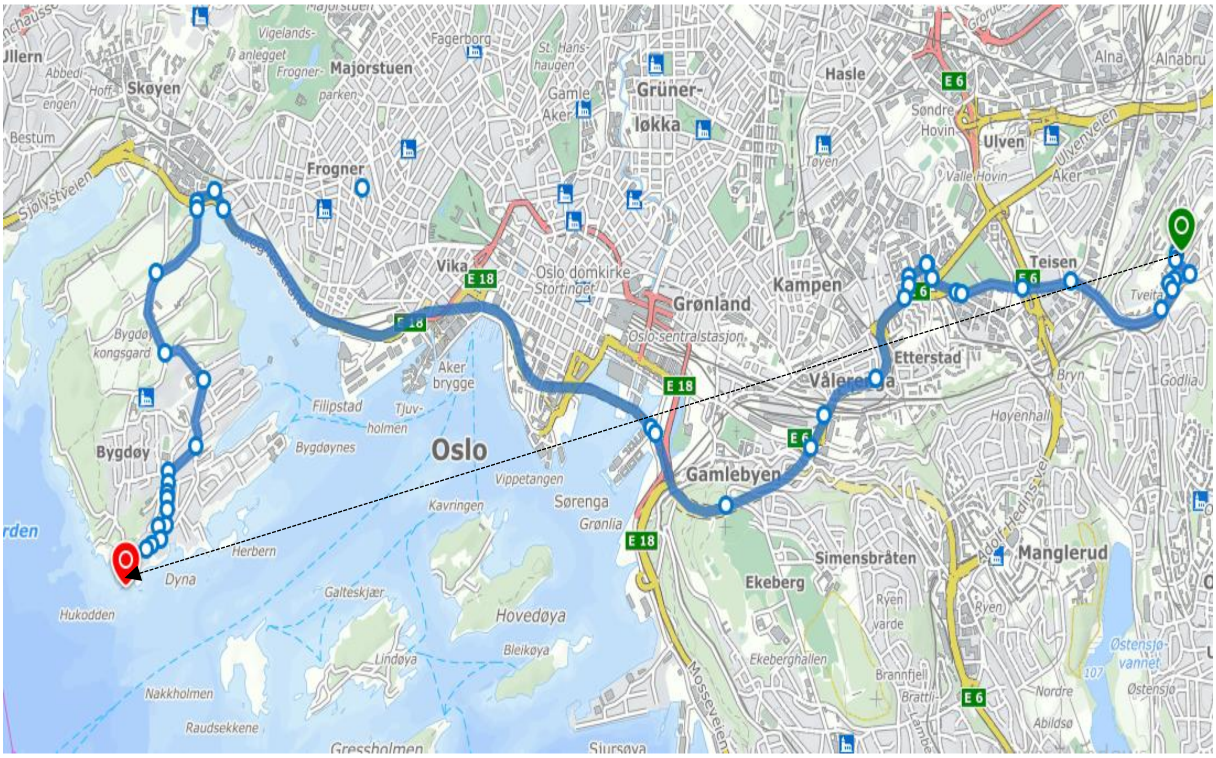
En buss kjører fra Oslo bussterminal til Kristiansand, med avgang kl. 12.10. Kjørelengden er 320 km, og bussen holder en gjennomsnittsfart (inkludert pauser) på 68 km/t.

Når ankommer bussen Kristiansand?

Presentasjonsoppgave

En av miljøarbeiderne på Hellerud vgs. ønsker å ta med en gruppe elever på en sykkeltur til Huk (strand).

Miljøarbeideren finner et kart over Oslo med målestokk 1 : 75 000, og måler avstanden i luftlinje (den sorte linja) mellom Hellerud vgs. og Huk til å være 20 cm. Se kartet nedenfor:



Miljøarbeideren antar at de kan sykle med en gjennomsnittsfart på 15 km/t, og ønsker at de skal være fremme kl. 10.00. Den blå linja i kartet angir veien de skal sykle.

Gjør en vurdering av når de bør dra fra Hellerud vgs. for å være på Huk kl. 10.00.

Løsningsforslag

Oppgave 1

a) 100 er 4 ganger større enn 25, mens 25 er $\frac{1}{4}$ av 100.

b) 9 er 3 ganger større enn 3, mens 3 er $\frac{1}{3}$ av 9.

c) 200 er 8 ganger større enn 25, mens 25 er $\frac{1}{8}$ av 200.

d) 5000 er 2500 ganger større enn 2, mens 2 er $\frac{1}{2500}$ av 5 000.

e) 6 er 1,5 ganger større enn 4, mens 4 er $\frac{2}{3}$ av 6.

f) 11 og 5. Svar: 11 er 2,2 ganger større enn 5, mens 5 er $\frac{5}{11}$ av 11

Oppgave	Svar	Oppgave	Svar
2	10,43 kr/euro	**5**	8,76 kr/dollar
3	1 : 10 000 000	**6**	20 km/t
4	Omtrent 2,08	**7**	65 km/t

Eksamensoppgave, side 56

$\frac{60\ km}{4\ cm} = \frac{6\ 000\ 000\ cm}{4\ cm} = 1\ 500\ 000$ Kartets målestokk er 1 : 1 500 000

Oppgave	Svar	Oppgave	Svar
8	a) 0,8 L b) 3,75 L	**17**	Antall ruller og pris er ikke proporsjonale størrelser
9	a) 62,8 cm b) 22 cm c) Nei.		
10	a) 144 cm b) Ja (omtrent)	**18**	*F* og *t* er proporsjonale størrelser
11	a) 6 km b) 5,8 cm		
12	a) ≈ 36 dollar b) ≈ 1 255 kr	**19**	a) Timelønna er alltid 120 kr b) 1 140 kroner
13	a) 105 km b) 4,5 timer		
15	a) Ja b) Tid og avstand er proporsjonale størrelser frem til de har kjørt 3 timer	**20**	Minste: 154,50 kr. Største: 1 030 kr.
		21	Antall timer og lønn er ikke proporsjonale størrelser
16	Antall egg og pris er ikke proporsjonale størrelser		

Eksamensoppgave, side 66

Løsning 1

$$\frac{160}{4} = 40$$

Mini ville kostet 40 kr.

$$40 \cdot 6 = 240$$

Biggie ville kostet 240 kroner.

Løsning 2

1 $\frac{160}{400}$

$\approx$ **0.4**

2 0.4 · 100

$\rightarrow$ **40**

3 0.4 · 600

$\rightarrow$ **240**

Mini ville kostet 40 kroner.
Biggie ville kostet 240 kroner.

<table>
<tr><th>Oppgave</th><th>Svar</th><th>Oppgave</th><th>Svar</th></tr>
<tr><td>22</td><td>a) 100 kr. b) $y = \frac{5\,000}{x}$ d) Ja.</td><td rowspan="2">24</td><td rowspan="2">a) Jo flere passasjerer jo lavere pris per person. b) 1 000 kr c) 62,50 kr</td></tr>
<tr><td>23</td><td>a) 40 kr c) Fordi pris per tur blir lavere jo flere turer hun kjører.</td></tr>
</table>

Oppgave 25

Antall personer	1 Pris for leie	3	6	10
Pris per person	4 200 kr	1 400 kr	700 kr	420 kr

Antall personer	1 Pris for leie	2	5	10
Pris per person	4 000	2000 kr	800 kr	400 kr

Eksamensoppgave, side 71

Påstand 1 er riktig: $prisperelev = \frac{totalutgift}{Antallelever}$

Påstand 2 er feil: x og x^2 er eksempler på størrelser der dersom x øker så øker kvadratet av x også, men de er ikke propirsjonale.

Påstand 3 er riktig: $y = \frac{k}{x}$, om vi dobler x : $y = \frac{k}{2x}$, halveres y.

Påstand 4 er feil: Forholdet mellom areal og omkrets vil være: $\frac{A}{O} = \frac{\pi r^2}{s\pi r} = \frac{r}{2}$. Dette forholdet er ikke konstant, men varierer med r. Derfor ikke proporsjonalitet.

Eksamensoppgave, side 71

a) Ved avlesning av grafen kan vi se at 2 personer betaler 6 000 kr hver. Utfra dette kan vi regne at det koster (2 · 6 000) 12 000 kroner å leie hytta.

b) Antall personer og pris per person er omvendt proporsjonale, fordi pris per person kan regnes ved hjelp av formelen $y = \frac{k}{x}$.

c) $Pris\ per\ person = \frac{12\ 000\ kr}{antall\ personer}$

Oppgave	Svar	Oppgave	Svar
26	a) $8 \cdot 10^3$ b) $3 \cdot 10^4$ c) $4 \cdot 10^6$ d) $8{,}5 \cdot 10^3$ e) $3{,}8 \cdot 10^4$ f) $4{,}25 \cdot 10^6$	**30**	a) 10^9 b) 10^4 c) 10^2 d) 10^3 e) 10^3 f) 10^{-2}
27	a) $7 \cdot 10^{-2}$ b) $6 \cdot 10^{-4}$ c) $2 \cdot 10^{-7}$ d) $7{,}5 \cdot 10^{-2}$ e) $6{,}3 \cdot 10^{-4}$ f) $2{,}4 \cdot 10^{-7}$	**31**	a) $6 \cdot 10^8$ b) $2 \cdot 10^7$ c) $4{,}2 \cdot 10^9$ d) $1{,}5 \cdot 10^3$ e) $3 \cdot 10^3$ f) $2 \cdot 10^8$
28	a) $4{,}4 \cdot 10^{-3}$ g eller 4,4 mg b) $1{,}5 \cdot 10^8$ g eller 150 tonn c) 10^{-10} til $5 \cdot 10^{-10}$ eller 0,1 nm til 0,5 nm d) $7{,}8 \cdot 10^9$ eller 7,8 mrd e) $3 \cdot 10^{11}$ eller 300 mrd f) $4{,}6 \cdot 10^8$ L eller 460 millioner L	**32**	g) $4{,}5 \cdot 10^{-3}$ h) $5 \cdot 10^3$ $\approx 1{,}3 \cdot 10^7$ kopper = 13 mill. kopper
		33	$6 \cdot 10^{13}$ bakterier = 60 billioner bakt.
		34	$2 \cdot 10^4$ = 20 000 ganger større

Eksamensoppgave side 79

Løsning 1

1 $\frac{1.0417 \cdot 10^{13}}{5.372 \cdot 10^6}$

$\approx$ **1939128.82**

Det ville blitt 1,939· 10^6 kroner til hver.

Løsning 2

$1{,}0417 \cdot 10^{13} = \underline{10{,}417 \cdot 10^{12}}$

$\frac{10^{12}}{10^6} = \underline{10^6}$

$\frac{10{,}417}{5{,}372} \approx \underline{1{,}939}$

Det ville blitt 1,939· 10^6 kroner til hver.

Eksamensoppgave side 80

Løsning 1

$1 \text{ kg} = 3 \cdot 300 \text{ g} + 100 \text{ g}$

$3 \cdot 39 + \frac{1}{3} \cdot 39 = \underline{130}$

1kg grillgrønnsaker koster 130 kroner.

Løsning 2

Jeg finner først ut hvor mye 1 gram koster:

$\frac{39,00}{300} = \underline{0,13}$

$0,13 \cdot 1000 = \underline{130}$

$1000 \text{ g} = 1 \text{ kg}$

1 kg grillgrønnsaker koster 130 kroner.

Eksamensoppgave side 80

Svar: 100 kroner.

Begrunnelse: Her er det mange måter å tenke på, men for eksempel: 22 kroner for 220 mL cappuccino gir 10 kroner for 100 mL cappuccino. I 1 liter er det 1000 mL. Hvis 100 mL cappuccino koster 10 kroner, vil da 1 liter (1000 mL) koste 100 kroner.

Oppgave	Svar
35	a) 2 glass b) M ≈ 50 %, K ≈ 70 %

Eksamensoppgave side 81

Løsning 1

I oppskriften står det at Amalie trenger 5 dL sukker til 1 kg appelsiner.
Amalie skal bruke 26 kg appelsiner.

$26 \cdot 5 = 130$

Amalie trenger 130 dL sukker.
130 dL = 13 L

1 L sukker har masse 0,8 kg.

$13 \cdot 0,8 = 10,4$

Amalie må minst kjøpe 11 poser med sukker.

Løsning 2

1 L sukker har masse 0,8 kg
5 dL sukker har masse 0,4 kg

Appelsiner (kg)	Sukker (kg)
1	0,4
26	x

1 $\frac{1}{26} = \frac{0.4}{x}$

NLøs: $\{x = 10.4\}$

Amalie må kjøpe minst 11 poser med sukker.

Eksamensoppgave side 82

a) 1 L olje = 0,9124 kg. | dividerer begge sider med 1000
1 mL olje = 0,9124 g | multipliserer begge sider med 10
10 mL olje = 9,124 g

b) 1 dL olje = 91,24 g
Mengde olje er ukjent. Kaller dette for x.
91,24 g $\cdot$ x dL = 556,6 g | dividerer begge sider med 91,24
$x \approx$ 6,1
Det er omtrent 6,1 dL olje i begeret.

Eksamensoppgave side 82

a)

Energiinnhold i 100 gram kokt egg:

Energi fra fett + energi fra protein + energi fra karbohydrater = $(9 \cdot 10,2 + 4 \cdot 12,4 + 4 \cdot 0,3)kcal = 142,6kcal$

b)

Gram spiselig: $125g \cdot 0,88 = 110g$

Energi: $1,1 \cdot 142,6 = 156kcal$

Hvilket utgjør ca 5 % av dagsbehovet.

Oppgave	Svar	Oppgave	Svar
36	a) 0,75 t b) 0,4 t c) 36 min d) 0,33 t e) 27 min f) Omtrent 43 min g) 0,2 t	39	14.09
		40	a) 10,44 m/s b) ≈ 38 km/t
		41	a) 522 km/t b) 1t 40 min c) 2 127 km
37	a) 2,75 t b) 1,33 t c) 1 t 48 min d) 3 t 36 min e) 4,4 t f) 5 t 15 min	43	16.52
38	7 t og 36 min = 7,6 timer		

Sammenheng og utvikling

Målet for opplæringen er at eleven skal kunne:

- tolke og bruke funksjoner i matematisk modellering og problemløsing
- planlegge, utføre og presentere selvstendig arbeid knyttet til modellering og funksjoner innenfor samfunnsfaglige tema
- bruke digitale verktøy i utforsking og problemløsing knyttet til egenskaper ved funksjoner, og diskutere løsningene
- modellere situasjoner knyttet til tema fra samfunnsliv og arbeidsliv, presentere og argumentere for resultatene og for når modellene er gyldige

Sammenheng mellom størrelser

I dette kapittelet vil vi bruke en del begreper som det er viktig at du forstår. Disse begrepene er markert med **fet skrift**, og du må be om forklaring dersom du leser et begrep som du ikke husker hva betyr.

Størrelse er et slikt begrep. Med **størrelse** mener vi noe som kan beskrives ved hjelp av tall, og eksempel på en **størrelse** kan være:

- Befolkning
- Penger
- Vekt
- Alder
- Avstand
- Volum

Dersom to **størrelser** henger sammen, kan vi beskrive denne **sammenhengen** ved hjelp av **funksjoner** eller **modeller**.

Funksjoner** og **modeller** beskriver **sammenhengen** mellom to **størrelser

For å beskrive **sammenhengen** mellom to **størrelser**, kan vi bruke:

- **Tekst**
- **Tabell**
- **Funksjonsuttrykk, modell eller formel**
- **Graf**

I teoretisk matematikk er det vanlig å erstatte **størrelsene** med bokstavene x og y.

For at en **sammenheng** skal kunne beskrives ved hjelp av **funksjoner**, er det et krav om at **endring** i **verdien** til **størrelse** x fører til en **endring** i **verdien** til **størrelse** y.

Dersom dette er tilfelle, sier vi at y er en funksjon av x.

y *er en **funksjon** av* x *dersom **endring** i* x *fører til **endring** i* y

Det er denne **endringen** vi kaller **utvikling**; hva skjer med y når x øker?

Utvikling beskrevet med ulike typer modeller

Når vi skal beskrive **utviklingen** i y- **verdier** når x øker, kan vi beskrive dette ved hjelp av forskjellige typer **modeller**.

Nedenfor finner du en beskrivelse over de fire **modellene** som er pensum for dette kurset.

Modell	Funksjonsuttrykk	Beskriver
Lineær	$y = ax + b$	Endring med et fast tall
Eksponentiell	$y = a \cdot b^x$	Endring med en fast prosent
Potens	$y = a \cdot x^b$	
Polynom	Den høyeste eksponenten avgjør graden.	Den eneste **modellen** hvor endring i y- **verdi** kan være både positiv og negativ.
2. grad	$y = ax^2 + bx + c$	
3. grad	$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$	
4. grad	$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$	

Det skal komme klart frem i oppgaven hvilken **modell** du skal velge. Dette kan enten opplyses ved navn, **funksjonsuttrykk** eller en beskrivelse av **utviklingen.**

Felles for alle **modellene** er at de beskriver en **utvikling** med tre ulike innfallsvinkler:

- En nøyaktig representasjon utfra **punkter**
- En tilnærmet representasjon utfra **punkter**
- Utfra et **funksjonsuttrykk**

Dersom **utviklingen** er beskrevet gjennom et **funksjonsuttrykk**, er **funksjonen** som regel avgrenset til å være **gyldig** for en viss mengde x- **verdier.** Dette kalles **definisjonsmengden** for **funksjonen**, og skrives slik inn i GeoGebra:

$$funksjonsuttrykk, start \le x \le slutt$$

Dersom **utviklingen** er beskrevet gjennom **punkter**, må du skrive **punktene** inn i regnearket til GeoGebra. Deretter må du gjennomføre en regresjonsanalyse for å få frem den **modellen** du ønsker. I slike tilfeller blir du ofte bedt om å vurdere **modellens gyldighetsområde**.

Lineær utvikling: $y = ax + b$

Dersom y **endres** *fra* et startpunkt *med* et fast tall for hver gang x øker med 1, sier vi at **utviklingen** er **lineær**. Både startpunktet og det faste tallet har en praktisk betydning, og du vil bli bedt om å kommentere begge.

Lineær utvikling utfra punkter

Tenk deg at en lærer gjorde følgende demonstrasjon foran elevene sine:

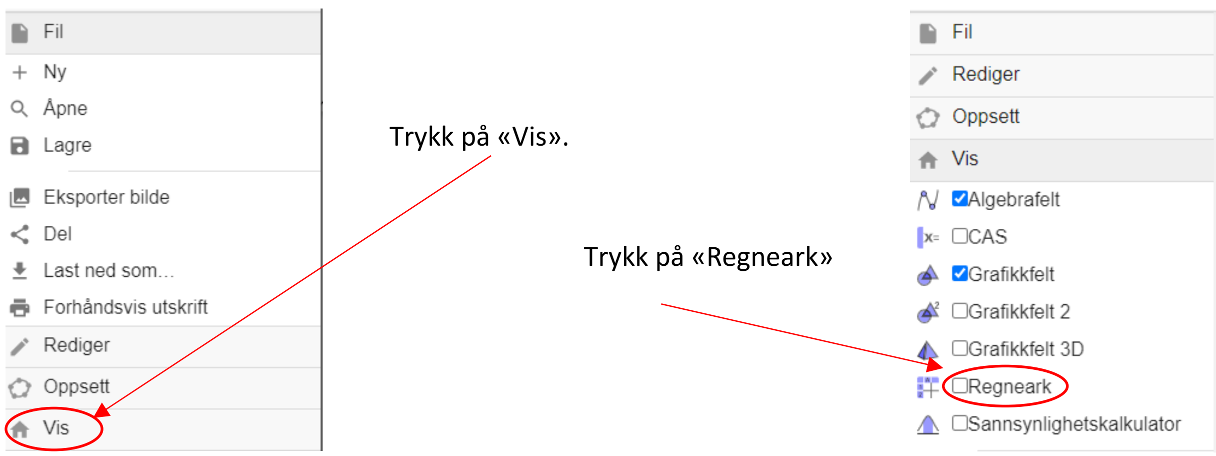
Læreren hadde med seg en pappkopp, en bunke med 30 identiske terninger og en vekt. Læreren nullstilte vekta og plasserte deretter pappkoppen på vekta.

Læreren la et ulikt antall terninger i koppen, og noterte den samlede vekten av terninger + koppen i **tabellen** nedenfor.

Utstyr:	Antall terninger (x)	Samlet vekt i gram (y)
	1	17
	4	32
	7	47
	10	62

Klarer du utfra **tabellen** å finne ut vekten til pappkoppen, og vekten av hver enkelt terning? Det kan godt hende du allerede har funnet svaret på dette spørsmålet. Likevel skal vi vise hvordan du kan bruke GeoGebra til å finne denne informasjonen.

Steg 1 – åpne regnearket i GeoGebra



Steg 2 – skriv inn punktene fra tabellen

	A	B
1	1	17
2	4	32
3	7	47
4	10	62

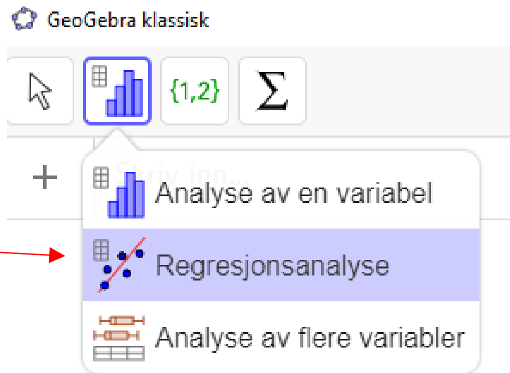
Vi skriver x- **verdiene** i A-kolonnen, og y-**verdiene** i B-kolonnen

Steg 3 – marker punktene og lag en regresjonsanalyse

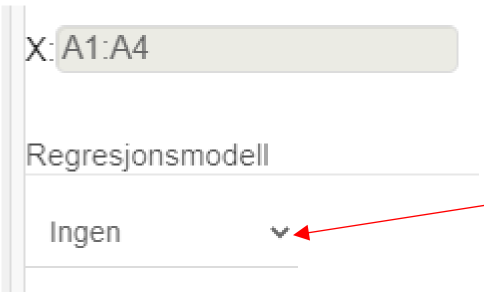
	A	B
1	1	17
2	4	32
3	7	47
4	10	62
5		

Marker tallene

Trykk på «Regresjonsanalyse

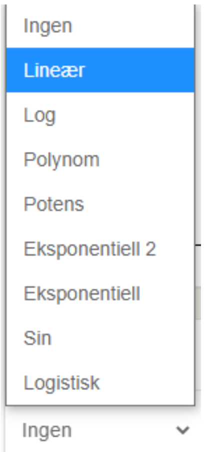


Steg 4 – velg riktig modell

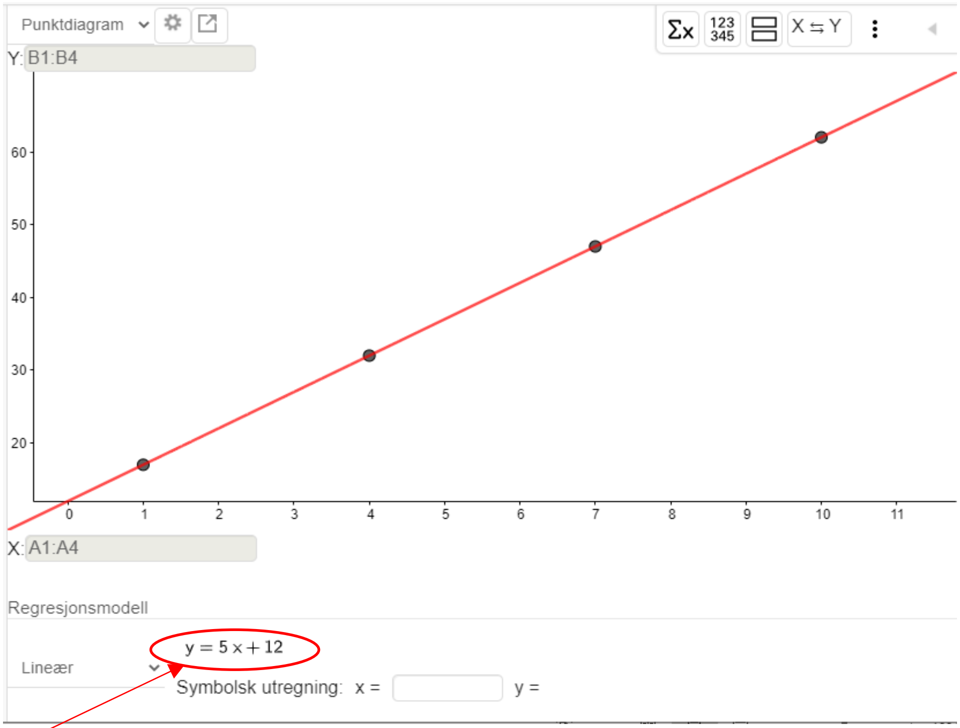


Trykk på denne pila

Velg «Lineær»



Dermed får du opp dette bildet:



Her er **modellen**, eller **funksjonsuttrykket**, som skal hjelpe oss til å finne informasjonen som ble etterspurt. Hva betyr så dette **funksjonsuttrykket**?

Vi har følgende **sammenheng** mellom antall terninger + koppen, og den samlede vekten:

$$samlet\ vekt = vekt\ per\ terning\ \cdot antall\ terninger + koppens\ vekt$$

I tabellen på side 103 har vi definert y som samlet vekt, og x som antall terninger. Vi kan derfor beskrive **sammenhengen** mellom antall terninger +koppen, og den samlede vekten slik:

$$y = vekt\ per\ terning\ \cdot x + koppens\ vekt$$

Regresjonsanalysen i GeoGebra ga oss følgende **modell** på formen $y = ax + b$:

$$y = 5x + 12$$

Dette betyr at hver terning veier 5 gram, mens koppen veier 12 gram.

Dermed kan vi si at den samlede vekten starter på 12 gram, og øker med 5 gram for hver terning.

12 er **funksjonens** startpunkt. Dette kalles **funksjonens konstantledd**, og forkortes b
5 er **funksjonens endringsverdi**. Dette kalles **funksjonens stigningstall**, og forkortes a

Oppgave 1

En lærer har med seg en eske med 20 identiske penner, en kopp og en vekt. Læreren plasserer koppen på vekta, og måler den samlede vekten av noen penner og koppen. Resultatet fra målingen finner du i tabellen nedenfor:

Antall penner	4	9	12
Gram samlet vekt	230	330	390

Hva i oppgaveteksten er det som avgjør at dette er en lineær modell? Bruk tallene i tabellen til å lage en lineær modell som beskriver sammenhengen mellom antall penner og den samlede vekten.

Bruk modellen du laget til å finne:

- Hvor mye hver penn veier
- Hvor mye koppen veier

Oppgave 2

En nyåpnet videregående skole presenterte følgende elevtall for to utvalgte år etter oppstart:

År etter oppstart	1	3
Elevtall	620	650

Skolens ledelse antar at utviklingen i skolens elevtall kan beskrives med en lineær modell, som er gyldig i noen år fremover.

Bruk tallene i tabellen til å lage en modell som kan brukes til å beskrive utviklingen i skolens elevtall. Hva forteller modellen om antall elever ved skolens oppstart, og den årlige økningen i skolens elevtall?

Oppgave 3

I dag er det 280 kaniner innenfor et avgrenset område. Anta at en sykdom brer seg blant kaninene, og at det om 20 måneder bare vil være 40 kaniner igjen i området.

Bruk informasjonen i teksten ovenfor til å lage en modell som viser hvor mange kaniner det vil være om x måneder dersom antallet avtar lineært.

Hva forteller modellen om den månedlige nedgangen i antall kaniner?

Modellens gyldighetsområde

Ytterst få **modeller** brukt i praktiske situasjoner er **gyldige** for alle x- **verdier.** Kanskje er det noen begrensninger som gjør at **modellen** har en nedre eller øvre grense. Kanskje er det slik at **modellen** bli mer usikker etter hvert som x- **verdiene øker**.

I noen oppgaver er begrensningene oppgitt. I noen oppgaver skal du vurdere **modellen** opp mot et reelt **punkt**. I noen oppgaver må du gjøre selvstendige vurderinger.

I eksempelet med læreren som måler den samlede vekten av terninger pluss en kopp, står det innledningsvis at læreren har med en bunke på 30 identiske terninger. Det betyr at **modellen** vi har funnet har en øvre grense på 30.

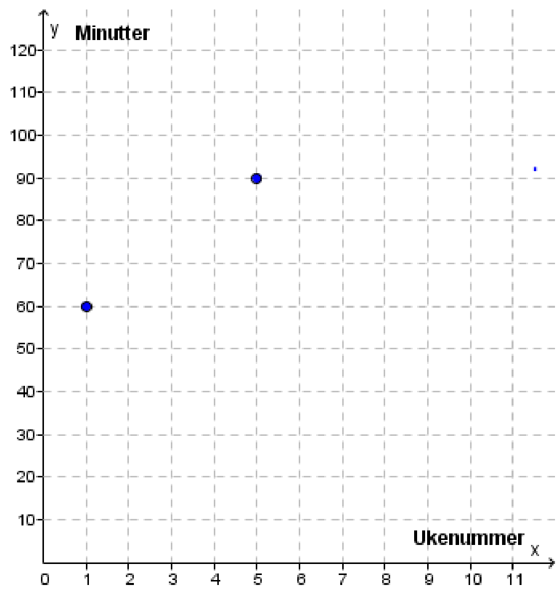
Det er i tillegg ikke mulig å legge på et negativt antall terninger. Dermed blir den nedre grensen 0.

Dette betyr at **modellen** er **gyldig** for x- **verdier** fra og med 0, og til og med 30.

I situasjoner uten tydelige grenser må du selv vurdere hva som er en fornuftig avgrensing.

Oppgave 4

I koordinatsystemet til høyre har Liv markert hvor mange minutter hun trente i uke 1 og i uke 5. Liv har som mål at antall minutter hun trener hver uke skal øke lineært.



Bestem en modell som Liv kan bruke for å regne ut hvor mange minutter hun må øke treningen med hver uke framover for å nå dette målet.

Vurder modellens gyldighetsområde.

Oppgave 5

En ungdom har sittet barnevakt som deltidsjobb. Lønna beregnes ut fra et fast beløp for oppmøte, og et fast beløp for hver time ungdommen sitter barnevakt.

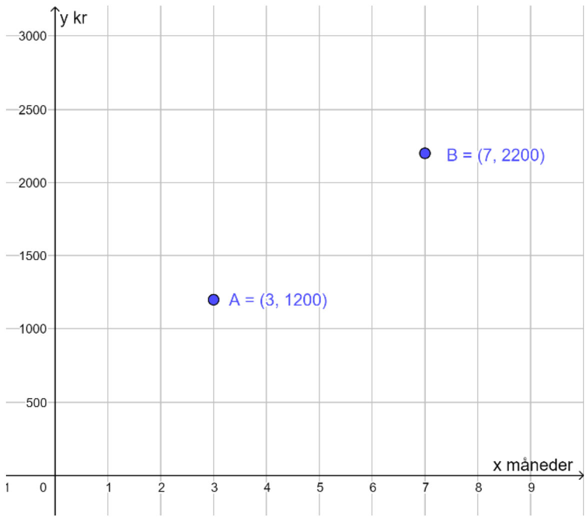
Grafen til høyre viser sammenhengen mellom antall timer ungdommen sitter barnevakt, og hvor mye ungdommen får i lønn.

Velg to punkter fra grafen, og lag en modell som viser sammenhengen mellom antall timer og lønn.

Hvilken informasjon gir modellen? Vurder modellens gyldighetsområde.

Oppgave 6

Kaia har bestemt seg for å spare et fast beløp hver måned et helt år. Punktene til høyre viser hvor mye hun har på sparekontoen etter 3 måneder og etter 7 måneder.



Bruk informasjonen fra grafikkbildet ovenfor til å lage en lineær modell som kan vise utviklingen i antall kroner på kontoen til Kaia.
Hvor mye sparer hun hver måned, og hvor mye hadde hun da hun startet sparinga?

Vurder modellens gyldighetsområde.

Presentasjonsoppgave

Det blir stadig vanskeligere for ungdom å skaffe seg arbeid. Andelen ungdom med deltidsjobb har sunket jevnt siden år 2000, og det er foreløpig ingen tegn til at utviklingen endres.

Tabellen nedenfor viser andelen av 17 år gamle gutter og jenter som har deltidsjobb i noen utvalgte år.

År	2000	2005	2010	2015
Andel jenter	74,1	63,9	64,6	55,9
Andel gutter	73,9	61,2	56,2	48,5

Kilde: https://www.ssb.no

Bruk informasjonen i tabellen, og lag en modell for hvert av kjønnene som viser en jevn utvikling i andelen jenter og gutter som har deltidsjobb.

Hva forteller modellene om nedgangen i andelen ungdom som har deltidsjobb? Hvilket gyldighetsområde har modellene?

Lineær utvikling utfra funksjonsuttrykk

Tenk deg at en pakke kjøttdeig tas ut av fryseren, og legges på kjøkkenbenken.

Funksjonsuttrykket

$$T(x) = 2{,}5x - 18$$

kan brukes til å beregne kjøttdeigens temperatur $T(x)$ grader ℃ etter x timer på kjøkkenbenken.

Hvilken informasjon gir dette **funksjonsuttrykket**, og hva kan vi bruke **funksjonsuttrykket** til?

$$T(x) = 2{,}5x - 18$$

Først må vi skjønne symbolene x og $T(x)$.

x står for antall timer som har gått siden kjøttdeigen ble tatt ut, og x er den eneste **variabelen** vi kan bruke når vi skal løse funksjonsoppgaver i GeoGebra. Hvis ikke kunne vi brukt **variabelen** t for timer.

$T(x)$ uttales «T av x», og måler kjøttdeigens temperatur. Skrivemåten forteller at temperaturen er en **funksjon** av **variabelen** x, som betyr at temperaturen **endres** etter hvert som x øker.

Hva betyr tallene i funksjonsuttrykket?

Leddet som står alene er **funksjonens konstantledd**. I dette tilfellet forteller **konstantleddet** at kjøttdeigens temperatur er -18℃ når den tas ut av fryseren.

Tallet foran **variabelen** x er **funksjonens stigningstall**. I dette tilfellet forteller **stigningstallet** at temperaturen stiger med 2,5 per time.

Hva kan vi bruke funksjonsuttrykket til?

Dersom vi tegner **grafen** til **funksjonsuttrykket** inn i GeoGebra, kan vi bruke **grafen** til å finne **tilhørende** x- og y- **verdier**.

Vi kan for eksempel finne ut hvor lang tid det tar før kjøttet har tint, eller hvilken temperatur kjøttet har etter 12 timer.

Tegne grafen for en definisjonsmengde

Definisjonsmengden er på mange måter det samme som **gyldighetsområde**.

Anta at kjøttdeigen når romtemperatur etter 16 timer. Det betyr at **definisjonsmengden** til **funksjonsuttrykket** er fra 0 til 16.

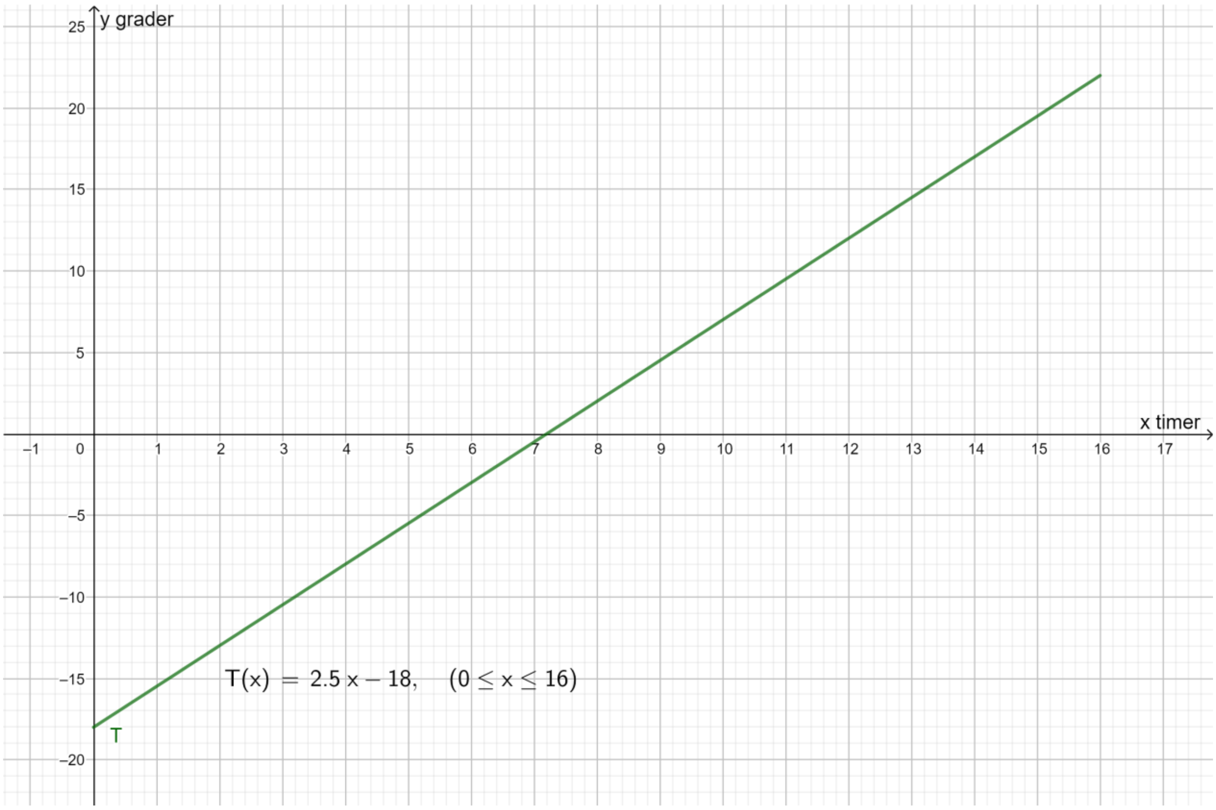
Dette kan også skrives slik:

$$0 \leq x \leq 16$$

Ofte blir **funksjonsuttrykket** og **definisjonsmengden** skrevet sammen slik:

$$T(x) = 2{,}5x - 18 \quad , \quad 0 \leq x \leq 16$$

Det er også slik vi skriver det inn i GeoGebra. Etter justeringer av x- og y- **aksen**, skal du få et grafikkfelt som likner på dette:



Husk å sette navn på **aksene**, og å trekke inn **funksjonsuttrykket**.

Vi kan nå finne **tilhørende** x- og y- **verdier**.

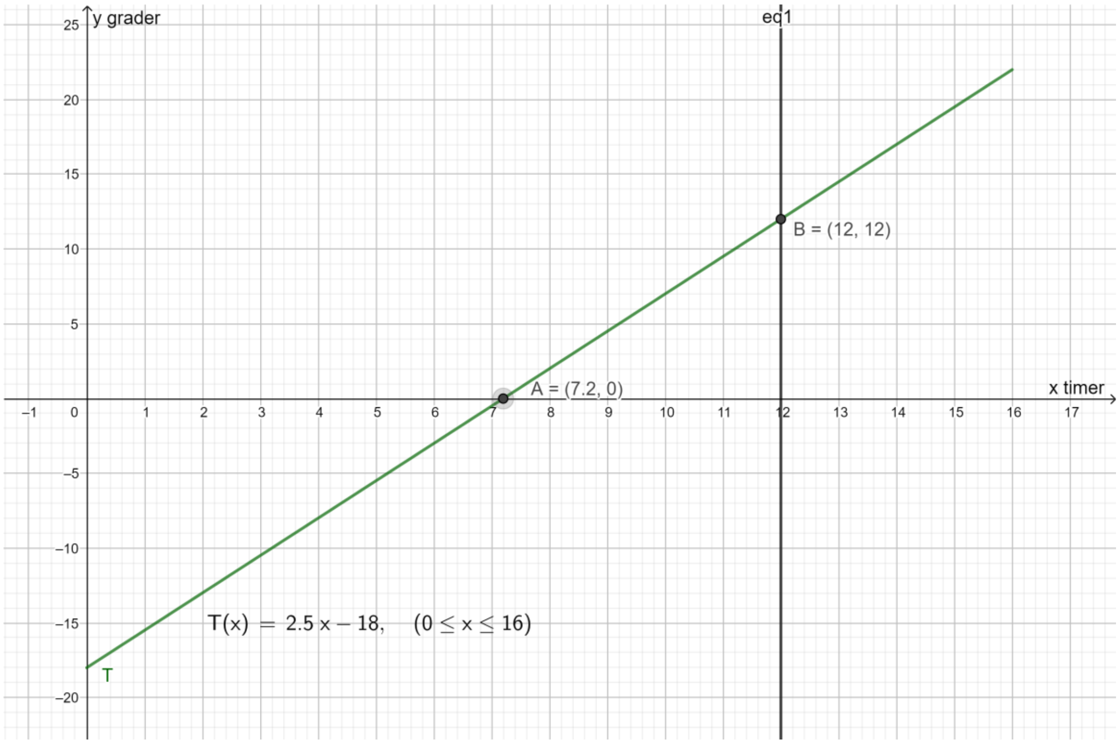
Skjæring mellom to objekt.

Hvor lang tid vil det ta før kjøttdeigen har tint. Hvilken temperatur har kjøttdeigen etter 12 timer?

Kjøttet har tint når det passerer 0℃. Dette finner vi ved å bruke «Skjæring mellom to objekt» og trykke der **grafen** skjærer x- **aksen**.

For å finne kjøttdeigens temperatur etter 12 timer må vi tenke at vii finner 12 timer på x- **aksen**. Derfor må vi skrive $x = 12$, og bruke «Skjæring mellom to objekt» der linja fra $x = 12$ skjærer **grafen**. Alternativt kan vi skrive (12,T(12)).

Dermed får vi disse **punktene** som vi må tolke:



Svar:

Kjøttdeigen tiner etter 7,2 timer. Fremgangsmåte: brukte «Skjæring mellom to objekt».

Etter 12 timer holder kjøttdeigen 12℃. Fremgangsmåte: skrev $x = 12$, brukte «Skjæring mellom to objekt».

Oppgave 7

Mathias ønsker å spare til en reise. Han oppretter et fast månedlig trekk inn på en sparekonto, hvor det allerede står et beløp.

Funksjonsuttrykket

$$S(x) = 500x + 4500 \quad , \quad 0 \leq x \leq 12$$

kan brukes til å regne ut hvor mye han har på sparekontoen $S(x)$ kr når han har spart i x måneder.

Bruk informasjonen ovenfor til å vise at du kan:

- Tegne en avgrenset graf i GeoGebra
- Sette navn på x- og y- aksen
- Gi en praktisk tolkning av en funksjons stigningstall og konstantledd
- Finne tilhørende x- og y- verdier

Alle svar skal skrives i Word, og skal forklares med fremgangsmåte.

Oppgave 8

En del kommuner i distrikts-Norge opplever en jevn nedgang i innbyggertallet.

Funksjonen

$$K(x) = -150x + 3800 \quad , \quad 0 \leq x \leq 10$$

kan brukes til å beregne innbyggertallet $K(x)$ i en kommune x år etter 2021.

Bruk informasjonen ovenfor til å vise at du kan:

- Tegne en avgrenset graf i GeoGebra
- Sette navn på x- og y- aksen
- Gi en praktisk tolkning av en funksjons stigningstall og konstantledd
- Finne tilhørende x- og y- verdier

Alle svar skal skrives i Word, og skal forklares med fremgangsmåte.

Oppgave 9

Tenk deg at du har en fulladet telefon, og at batteriprosenten synker med fast antall prosentpoeng per time ved normal bruk og temperatur. Fuksjonen B gitt ved

$$B(x) = -5x + 100$$

er en modell som viser batteriprosenten $B(x)$ til telefonen, x timer etter at telefonen var fulladet. Bruk informasjonen ovenfor til å vise at du kan:

- Tegne en graf i GeoGebra, og vurdere gyldighetsområdet til en modell
- Sette navn på x- og y- aksen
- Gi en praktisk tolkning av en funksjons stigningstall og konstantledd
- Finne tilhørende x- og y- verdier

Alle svar skal skrives i Word, og skal forklares med fremgangsmåte.

Oppgave 10

21. februar 2020 ble Covid-19 for første gang påvist hos en pasient i Norge. Etter dette steg antall smittede i et relativ raskt tempo.

Dersom vi antar at utviklingen i antall smittede nordmenn økte jevnt i perioden som fulgte, kan antall smittede nordmenn $S(x)$ beregnes ut fra modellen

$$S(x) = 97x$$

hvor x er antall dager etter 20. februar 2020.

22. mars var det registrert 2902 smittede nordmenn. 30. mars hadde dette tallet steget til 4898.

Bruk informasjonen ovenfor til å vise at du kan:

- Tegne en graf i GeoGebra, og vurdere gyldighetsområdet til en modell
- Sette navn på x- og y- aksen
- Gi en praktisk tolkning av en funksjons stigningstall og konstantledd
- Finne tilhørende x- og y- verdier
- Avgjøre om to størrelser er proporsjonale

Alle svar skal skrives i Word, og skal forklares med fremgangsmåte.

En eksamensoppgave

Jacob er selger.

Månedslønnen hans er gitt ved

$$M(x) = 0{,}075x + 32\ 000$$

når han selger for x kroner i løpet av en måned.

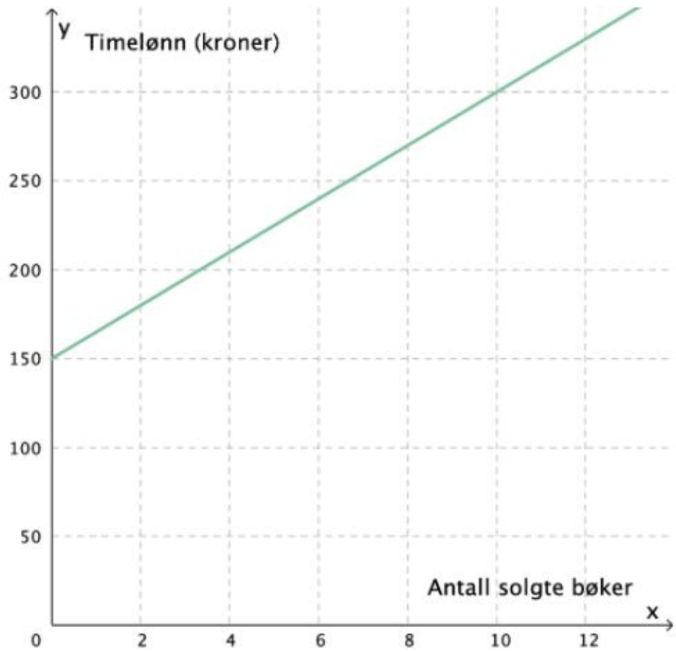
En måned selger Jacob for 150 000 kroner.

Bestem månedslønnen hans denne måneden.

En eksamensoppgave

Sarah har deltidsjobb som bokselger.

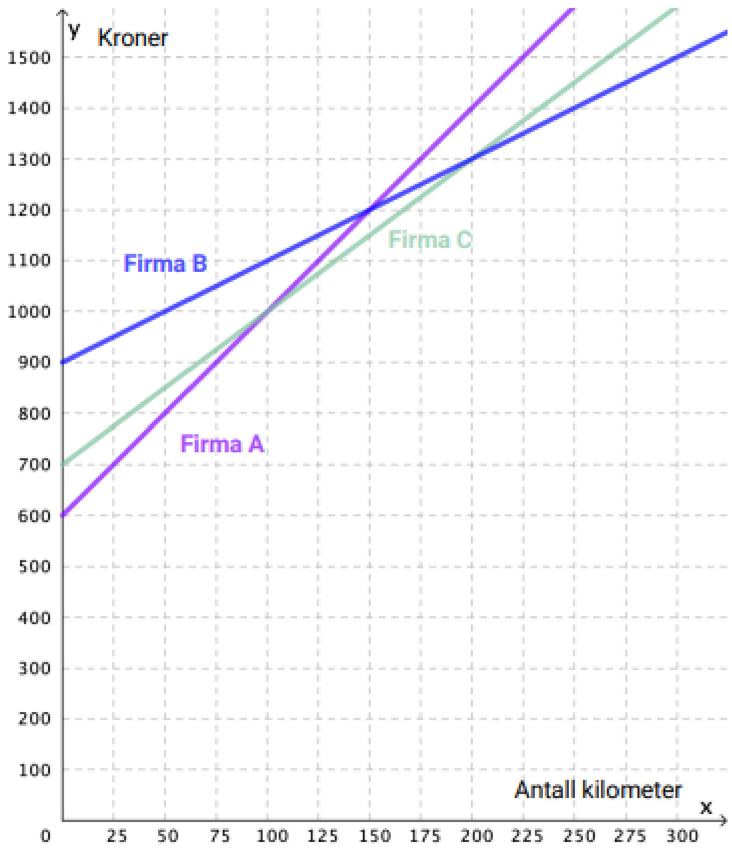
Modellen viser timelønnen hennes når hun selger x bøker i løpet av en time.



Hvor mange bøker må Sarah selge i løpet av en time for at timelønnen skal bli 450 kroner?

En eksamensoppgave

Markus skal leie en bil i ett døgn. Grafene nedenfor viser prisen han må betale i Firma A, Firma B og Firma C.



a) Forklar at prisen Markus må betale hos Firma A, kan beskrives med uttrykket

$$A(x) = 4x + 600$$

b) Hva blir prisen per km hos Firma B dersom Markus kjører 50 km?
Hva blir prisen per km hos Firma B dersom Markus kjører 400 km?

Markus skal kjøre fra Bodø til Sulitjelma og tilbake til Bodø igjen. På internett finner han ut at kjøreavstanden fra Bodø til Sulitjelma er 9,7 mil.

c) Gjør beregninger, og vurder hvilket firma han bør leie hos.

Eksponentiell utvikling: $y = a \cdot b^x$

Dersom y **endres** *fra* et startpunkt *med* en fast **prosent** for hver gang x øker med 1, sier vi at **utviklingen** er **eksponentiell**. Både startpunktet og den faste prosenten har en praktisk betydning, og du vil bli bedt om å kommentere begge.

For å kunne forstå **eksponentielle modeller**, må du først arbeide med **vekstfaktor**.

Prosentvis endring – vekstfaktor

Det er vanlig at prisen på de fleste varer og tjenester øker for hvert år. Siden varer og tjenester med høy pris vil øke med et høyere kronebeløp enn varer og tjenester med lav pris, er det vanlig å beskrive prisveksten med et **prosenttall**.

Vi anser den **opprinnelige** prisen på hver enkelt vare til å være 100 %. I 2021 er den antatte prisveksten på 2,6 %. Det betyr at i gjennomsnitt blir alle varer og tjenester 2,6 % dyrere enn de var ved inngangen til 2021.

Dette betyr at ved utgangen av 2021 har prisen på varer og tjenester steget til 102,6 % i forhold til prisen ved inngangen til 2021. Dette kaller vi **ny verdi i prosent**.

Endringen i prosent kan også være negativ. Som en følge av koronapandemien sank antall pasienter med døgnopphold på norske sykehus med 7 % i 2020, ifølge SSB.

Vi anser det **opprinnelige** antall pasienter med døgnopphold til å være 100 %. Med en nedgang på 7 %, vil **ny verdi i prosent** være 93 %. Det betyr at antall pasienter med døgnopphold i 2020 var 93 % i forhold til antall pasienter med døgnopphold i 2019.

Finne vekstfaktoren

$$100\ \% \ \pm \boldsymbol{endring\ i}\ \% = \boldsymbol{ny\ verdi\ i}\ \%$$

I forrige kapittel lærte du å gjøre **prosenttallet** om til et **desimaltall**. Det er dette **desimaltallet** vi kaller **vekstfaktor**

$$\frac{\boldsymbol{ny\ verdi\ i}\ \%}{100\ \%} = \boldsymbol{vekstfaktor}$$

Oppgave 11

Fyll ut tabellen nedenfor. Ta utgangspunkt i at **opprinnelig verdi** er 100 %.

-7 %	=	93 %	=	0,93		=		=	0,978
+ 7 %	=	107 %	=	1,07	+ 0,4 %	=		=	
- 7,5 %	=		=		- 17,5 %	=		=	
+ 12,3%	=		=			=	300 %	=	
+ 20 %	=		=			=		=	3,5
- 10 %	=		=		- 100 %	=		=	
	=		=	0,87	- 1,2 %	=		=	
	=	140 %	=			=		=	1,007
+ 100 %	=		=			=	100,2 %	=	
	=	70 %	=		- 25 %	=		=	

Oppgave 12

Beskriv sammenhengen mellom vekstfaktor og prosentvis endring med dine egne ord:

Bruke vekstfaktoren

Dersom vi får opplyst **startverdi** og **endringen i prosent**, kan vi regne **ny verdi** ved hjelp av følgende **regnemetode**:

$$\boldsymbol{Startverdi \cdot ny\ verdi\ i\ \% = ny\ verdi}$$

I oppgave 13 trente du på å gjøre **prosent** om til **desimaltall**. Dersom vi bruker **desimaltallet** i utregningen istedenfor **prosenten**, bruker vi ordet **vekstfaktor** om **desimaltallet**. Da får vi følgende **regnemetode**:

$$\boldsymbol{Startverdi \cdot vekstfaktor = ny\ verdi}$$

Anta at en vare i 2020 kostet 143 kroner, og at prisen steg med 2,6 % i løpet av 2021. For å finne prisen i 2021 kan vi enten multiplisere med **ny verdi i prosent**:

$Pris\ 2021 = 143kr \cdot 102{,}6\ \% \approx 147\ kr$

eller ved å multiplisere med **vekstfaktoren**:

$Pris\ 2021 = 143kr \cdot 1{,}026 \approx 147\ kr$

I 2019 ble det registrert omtrent 750 000 pasienter med døgnopphold på norske sykehus. I 2020 var dette antallet 7 % lavere. For å finne antall pasienter med døgnopphold i 2021 kan vi enten multiplisere med **ny verdi i prosent**:

$Antall\ pasienter\ med\ døgnopphold\ 2020 = 750\ 000 \cdot 93\ \% = 697\ 500$

eller ved å multiplisere med **vekstfaktoren**:

$Antall\ pasienter\ med\ døgnopphold\ 2020 = 750\ 000 \cdot 0{,}93 = 697\ 500$

Du velger selv hvilken metode du ønsker å bruke. Det er imidlertid greit å vite hvilke metoder du kan bruke på de ulike digitale hjelpemidlene:

Digitale hjelpemidler	**Vekstfaktoren**	**Ny verdi i %**
ExCel	✓	✓
GeoGebra	✓	✓
CAS	✓	✓
Kalkulator	✓	Ikke alle

Løs noen av oppgavene nedenfor ved hjelp av ExCel og CAS.

Oppgave 13
I 2018 ble en leilighet kjøpt for 2 450 000 kr. I 2021 hadde verdien av leiligheten steget med 15 %. Hvor høy er verdien av leiligheten i 2021?

Oppgave 14
Nypris på en moped var 12 000 kr. Etter ett år hadde verdien sunket med 20 %. Hva var verdien på mopeden etter ett år?

Oppgave 15
Hanne har en timelønn på 160 kr. Hun blir lovet en lønnsøkning på 4,3 %. Hva blir den nye timelønna hennes?

Oppgave 16
Prisen på en aksje var 68 kr. Dagen etter hadde verdien sunket med 2,8 %. Hva ble den nye verdien på denne aksjen?

Oppgave 17
En familie kjøpte en leilighet i 2008 for 1,8 millioner kroner. De antar at leilighetens verdi har steget med 150 % frem til i dag. Hvor høy er verdien på leiligheten dersom familien har rett?

Oppgave 18

a) I januar 2019 kjøpte en person akser for et visst beløp. Verdien på aksjene kunne i juni beregnes utfra regnestykket 15 000 · 1,05. Hva forteller tallene 15 000 og 1,05?
b) Høsten 2020 startet et visst antall elever på VG1. Antall elever som fullførte året kan beregnes utfra regnestykket 140 · 0,875. Hva forteller tallene 140 og 0,875?

Flere prosentvise endringer

Vi må forvente at prisen på varer og tjenester fortsetter å øke i årene som kommer. For hver prisstigning må vi multiplisere den nye prisen med **vekstfaktoren.** Selv om **endringen i prosent** er lik for hvert år, vil prisstigningen i kroner bli høyere for hvert år.

Anta at varen som kostet 147 kroner i 2021 øker med 2,6 % hvert år de neste 4 årene. For hver prisendring må vi multiplisere med **vekstfaktoren**, noe som gir dette regnestykket:

$$Pris\ etter\ 4\ endringer = 147\ kr\ \cdot \underbrace{1{,}026 \cdot 1{,}026 \cdot 1{,}026 \cdot 1{,}026}_{\text{Dette kan forenkles ved hjelp av potens}} \approx 163\ kr$$

Vi får dermed:

$$Pris\ etter\ 4\ endringer = 147\ kr\ \cdot 1{,}026^4 \approx 163\ kr$$

Anta at antall pasienter med døgnopphold ved norske sykehus fortsetter å synke med 7 % hvert år i de neste tre årene. Vi kan dermed regne ut at

$$Antall\ pasienter\ med\ døgnopphold = \ 697\ 500\ \cdot 0{,}93^3 = 561\ 039$$

Vi kan regne ut **ny verdi** etter den siste **prosentvise endringen** ved hjelp av følgende **regnemetode**:

$$\boldsymbol{Startverdi\ \cdot vekstfaktor^x = ny\ verdi}$$
$$\boldsymbol{der\ x\ ertattes\ av\ antall\ endringer}$$

Du legger kanskje merke til at vi kun har vist utregning ved hjelp av **vekstfaktoren**, og ikke ved hjelp av **ny verdi i prosent**? Grunnen ser du her:

<table>
<tr><th>Digitale hjelpemidler</th><th>Vekstfaktoren</th><th>Ny verdi i %</th><td rowspan="5">Kalkulator lar deg ikke bruke prosenttall ved potensregning</td></tr>
<tr><td>ExCel</td><td>✓</td><td>✓</td></tr>
<tr><td>GeoGebra</td><td>✓</td><td>✓</td></tr>
<tr><td>CAS</td><td>✓</td><td>✓</td></tr>
<tr><td>Kalkulator</td><td>✓</td><td>✗</td></tr>
</table>

Løs noen av oppgavene nedenfor ved hjelp av ExCel og CAS.

Oppgave 19
Hvis vi setter 10 000 kr i banken 1. januar, vil vi etter ett år få *renter* av pengene slik at beløpet på kontoen øker. Renten er en bergenes prosentvis av det beløpet vi har på kontoen.

Hvor mye vil vi ha på kontoen etter 5 år dersom renta er på 3 % per år?

Oppgave 20
En bærbar PC koster 9800 kr som ny. Vi regner med at verdien minker med 25 % i året. Hvor mye er PC-en verdt etter 4 år?

Oppgave 21
Anta at en aksje, som i dag er verdt 118 kr, stiger med 2 % hver dag den neste uka. Hvor høy er verdien på aksjen etter en uke (7 dager)?

Oppgave 22
Knut kjøper en bil, og han vet at bilens verdi synker en viss prosentandel hvert år. Han ser for seg å beholde bilen i noen år, og han lager følgende regnestykke for å beregne hvor mye han kan selge bilen for:

$$Salgspris = 320\,000 \cdot 0{,}85^4$$

Hvor mye kjøpte Knut bilen for, hvor mange prosent antar Knut at verdien synker hvert år, og hvor mange år tenker Knut å beholde bilen før han selger den?

Hvor mye regner Knut å selge bilen for?

En eksamensoppgave

En bakterie formerer seg ved todeling (dobling) hvert 20. minutt.

Det vil si at om det i starten er én bakterie, vil det etter 20 minutter være 2 bakterier, etter 40 minutter være 4 bakterier osv.

Hvor mange bakterier vil det være etter 12 timer?

En eksamensoppgave

> **Verdifallet utgjør bilens største kostnad, særlig det første året, enten bilen er kjøpt ny eller brukt.**
>
> Verdifallet utgjør bilen største kostnad. Verdifallet er i de aller fleste tilfellene størst det første året. For en nybil kan du forvente 20 prosent første året. Deretter om lag 14 prosent av bruktprisen fra det andre året, synkende til 10 prosent det sjette året. Og fra det sjette året 10 prosent årlig.

Teksten ovenfor er hentet fra smartepenger.no.

Mathilde kjøpte en ny bil. Bilen kostet 390 000 kroner.

Mathilde vil lage en oversikt som viser bilens verdifall i prosent de første seks årene. Hvert år vil hun sammenligne bilens verdi med verdien året før. I tillegg vil hun hvert år sammenlikne bilens verdi med verdien da den var ny.

Hun har brukt tallene fra smartepenger.no, og satt opp et regneark som vist nedenfor.

	A	B	C
1	**Verdifall i prosent**		
2	**År**	**Sammenliknet med verdien året før**	**Sammenliknet med verdien som ny**
3	1	20 %	20 %
4	2	14 %	31 %
5	3	13 %	
6	4	12 %	
7	5	11 %	
8	6	10 %	

a) Vis hvordan Mathilde kan ha kommet frem til 31 % i celle C4.

b) Lag regnearket og legg inn formler for å regne ut verdier i de grønne cellene.

Mathilde vil også ha en oversikt som viser verdifallet i kroner for bilen hun kjøpte. Hvert år skal oversikten vise verdifallet fra året før. I tillegg skal den for hvert år vise verdifallet i kroner fra da bilen var ny.

c) Utvid regnearket fra oppgave b) slik at du også får med en slik oversikt.

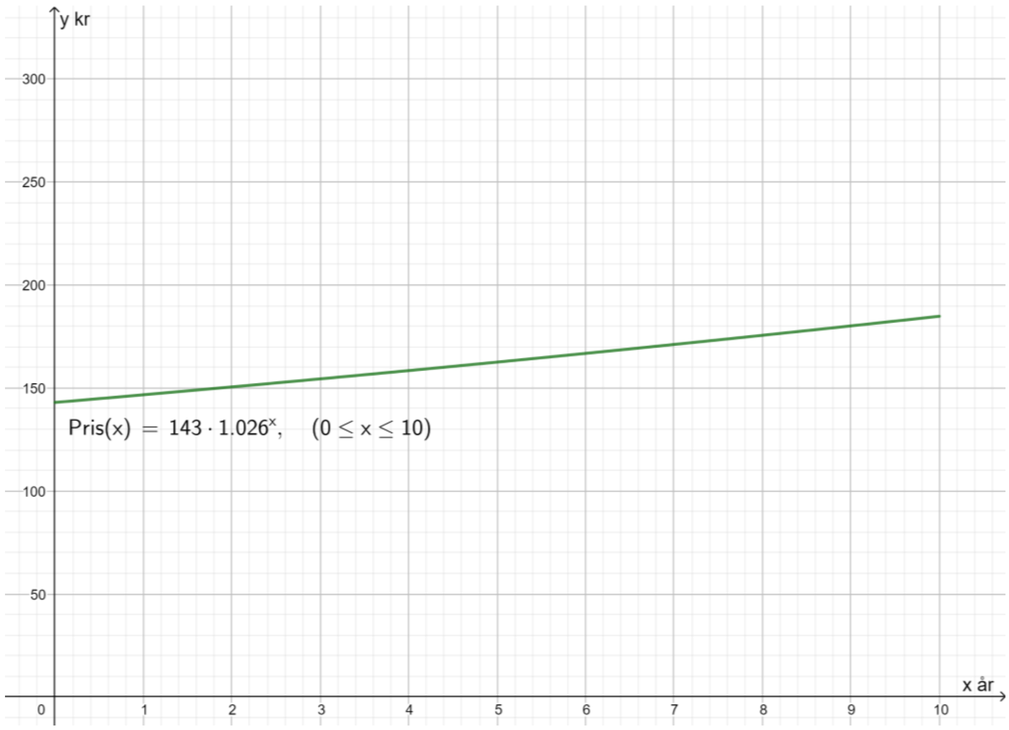
Ukjent antall endringer – eksponentiell utvikling

På de forrige sidene har vi sett på hvordan vi regner **ny verdi** etter et bestemt antall **prosentvise endringer**. Dersom vi ønsker å lage en **regnemetode** som gir oss mulighet til å finne **ny verdi** etter et ukjent antall **endringer**, må vi erstatte det kjente antallet **endringer** med variabelen x.

Nedenfor har vi beskrevet utviklingen i pris for varen fra tidligere eksempler.

Opprinnelig beløp	Etter 1 år	Etter 2 år	Etter 3 år	Etter x år
$143\ kr$	$143\ \cdot 1{,}026^1$	$143\ \cdot 1{,}026^2$	$143\ \cdot 1{,}026^3$	$143\ \cdot 1{,}026^x$

Grafisk vil utviklingen 10 år fremover se slik ut:



Funksjonsuttrykket $143 \cdot 1{,}026^x$ er skrevet på formen $y = a \cdot b^x$.

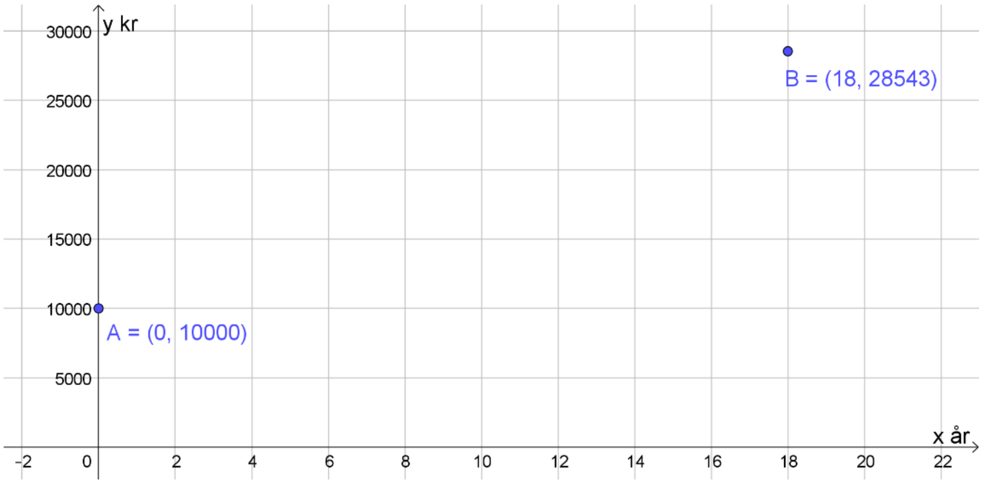
143 er **funksjonens opprinnelige verdi**, og forkortes a

1,026 er **funksjonens vekstfaktor**, og forkortes b.

I oppgaver vil du bli bedt om å tolke **funksjonsuttrykket.**

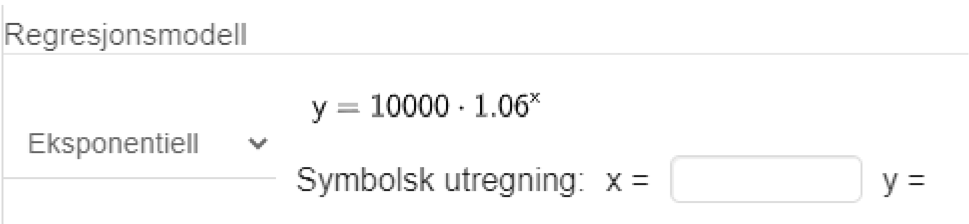
Eksponentiell utvikling utfra punkter

Tenk deg at foreldrene til et nyfødt barn satte inn et beløp i et aksjefond da barnet ble født. Foreldrene forventer at verdien til aksjefondet stiger frem til barnet blir 18 år.



Kan **punktene** i **koordinatsystemet** ovenfor brukes til å finne aksjefondets årlige verdiøkning, dersom aksjefondet har steget med en fast **prosent** hvert år?

Vi skriver punktene inn i regnearket i GeoGebra, og ber GeoGebra utføre en regresjonsanalyse. Deretter velger vi en eksponentiell modell, og får dette funksjonsuttrykket:



Funksjonsuttrykket gir oss denne informasjonen:

10 000 er det opprinnelige beløpet foreldrene plasserte i aksjefondet da barnet ble født.

1,06 = 106 %, som betyr 6 % årlig verdiøkning.

Også her kan du bli bedt om å finne **tilhørende** x- og y- **verdier**, og det gjøres på samme måte som tidligere.

Oppgave 23

En nyåpnet videregående skole presenterte følgende elevtall for to utvalgte år etter oppstart:

År etter oppstart	1	3
Elevtall	620	680

Skolens ledelse antar at utviklingen i skolens elevtall kan beskrives med en prosentvis endring som er gyldig i noen år fremover.

Bruk tallene i tabellen til å lage en modell som kan brukes til å beskrive utviklingen i skolens elevtall. Hva forteller modellen om den prosentvise endringen per år i skolens elevtall?

Oppgave 24

Ved en annen nyåpnet videregående skole så elevtallet slik ut i to utvalgte år:

År etter oppstart	1	3
Elevtall	1420	1217

Skolens ledelse antar at utviklingen i skolens elevtall kan beskrives med en prosentvis endring som er gyldig i noen år fremover.

Bruk tallene i tabellen til å lage en modell som kan brukes til å beskrive utviklingen i skolens elevtall. Hva forteller modellen om den prosentvise endringen per år i skolens elevtall?

En eksamensoppgave

Tabellen nedenfor viser antall innbyggere i Norge 1. januar noen utvalgte år.

År	1960	1970	1980	1990	2000	2010	2017
Innbyggere (millioner)	3,57	3,86	4,08	4,23	4,47	4,85	5,25

La *x* være antall år etter 1960. (La $x = 0$ svare til år 1960, $x = 10$ til 1970 osv.)

Før du begynner med oppgavene nedenfor må du regne ut x- verdiene til alle årstallene.

Vis at $f(x) = 3{,}57 \cdot 1{,}006^x$ er en modell som passer godt med tallene i tabellen. Hva forteller tallet 1,006 i denne modellen?

En eksamensoppgave

Dato	1. juni	1. juli	1. august	1. september
Antall tusen registrert smittet	6278	10 660	17 837	25 761

Tabellen viser antall tusen personer som totalt var registrert smittet av covid-19 noen dager i 2020.

La $x = 1$ svare til 1. juni, $x = 2$ til 1. juli, $x = 3$ til 1. august og $x = 4$ til 1. september.

a) Bruk regresjon til å vise at funksjonen f gitt ved

$$f(x) = 4038 \cdot 1{,}608^x$$

kan brukes som en modell for antall tusen personer som totalt var registrert smittet måned for måned i denne perioden.

b) Hvor mange prosent økte det totale antallet registrert smittede personer med per måned ifølge modellen?

Eksponentiell utvikling utfra funksjonsuttrykk

Tenk deg at du kjøper en moped når du blir 16 år, og selger denne når du blir 20 år. I hvert av de fire årene du eier mopeden, vil mopedens **verdi** synke med en fast prosent.

Funksjonen

$$M(x) = 15000 \cdot 0.85^x \quad , \quad 0 \leq x \leq 4$$

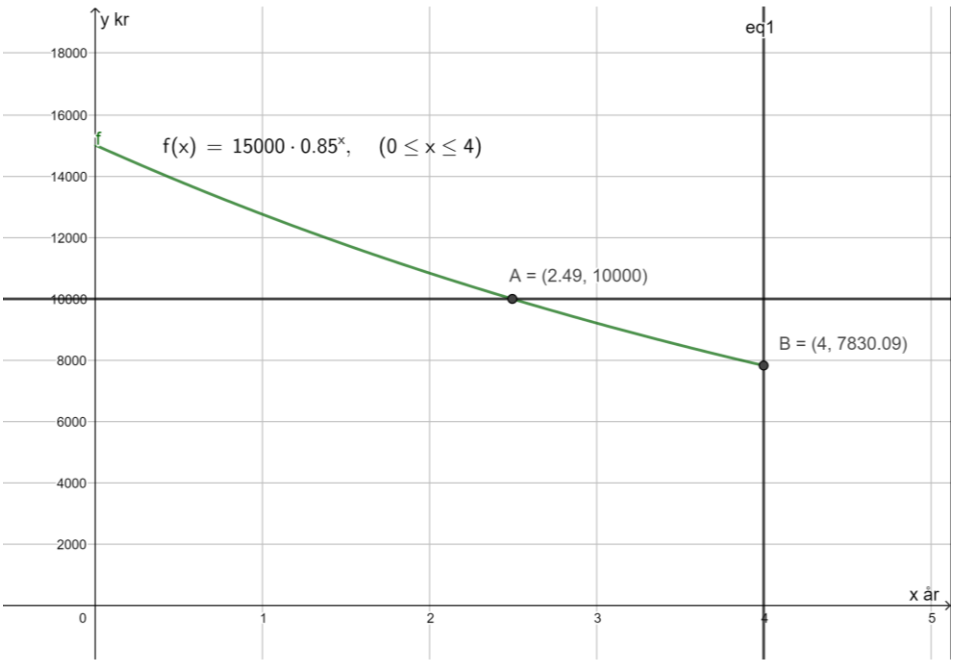
kan brukes til å beregne mopedens **verdi** $M(x)$ kroner x år etter at du kjøpte den.

Hvilken interessant informasjon kan vi finne ved hjelp av **funksjonsuttrykket**?

- **Opprinnelig verdi** er 15000. Dette er summen du kjøper mopeden for.
- **Vekstfaktoren** er 0,85. Dette betyr at mopedens verdi synker med 15 % i året
- $0 \leq x \leq 4$ er **funksjonens** avgrensning. Dette betyr at funksjonen er gyldig for x- verdier mellom 0 og 4.

Ved å tegne **grafen** i GeoGebra, kan vi finne ut at:

- **Punkt** A forteller at du må selge mopeden innen 2 år dersom du ønsker å selge den for minst 10 000 kr. Fremgangsmåte: skrev y = 10000, brukte «skjæring mellom to objekt».
- **Punkt** B forteller at forventet salgsverdi om 4 år er omtrent 7 800 kroner. Dette betyr at du må forvente et verditap på omtrent 7 200 kroner på dette kjøpet. Fremgangsmåte: skrev x = 4, brukte «skjæring mellom to objekt».



Oppgave 25

En familie kjøper en bil.

Funksjonen

$$f(x) = 420000 \cdot 0{,}82^x \quad , \quad 0 \le x \le 8$$

kan brukes til å beregne bilens verdi $f(x)$ kroner x år etter kjøpet av bilen, og frem til familien planlegger å selge bilen.

Bruk funksjonsuttrykket og grafen til å finne interessant informasjon om bilens verdi.

Oppgave 26

Familien kjøpte samtidig en leielighet.

Funksjonen

$$L(x) = 3480000 \cdot 1{,}08^x \quad , \quad 0 \le x \le 15$$

kan brukes til å beregne leilighetens verdi $L(x)$ kroner x år etter kjøpet av leiligheten, og frem til familien planlegger å selge leiligheten.

Bruk funksjonsuttrykket og grafen til å finne interessant informasjon om leilighetens verdi.

Oppgave 27

Funksjonen *N* gitt ved

$$N(x) = 5{,}32 \cdot 10^6 \cdot 1{,}008^x \qquad 0 \leq x \leq 9$$

kan brukes til å regne ut befolkningen *N*(x) i Norge *x* år etter 1. januar 2021.

Bruk funksjonsuttrykket og grafen til å finne interessant informasjon om Norges befolkning.

Oppgave 28

Spørsmålet om hvor mange mennesker som kan leve på jorda har vært stilt en rekke ganger. Funksjonen gitt ved

$$F(x) = 7{,}83 \cdot 10^9 \cdot 1{,}0114^x \quad 0 \leq x \leq 10$$

kan brukes til å beregne folketallet på jorda *x* år etter 1. januar 2021.

Bruk funksjonsuttrykket og grafen til å finne interessant informasjon om verdens folketall.

Oppgave 29

Funksjonen *O* gitt ved

$$O(x) = 1{,}1 \cdot 10^{13} \cdot 1{,}063^x \qquad 0 \leq x \leq 10$$

viser forventet verdi av Statens pensjonsfond utland (Oljefondet) *O*(x) for x år etter 1. januar 2021.

Bruk funksjonsuttrykket og grafen til å finne interessant informasjon om Norges fondsformue.

Oppgave 30

En kopp med rykende varm kaffe settes på kjøkkenbenken. Funksjonen

$$T(x) = 73 \cdot 0{,}83^x + 20$$

er en modell som viser temperaturen $T(x)$ grader °C til kaffen, x minutter etter at koppen blir satt på kjøkkenbenken.

Tegn grafen til T. Gi en forklaring på tallene 0,83 og 20.

Hvilket gyldighetsområde vil du si at modellen kan ha?

Oppgave 31

Funksjonen O gitt ved

$$O(x) = 697000 \cdot 1{,}008^x$$

kan brukes til å beregne folketallet i Oslo x år fremover.

Gi en forklaring på tallene 697 000 og 1,008.

Hvilket gyldighetsområde vil du si at modellen kan ha?

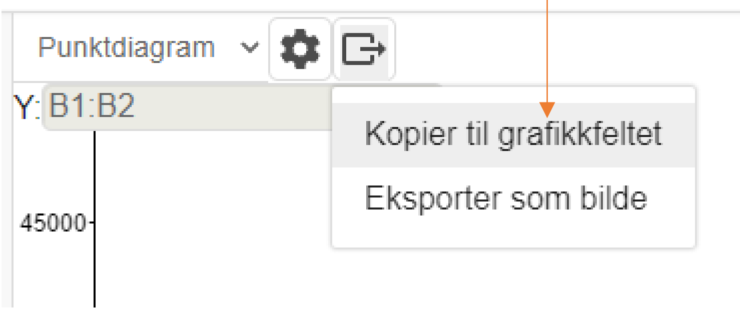
Sammenligne lineære og eksponentielle modeller

Det kan ofte være interessant å analysere en utvikling ved hjelp av ulike modeller. For å avgjøre hvilken av modellene som best beskriver utviklingen må vi sammenligne hva modellene spår med en reell observasjon eller en prognose.

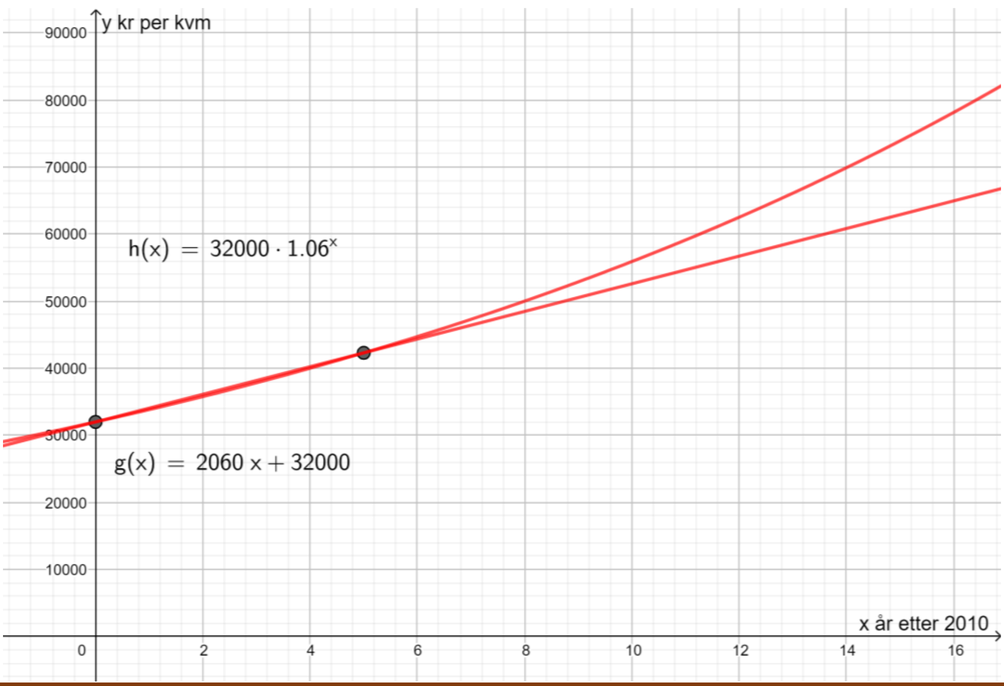
I januar 2010 var den gjennomsnittlige kvadratmeterprisen for alle brukte OBOS-tilknyttede boliger omtrent 32 000 kroner. I januar 2015 hadde denne prisen steget til omtrent 46 500 kroner.

Vi kan beskrive utviklingen i kvadratmeterpris for OBOS-boliger både lineært og eksponentielt slik vi har gjort tidligere, men hvilken av modellene gir et mest mulig riktig bilde av prisutviklingen i årene etter 2015?

For å finne svaret på dette kan vi kopiere hver av modellene til grafikkfeltet. Dette gjør vi ved å trykke på «Kopier til grafikkfeltet»

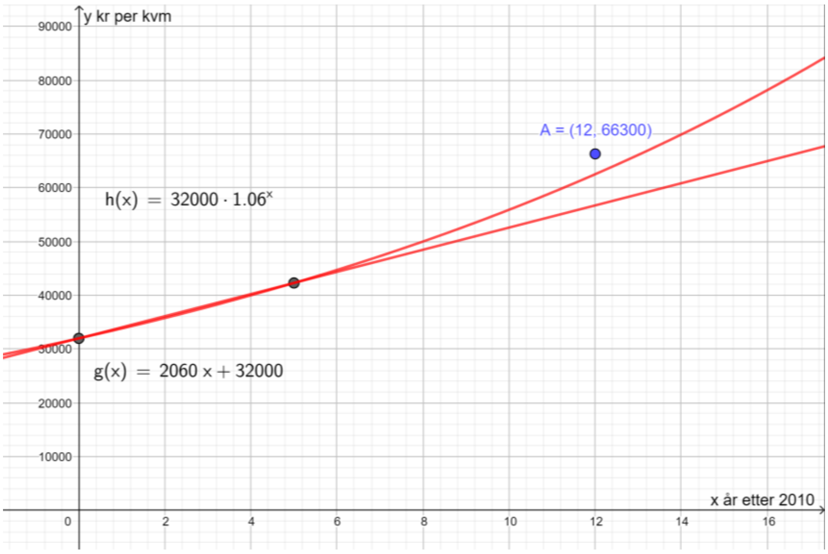


Vi kan dermed få frem dette bildet, etter å ha endret aksene:



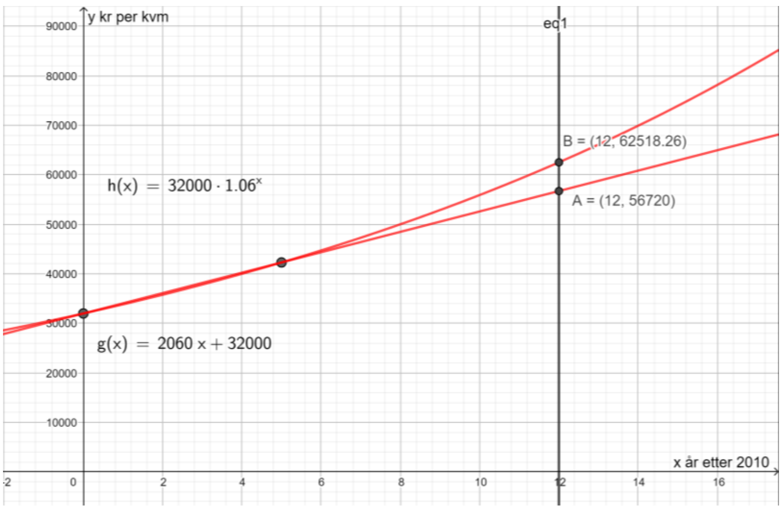
Bildet på forrige side viser at modellene viser relativt lik utvikling mellom 2010 og 2015, men at det eksponentielle modellen stiger vesentlig mer enn den lineære i årene etter 2015. Dersom vi ønsker å avgjøre hvilken av modellene som best beskriver prisutviklingen, må vi sammenligne modellene med et fremtidspunkt.

I januar 2022 hadde kvadratmeterprisen for Obos-boliger steget til omtrent 66 300 kroner. Vi legger denne opplysningen inn i grafikkfeltet, og får dette bildet:



Grafikkbildet ovenfor viser at den eksponentielle modellen er nærmest det virkelige punktet, og vi kan derfor anta at prisutviklingen i årene fremover best beskrives eksponentielt.

Vi kunne også sjekket hvor høy hver av modellen spår kvadratmeterprisen vil være i 2022, ved å skrive inn x=12, og deretter bruke «Skjæring mellom to objekt»:



Konklusjonen blir uansett den samme: den eksponentielle modellen er nærmest den virkelige prisen, og prisutviklingen beskrives best eksponentielt!

Oppgave 32

Tabellen viser folketallet y i Norge (i millioner) fra 1950 (x = 0) til 2000 (x = 50).

År	**1950**	**1960**	**1970**	**1980**	**1990**	**2000**
X	0					50
***y* folketall i millioner**	3,2	3,6	3,9	4,1	4,2	4,5

a) Finn ved regresjon en lineær modell som passer godt til denne utviklingen. Omtrent hvor mye har folketallet økt per år ifølge denne modellen? Kopier grafen til grafikkfeltet.

b) Finn en modell på formen $y = a \cdot b^x$ som passer godt til denne utviklingen. Omtrent hvor mye øker folketallet per år ifølge denne modellen? Kopier grafen til grafikkfeltet.

Undersøk folketallet i Norge i dag (73 år etter 1950). Lag et punkt av denne opplysningen i grafikkfeltet.

c) Hvilken av modellene passer best med dagens folketall?

Oppgave 33

Antall individer i en dyrebestand ble kartlagt.

I 2020 var det 12 000 individer i dyrebestanden.

I 2021 var det 11 400 individer i dyrebestanden.

La x være antall år etter 2020

a) Lag en modell som kan brukes til å beregne antall individer x år etter 2020, dersom nedgangen skal beskrives med et fast tall.

b) Lag en modell som kan brukes til å beregne antall individer x år etter 2020, dersom nedgangen skal beskrives med en fast prosent..

En gruppe forskere antar at antall individer i dyrebestanden i 2030 vil være omtrent 5 700.

c) Bruk denne opplysningen til å avgjøre om forskerne antar at utviklingen i antall dyr vil være lineær eller eksponentiell.

Oppgave 34

Lars og Lene forsker på hvordan antallet hoppekreps i et ferskvann endrer seg. Tabellen nedenfor viser antall observerte hoppekreps noen dager i april og mai.

Dato	30. april	3. mai	4. mai	6. mai
Antall hoppekreps	10 000	20 000	30 000	120 000

Ut fra disse observasjonene vil Lars og Lene lage ulike modeller. De lar x være antall dager etter 30. april, og y være antall hoppekreps.

Når Lars lager sin modell, antar han at antallet hoppekreps øker med et fast antall hver dag.

a) Bestem modellen han da får.
Gjør rede for hva hvert av tallene i modellen betyr i denne praktiske situasjonen.

Når Lene lager sin modell, antar hun at antallet hoppekreps øker med en fast prosent hver dag.

b) Bestem modellen hun da får.
Gjør rede for hva hvert av tallene i modellen betyr i denne praktiske situasjonen.

9. mai ble det registrert omtrent 150 000 hoppekreps i ferskvannet.

c) Avgjør om utviklingen i antall hoppekreps passer best med modellen du lagde i a) eller modellen du lagde i b)

Presentasjonsoppgave

I tabellen nedenfor finner du informasjon om lønnsutvikling i perioden 2015 – 2019 blant ulike yrkesgrupper.

	Gjennomsnittlig månedslønn				
Yrkesgruppe	**2015**	**2016**	**2017**	**2018**	**2019**
Ledere	63400	64350	65800	67810	70150
Akademiske yrker	49620	50370	51640	53120	54970
Kontoryrker	36840	37660	38560	39720	41000
Salg og service	32510	33210	33980	34900	36140
Håndverker	36080	36890	37900	38940	40210

La *x* være antall år fra 2015. Bruk GeoGebra til å finne:

- en lineær beskrivelse av lønnsutviklingen til hver av yrkesgruppene
- en eksponentiell (prosentvis) beskrivelse av lønnsutviklingen til hver av yrkesgruppene

Syns du lønnsutviklingen til yrkesgruppene er rettferdig?

Polynomisk utvikling: $y = ax^2 + bx + c$

Felles for **lineær** og **eksponentiell utvikling** er at **utviklingen** enten er positiv eller negativ. Dersom vi skal beskrive **utvikling** som både er positiv og negativ, må vi bruke **polynomiske modeller**.

Ordet **poly** betyr flere, og en **polynofunksjon** består av flere **ledd**. En **polynomfunksjon** inneholder **variabler** med ulike eksponenter, og den høyeste eksponenten bestemmer graden.

Et **tredjegradspolynom** inneholder et **ledd** med x^3 som høyeste eksponent.

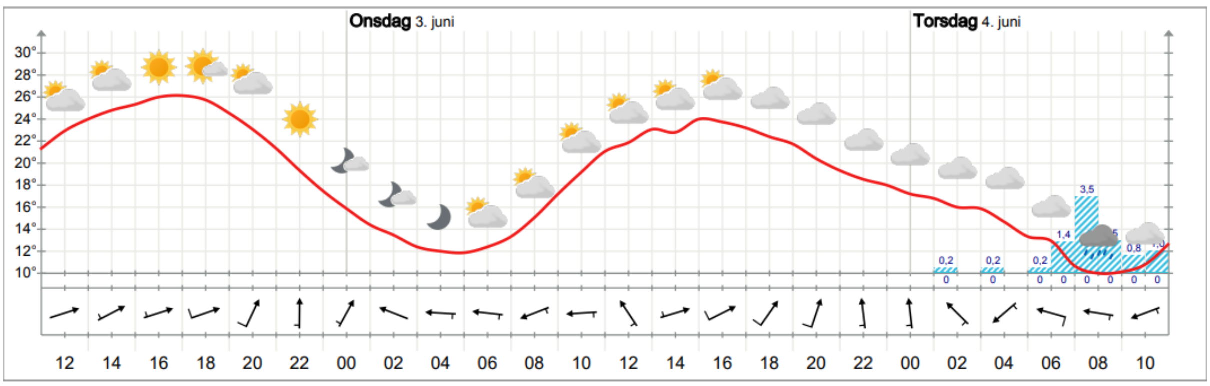
Et **andregradspolynom** inneholder et **ledd** med x^2 som høyeste eksponent.

Oppgave 35

Yr.no har følgende prognose for temperaturen på Hellerud onsdag 3. juni:

Klokkeslett	**0**	**2**	**3**	**5**	**8**	**10**	**11**	**14**	**15**	**17**	**20**	**21**	**22**	**23**
Temperatur	16	13	12	12	15	19	21	23	24	23	20	19	18	18

I tillegg bruker nettsiden følgende linjediagram for å vise den forventet temperatur samme dag:



Legg informasjonen i tabellen inn som punkter i GeoGebra, og velg en modell med en graf som ligner på linjediagrammet ovenfor.

Polynomisk utvikling utfra funksjonsuttrykk

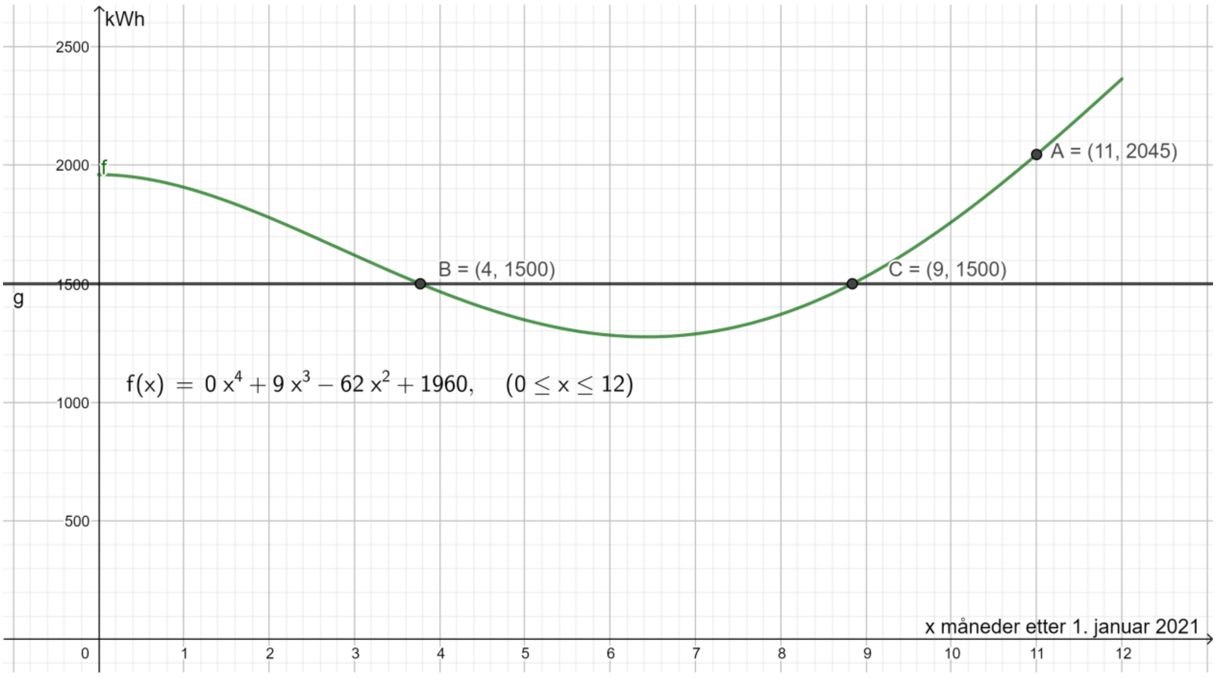
Funksjonen F gitt ved

$$F(x) = -3x^4 + 9x^3 - 62x^2 + 1960 \quad , \quad 0 \leq x \leq 12$$

er en modell som tilnærmet viser det elektriske energiforbruket $F(x)$ kWh per måned i en enebolig x måneder etter 1. januar 2021.

Dersom vi skriver inn funksjonsuttrykket i GeoGebra, kan vi bruke grafen til å finne ut for eksempel:

- Hvor høyt strømforbruket var i november (2045 kWh, se punkt A)
- I hvilke måneder strømforbruket var lavere enn 1500 kWh (fra april til septbemer, se punkt B og C).



Oppgave 36

Funksjonen *f* gitt ved

$$f(x) = -9x^3 + 270x^2 - 1400x + 3000 \quad , \quad 0 \leq x \leq 24$$

viser hvor mange personer som var logget på en nettside *x* timer etter midnatt et gitt døgn.

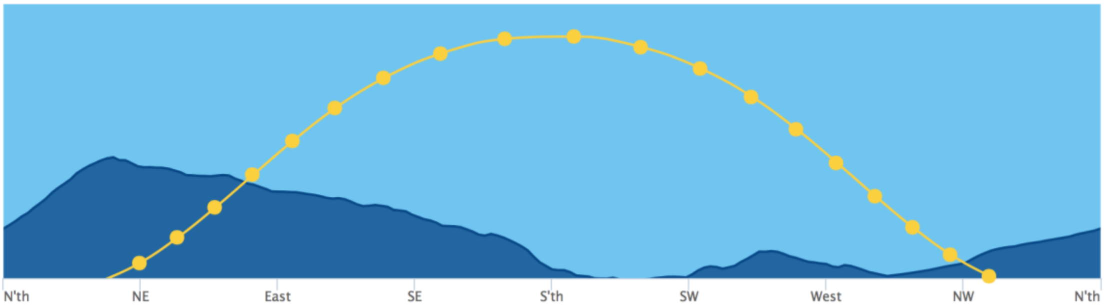
a) Bruk graftegner til å tegne grafen til f.
b) Hvor mange var pålogget nettsiden kl. 07.00?
c) Mellom hvilke klokkeslett var flere enn 7 500 pålogget nettsiden?

Oppgave 37

Funksjonen B gitt ved

$$B(x) = 0{,}006x^4 - 0{,}33x^3 + 5{,}7x^2 - 32{,}1x + 59{,}3 \quad , \quad 5 \leq x \leq 23$$

viser hvor mange grader *B(x)* sola stod over horisonten x timer etter midnatt i Bergen 21. juni 2021.



a) Bruk graftegner til å tegne grafen til B.
b) Mellom hvilke klokkeslett sto sola høyere enn 30 grader over horisonten?
c) Hvor høyt over horisonten sto sola kl. 19.30?

Oppgave 38

Funksjonene M og T gitt ved

$$M(x) = -0{,}0002x^3 + 0{,}046x^2 + 2x + 396 \quad , \quad 0 \leq x \leq 190$$
$$T(x) = -0{,}00028x^3 + 0{,}066x^2 + 2{,}2x + 295 \quad , \quad 0 \leq x \leq 190$$

viser tilnærmet daglengde, $M(x)$ minutter i Mandal og $T(x)$ minutter i Trondheim, x døgn etter 31. desember 2021.

a) Tegn grafene til M og T i samme koordinatsystem.
b) I hvor mange dager var daglengden i Mandal lengre enn daglengden i Trondheim?

Høyest eller lavest verdi – ekstremalpunkt

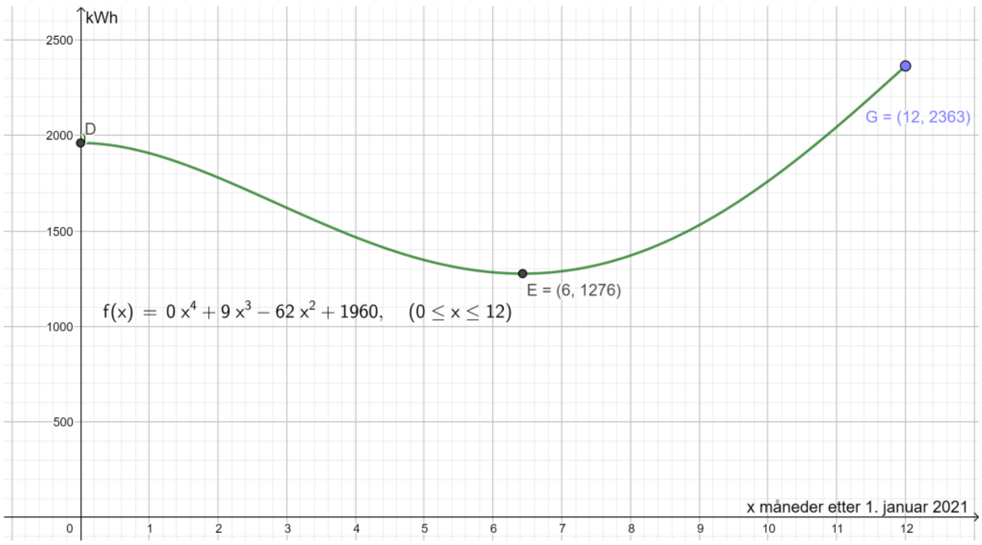
En utvikling som både stiger og synker vil ha en lavest og en høyest **funksjonsverdi**. Dette kan vi enten finne i ett av **endepunktene** til **grafen**, eller ved å bruke «Ekstremalpunkt».

Ved å velge «Ekstremalpunkt» kan du tenke at vi ber GeoGebra finne x- og y-**verdier** der **grafen** snur.

Du finner «snupunktene» ved å velge «Ekstremalpunkt» her:

Deretter trykker du hvor som helst på grafen.

Nedenfor finner vi høyest og lavest strømforbruk i forrige eksempel:



Ved å bruke «Ekstremalpunkt», finner GeoGebra snupunktene D og E. Vi kan se at punkt E er lavest på kurven, og dette forteller oss at strømforbruket var lavest i juni (1276 kWh). Høyest forbruk var i desember (2363 kWh). Avstanden fra lavest til høyest y-**verdi** kalles funksjonens **verdimengde**.

Oppgave 39

I denne oppgaven skal vi bruke funksjonen S gitt ved

$$S(x) = -3x^4 + 305x^3 - 9000x^2 + 66000x + 495000 \quad , \quad 0 \leq x \leq 50$$

som en modell for seibestanden $S(x)$ tonn i Arktis x år etter 1960.

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til S.
b) I hvor mange år var seibestanden lavere enn 450 000 tonn?
c) Når var seibestanden i Arktis på sitt laveste og sitt høyeste? Hvor stor var seibestanden da?

Oppgave 40

Anta at funksjonen A gitt ved

$$A(x) = 0{,}002x^4 - 0{,}13x^3 + 2{,}75x^2 - 18x + 118 \quad , \quad 0 \leq x \leq 30$$

kan brukes som en modell som viser verdien $A(x)$ kroner av en aksje x uker etter 01.01.2021.

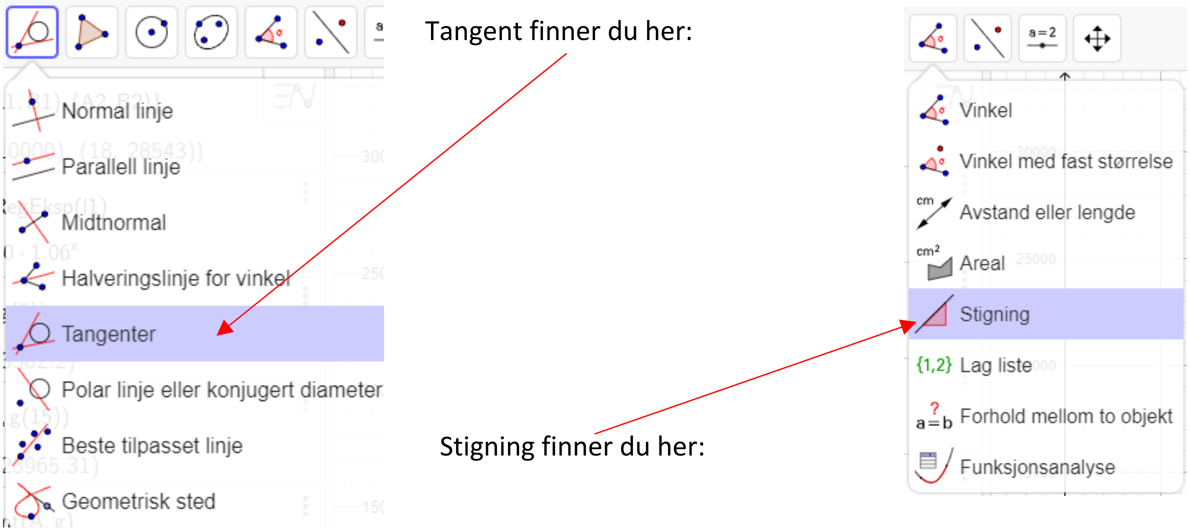
a) Bruk graftegner til å tegne grafen til A.
b) I hvor mange uker var verdien av aksjen høyere enn 92 kroner?
c) Bestem verdimengden til A.

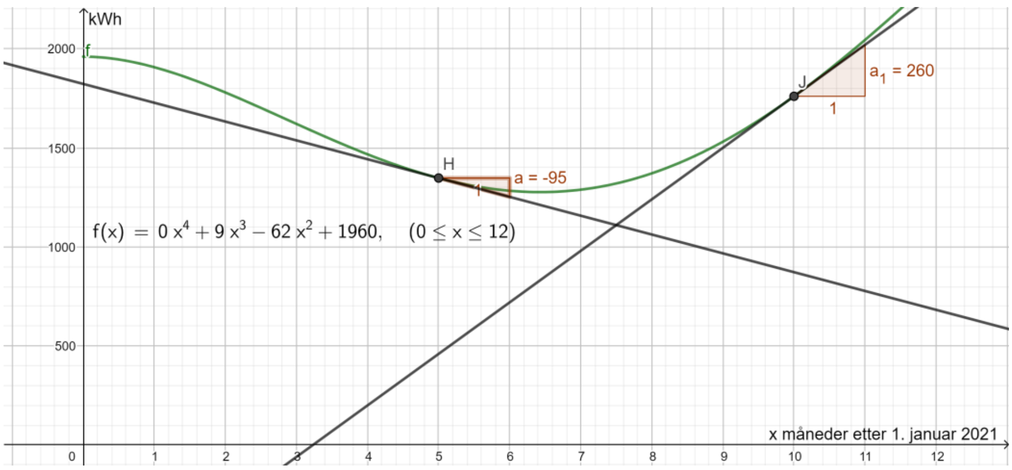
Momentan vekstfart i ett punkt

Det kan være interessant å beskrive **endringen** i y- verdi utfra ett bestemt **punkt**. Det er dette som kalles **momentan vekstfart**.

For å finne den **momentane vekstfarten** til y i ett bestemt **punkt** må vi først lage punktet. Deretter velger vi «Tangent», og trykker på **grafen** og **punktet** vi lagde. Vi er ute etter **stigningstallet** til denne tangenten. **Stigningstallet** forteller om **utviklingen** i y- **verdi** i akkurat dette **punktet**. Velg «Stigning», og trykk på begge tangentene.

I eksempelet nedenfor ønsker vi å finne den **momentane vekstfarten** i mai og oktober.





Stigningstallet til **tangenten** i punkt H forteller at i mai synker forbruket med 148 kWh per måned.

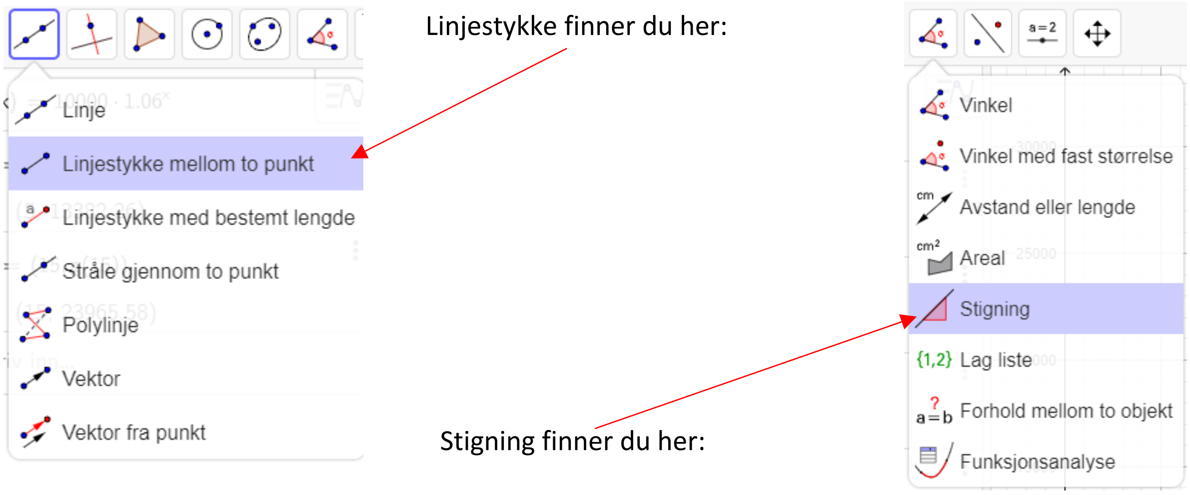
Stigningstallet til **tangenten** i punkt J forteller at i oktober stiger forbruket med 260 kWh per måned.

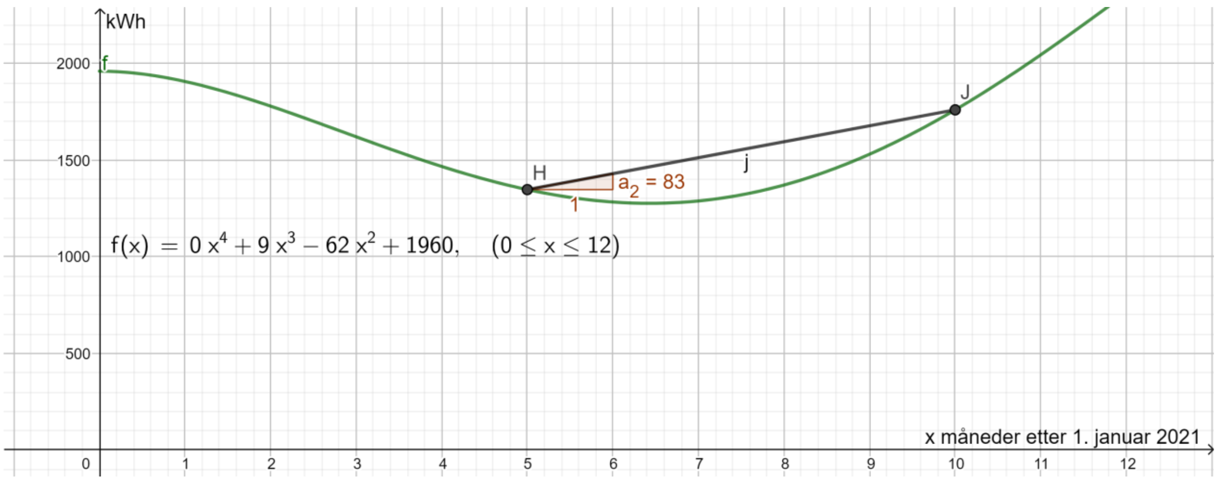
Gjennomsnittlig vekstfart mellom to punkter

Det kan også være interessant å beskrive **endringen** i y- verdi mellom to **punkter**. Det er dette som kalles **gjennomsnittlig vekstfart**.

For å finne den **gjennomsnittlige vekstfarten** til y mellom to **punkter** må vi først lage **punktene** (i dette eksempelet skal vi bruke **punkter** vi fant i forrige eksempel).

Deretter velger vi «Linjestykke mellom to punkt», og trykker på **punktene** vi lagde. Vi er ute etter **stigningstallet** til dette linjestykket. **Stigningstallet** forteller om gjennomsnittlig **utvikling** i y- **verdi** mellom disse **punktene**. Velg «Stigning», og trykk på linjestykket.





Stigningstallet til **linjestykket** forteller at strømforbruket økte i gjennomsnitt med 83 kWh per måned fra mai til oktober.

Oppgave 41

Kari tapper ut vannet av en badestamp. Volumet V liter av vannet i badestampen x minutter etter at hun har åpnet kranen, er gitt ved

$$V(x) = 2 \cdot (30 - x)^2 \quad , \quad 0 \leq x \leq 30$$

a) Tegn grafen til V.
b) Hvor mye vann renner i gjennomsnitt ut per minutt fra Kari åpner krana, til badestampen er tom?
c) Bestem den momentane vekstfarten til funksjonen V når $x = 10$.
   Gi en praktisk tolkning av svaret.

Oppgave 42

Funksjonen h gitt ved

$$h(x) = -0{,}0005x^3 + 0{,}04x^2 \quad , \quad 0 \leq x \leq 50$$

er en modell som viser høyden $h(x)$ cm til en plante, x dager etter at planten har begynt å spire.

a) Tegn grafen til h.
b) Finn den momentane vekstfarten til $h(10)$.
   Gi en praktisk tolkning av svaret.
c) Finn stigningstallet til den rette linja som går gjennom punktene $(10, h(10))$ og $(40, h(40))$.
   Gi en praktisk tolkning av svaret.

En eksamensoppgave

En nettbutikk vil starte salg av en ny type ski 1. november 2022.

Anta at funksjonen S gitt ved

$$S(x) = 0{,}75x^3 - 59{,}5x^2 + 1200x \quad , \quad 0 \leq x \leq 52$$

kan brukes som en modell for hvor mange par ski $S(x)$ butikken vil kunne selge per uke x uker etter salgsstart.

a) Hvor mange uker vil butikken kunne selge mer enn 5000 par ski, ifølge modellen?
b) Bestem stigningstallet til den rette linja som går gjennom punktene $(0, S(0))$ og $(12, S(12))$. Gi en praktisk tolkning av svaret.

En eksamensoppgave

Et firma produserer vanntanker. Carl har undersøkt en av tankene og funnet ut at dersom tanken er full og kranen åpnes, vil det etter x minutter være $V(x)$ liter vann igjen i tanken, der

$$V(x) = (10 - 0{,}1x^2)^3 \quad , \quad 0 \leq x \leq 10$$

a) Bestem $V(0)$, og gi en praktisk tolkning av svaret du får.
b) Bruk graftegner til å tegne grafen til V.
c) Hvor lang tid går det fra kranen åpnes, til det er 400 L vann igjen i tanken?
d) Hvor mye vann renner i gjennomsnitt ut av tanken per minutt mens den tømmes?
e) Bestem den momentane vekstfarten til funksjonen V når $x = 3$.
G en praktisk tolkning av svaret du får.

En eksamensoppgave

En dyrebestand består i dag av 500 dyr. En forsker antar at bestanden vil doble seg i løpet av de neste 10 årene.

a) Sett opp en modell $L(x)$ som viser hvor mange dyr det vil være i bestanden om x år, dersom vi antar at bestanden øker lineært.

b) Sett opp en modell $E(x)$ som viser hvor mange dyr det vil være i bestanden om x år, dersom vi antar at bestanden øker eksponentielt.

c) Tegn grafen til funksjonen F gitt ved

$$F(x) = L(x) - E(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq 13$$

d) Bestem toppunktet på grafen til F, og skjæringspunktene mellom grafen til F og hver av de rette linjene $x = 12$ og $y = 12$.
Gi en praktisk tolkning av svarene du får.

Presentasjonsoppgave

Tabellen nedenfor viser det månedlige strømforbruket til en enebolig i Oslo i 2019.

Måned	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
kWh	2800	2230	2360	1420	1410	1190	720	1070	1180	1800	2430	2520

I tillegg får du vite at den gjennomsnittlige strømprisen i 2019 var 112,6 øre/kWh.

Bruk informasjonen over til å finne interessant informasjon om strømforbruket til boligen.

Løsningsforslag

Oppgave 1

Dette er en lineær modell fordi pennene veier like mye, og vekten vil øke med det samme for hver penn som legges i koppen.

Finner ved regresjon modellen $f(x) = 20x + 150$

hvor x er antall penner som blir lagt i koppen.
Funksjonsuttrykket forteller at hver penn veier 20 gram, mens koppen veier 150 gram.

Oppgave 2

Ved regresjon finner vi modellen $y = 15x + 605$

Funksjonsuttrykket forteller at det var 605 elever ved skolens oppstart, og at elevtallet øker med 15 elever per år.

Oppgave 3

Finner ved regresjon modellen $y = -12x + 280$

Funksjonsuttrykket forteller at antall kaniner synker med 12 for hver måned.

Oppgave 4
Liv må øke treningen med 7,5 minutter per uke for å nå dette målet.
Det er vanskelig å sette en begrensning for Liv, men noe særlig mer enn 1 time hver dag (420 minutter i uka) er lite trolig at hun klarer. Vi tror derfor at modellen er gyldig for $x \in [0,49]$

Oppgave 5
Modellen forteller at ungdommen får 250 kroner for oppmøtet, og 80 kroner per time.

$$y = 80\,x + 250$$

Vi tenker at ungdommen kan jobbe fra 2 til 6 timer barnevakt per gang. I så fall er modellen gyldig for $x \in [2,6]$

Oppgave 6

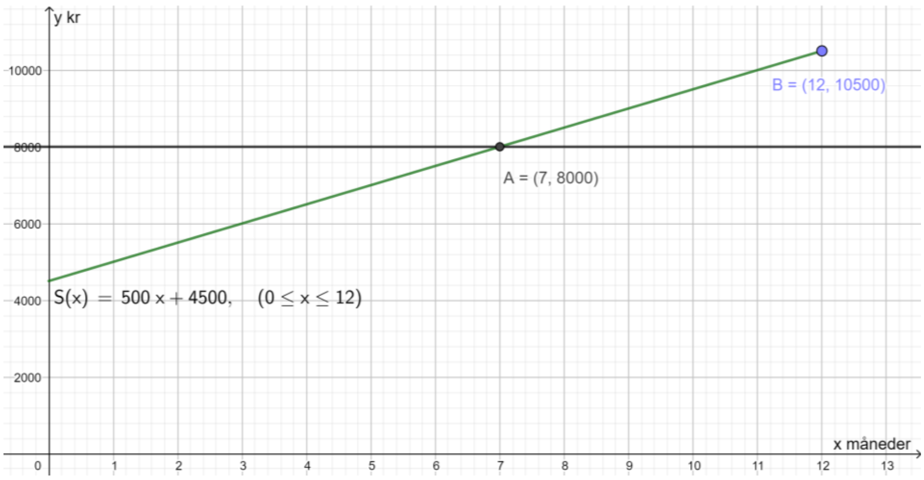
Ved regresjon finner vi modellen $y = 250x + 450$

Modellen forteller at Kaia hadde 450 kr da hun begynte sparinga, og at hun sparer 250 kr hver måned.

Oppgaven forteller at hun skal spare i ett år. Modellens gyldighet er dermed for $x \in [0,12]$

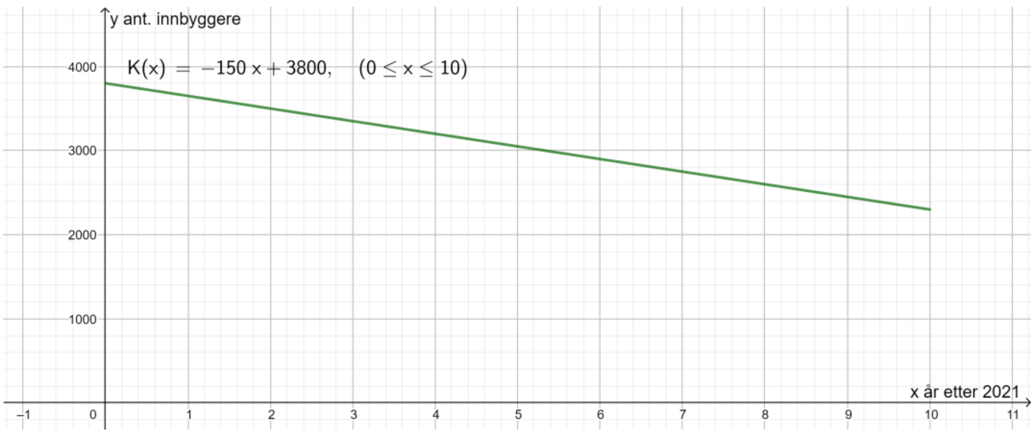
Oppgave 7

Funksjonsuttrykket forteller at Mathias har 4 500 kroner på sparekontoen når han begynner å spare, og at han sparer 500 kroner per måned.
Punkt A forteller at det tar 7 måneder før sparekontoen passerer 8 000 kroner, mens punkt B forteller at han har 10 500 kroner på kontoen etter å ha spart i ett år.



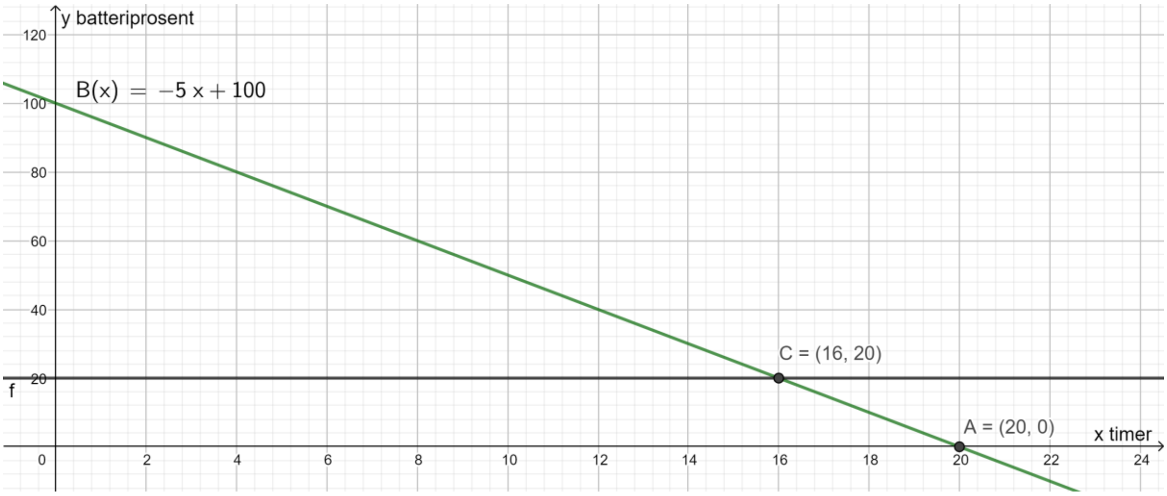
Oppgave 8

Funksjonsuttrykket forteller at det var 3 800 innbyggere i 2021, og at innbyggertallet synker med 150 per år.



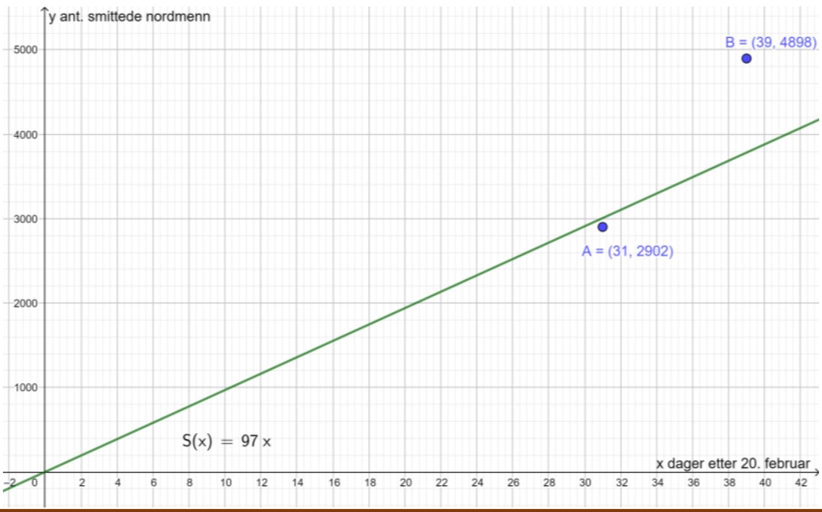
Oppgave 9

Funksjonsuttrykket forteller at batterinivået synker med 5 prosentpoeng per time ved normal bruk. Modellen er i beste fall gyldig frem til telefonen er tom for strøm, som ifølge modellen inntreffer etter 20 timer.
Imidlertid har de fleste telefoner en innstilling som gjør at strømforbruket reduseres når batterinivået er lavere enn 20 %. Det betyr at modellen kun er gyldig frem til punkt B, altså 16 timer. Vi vurderer derfor funksjonen til å være gyldig for $x \in [0,16]$



Oppgave 10

Ifølge modellen er antall dager og antall smittede proporsjonale størrelser, og antall smittede øker med 97 per dag.
Modellen stemmer relativt bra med punkt A, men kan ikke brukes til å forklare utviklingen etter 31 dager. Antall smittede nordmenn økte derfor ikke lineært i denne perioden, og vi må derfor bruke en annen modell for å beskrive utviklingen i antall smittede etter 22. mars.



Eksamensoppgave side 109

Jacob tjener ($0{,}075 \cdot 150000 + 32\,000 =$) 43 250 kroner denne måneden.

Eksamensoppgave side 109

Sarah må selge 20 bøker for at timelønna skal bli 450 kroner

$y = 15\,x + 150$

Symbolsk utregning: x = 20 y = 450

Eksamensoppgave side 110

a) Grafen som beskriver prisen Markus må betale hos firma *A* er ei rett linje som går gjennom punktene $(0{,}600)$ og $(25{,}700)$.

Da er stigningstallet $\frac{700-600}{25-0} = \frac{100}{25} = 4$.

Punktet $(0{,}600)$ forteller dessuten at konstantleddet er 600.

Linja er altså grafen til $A(x) = 4x + 600$, <u>som skulle forklares</u>.

b) Leser av grafen og ser at totalprisen blir 1000 kroner hos firma B dersom Markus kjører 50 km.

$$\frac{1000kr}{50km} = 20\,{}^{kr}\!/_{km}$$

Ser også av grafen at totalprisen øker med 200 kroner per 100 kilometer, så det må bli 1700 kroner totalt for 400 km når det er 1500 kroner totalt for 300 km.

$$\frac{1700kr}{400km} = 4{,}25\,{}^{kr}\!/_{km}$$

<u>Hos firma *B* blir prisen 20 kr per kilometer dersom Markus kjører 50 km, mens prisen blir 4,25 kr per kilometer dersom han kjører 400 kilometer.</u>

c) $9{,}7mil \cdot 2 = 97km \cdot 2 = 194km$, så turen er altså på totalt 194 kilometer.
Vi ser av de ulike grafene at det er firma C som lønner seg her.
<u>Markus bør leie bil hos firma C</u>.

Oppgave 11

-7 %	=	93 %	=	0,93	- 2,2 %	=	97,8 %	=	0,978
+ 7 %	=	107 %	=	1,07	+ 0,4 %	=	100,4 %	=	1,004
- 7,5 %	=	92,5 %	=	0,925	- 17,5 %	=	82,5 %	=	0,825
+ 12,3%	=	112,3 %	=	1,1123	+ 200 %	=	300 %	=	3
+ 20 %	=	120 %	=	1,2	+ 250 %	=	350 %	=	3,5
- 10 %	=	90 %	=	0,9	- 100 %	=	0 %	=	0
- 13 %	=	87 %	=	0,87	- 1,2 %	=	98,8 %	=	0,988
+ 40 %	=	140 %	=	1,4	+ 0,7 %	=	100,7 %	=	1,007
+ 100 %	=	200 %	=	2	+ 0,2 %	=	100,2 %	=	1,002
- 30 %	=	70 %	=	0,7	- 25 %	=	75 %	=	0,75

Oppgave	**Svar**	**Oppgave**	**Svar**
13	2 817 500 kr	**19**	11 592,74 kr
14	9 600 kr	**20**	3 100 kr
15	166,88 kr/time	**21**	135,54 kr
16	66,10 kr		
17	4,5 millioner kroner	**22**	Knut betalte 320 000 kr for bilen, han antar at bilens verdi synker med 15 % hvert år, og han skal selge bilen etter 5 år for omtrent 142 000 kroner.
18	a) 15 000 betyr kjøpesummen, 1,05 betyr en verdiøkning på 5 % b) 140 betyr antall elever ved skolestart .0,875 betyr at 12,5 % har sluttet.		

Eksamensoppgave side 116

Dobling hvert 20.miutt betyr tre doblinger per time, som da blir 36 doblinger i løpet av 12 timer.

$2^{36} = 68719476736$

Det vil være 68 719 476 736 bakterier etter 12 timer. (altså ca.68,7 milliarder).

Eksamensoppgave side 117

a)

Ett verdifall på 20 % gir en vekstfaktor på 0,8. Et videre fall på 14 % gir et totalt fall på $0,8 \cdot 0,86 = 0,688$. 1 - 0.688 = 0,312 = 31%.

b)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3								
4			Nybilpris	390000	kr			
5								
6				Verdifall i prosent		Verdfall i kroner		Bilens verdi
7			År	fra fjoråret	fra nyverdi	fra fjorår	fra nyverdi	
8			1	20 %	20.0 %	78000	78000	312000
9			2	14 %	31.2 %	43680	121680	268320
10			3	13 %	40.1 %	34882	156562	233438
11			4	12 %	47.3 %	28013	184574	205426
12			5	11 %	53.1 %	22597	207171	182829
13			6	10 %	57.8 %	18283	225454	164546

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3								
4			Nybilpris	390000	kr			
5								
6					Verdifall i prosent	Verdfall i kroner		Bilens verdi
7			År	fra fjoråret	fra nyverdi	fra fjorår	fra nyverdi	
8			1	0.2	=D8	=D4*D8/100%	=F8	=D4-F8
9			2	0.14	=100% -(100%-E8)*(100%-D9)	=H8*D9	=G8+F9	=H8-F9
10			3	0.13	=100% -(100%-E9)*(100%-D10)	=H9*D10	=G9+F10	=H9-F10
11			4	0.12	=100% -(100%-E10)*(100%-D11)	=H10*D11	=G10+F11	=H10-F11
12			5	0.11	=100% -(100%-E11)*(100%-D12)	=H11*D12	=G11+F12	=H11-F12
13			6	0.1	=100% -(100%-E12)*(100%-D13)	=H12*D13	=G12+F13	=H12-F13
14								

c)

Se figur i b.

Oppgave 23

Vekstfaktoren 1,05 forteller at antall elever øker med 5 % hvert år.

Oppgave 24

Vekstfaktoren 0,93 forteller at antall elever synker med 7 % hvert år.

Eksamensoppgave side 121

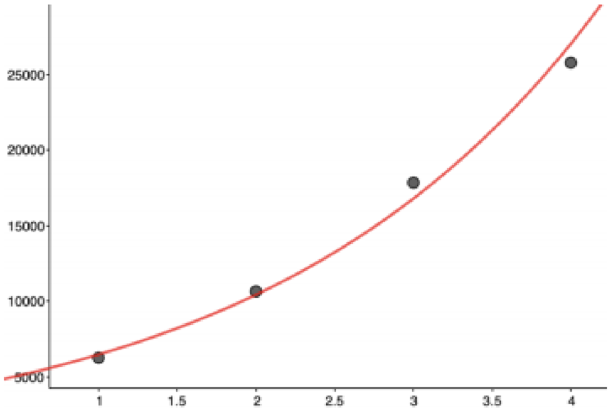
Har brukt regresjon til å vise at modellen passer godt med tallene i tabellen.
1,006 er en vekstfaktor, som forteller at folketallet i Norge øker med 0,6 % per år

Eksamensoppgave side 121

	A	B
1	1	6278
2	2	10660
3	3	17837
4	4	25761

X: A1:A4

Y: B1:B4



Regresjonsmodell

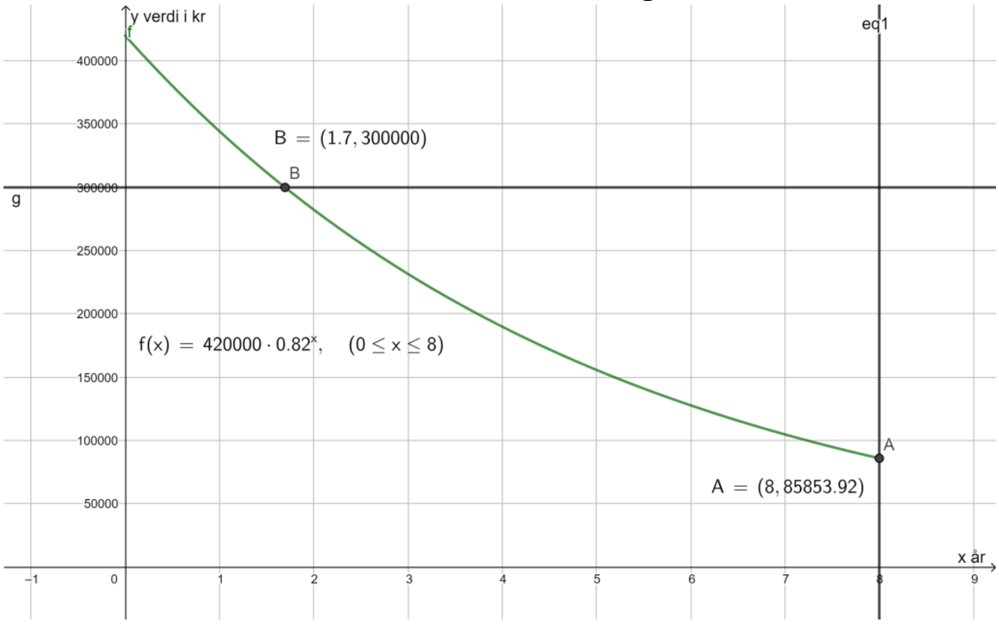
$y = 4038.4858 \cdot 1.608^{x}$

Eksponentiell

b) Jeg ser at vekstfaktoren er 1,608.
Det betyr at antall registrert smittede økte med 60,8 % per måned.

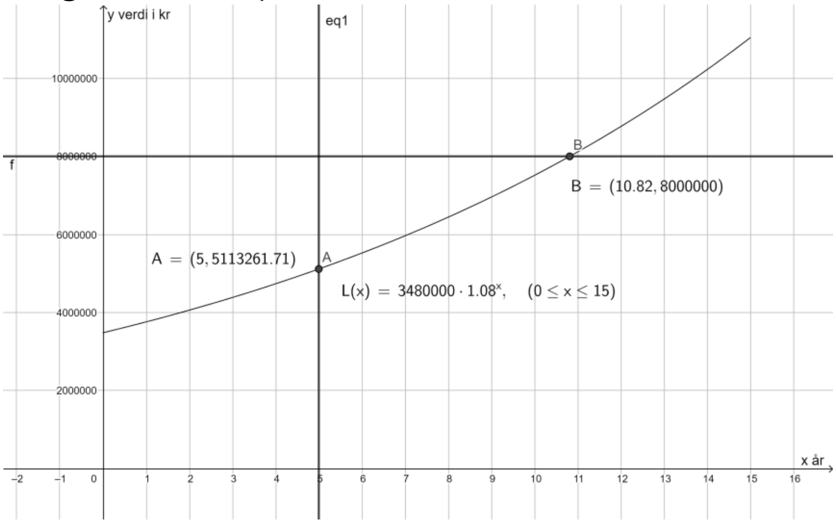
Oppgave 25

Forslag til interessant informasjon:
Funksjonsuttrykket forteller at familien betalte 420 000 kroner for bilen, og at bilens verdi synker med 18 % per år.
Familien kan forvente å få ca. 86 000 kroner for bilen dersom de selger bilen om 8 år.
Ønsker de 300 000 kroner for bilen må de selge den innen 2 år.



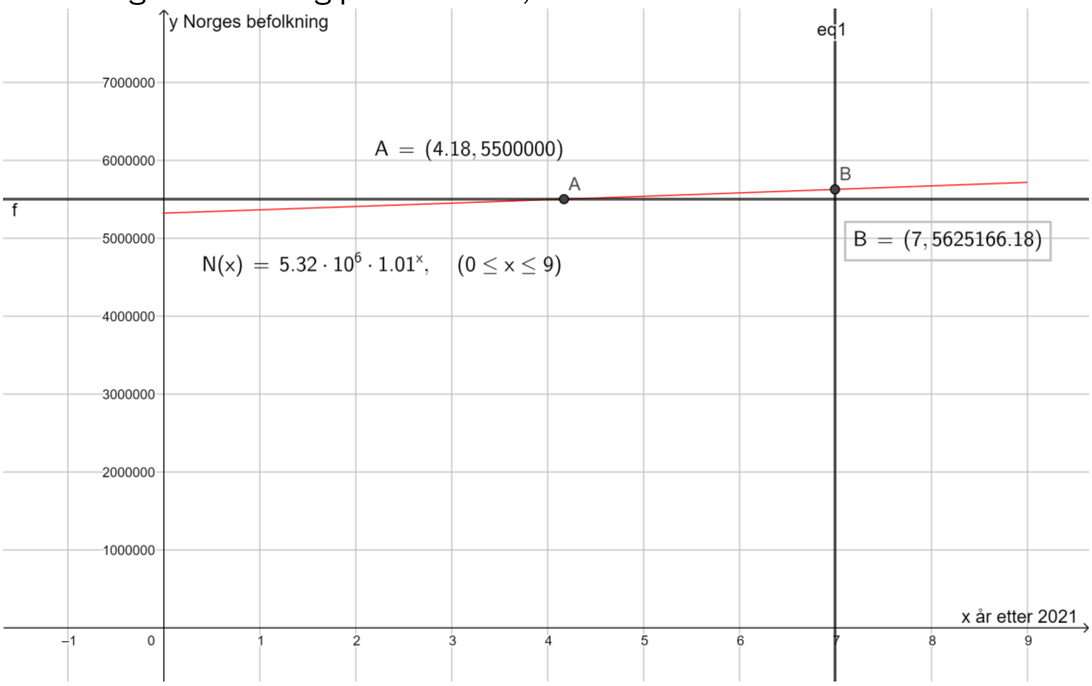
Oppgave 26

Forslag til interessant informasjon:
Funksjonsuttrykket forteller at familien betalte 3 480 000 kroner for leiligheten, og at leilighetens verdi øker med 8 % per år.
Etter 5 år er leilighetens verdi omtrent 5,1 millioner kroner.
Leilighetens verdi passerer 8 millioner kroner etter 11 år.

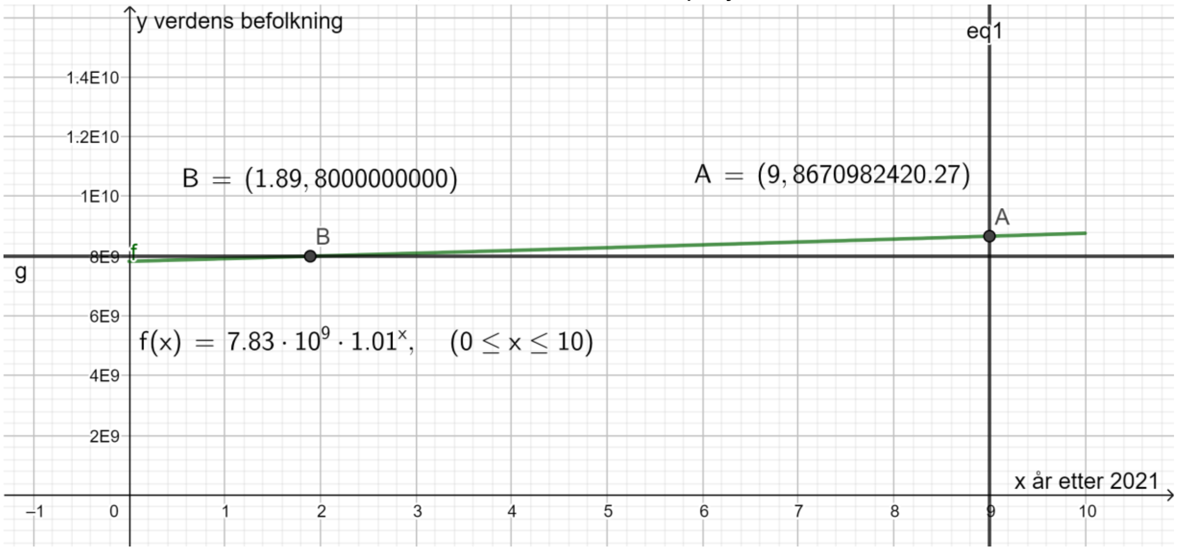


Oppgave 27

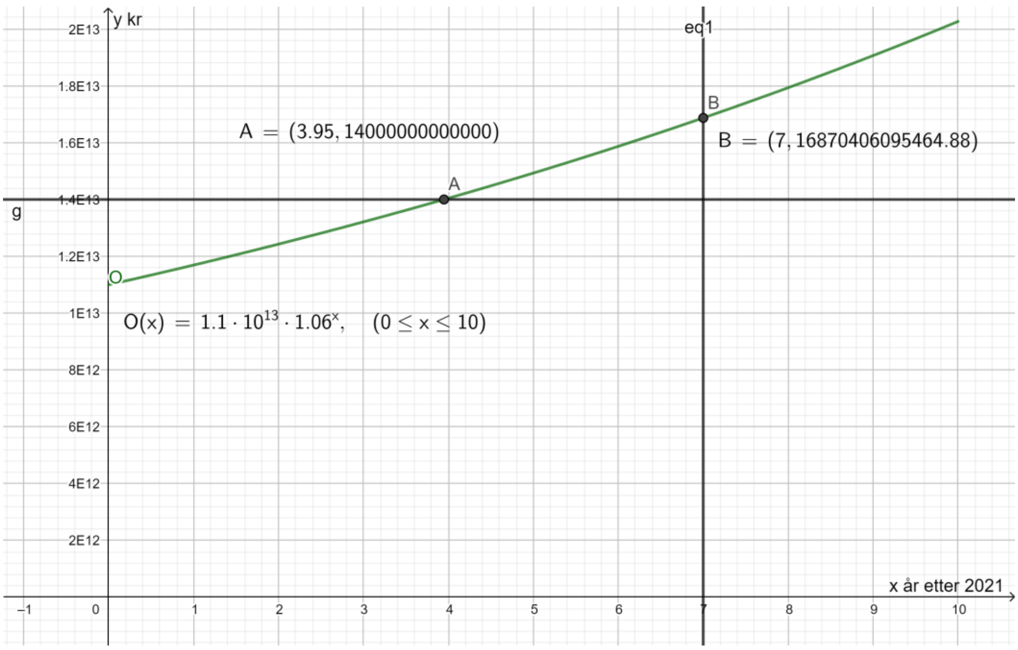
Forslag til interessant informasjon
Funksjonsuttrykket forteller at folketallet i Norge ved inngangen til 2021 er 5,32 millioner og at folketallet øker med 0,8 % per år.
Norges innbyggertall passerer 5,5 millioner i 2025.
I 2028 er Norges befolkning på omtrent 5,6 millioner mennesker.



Oppgave 28
Forslag til interessant informasjon:
Funksjonsuttrykket forteller at folketallet i verden ved inngangen til 2021 er 7,83 milliarder og at folketallet øker med 1,14 % per år.
Jordens befolkning vil passere 8 mrd. i 2023.
I 2030 vil det være omtrent 8,7 mrd. mennesker på jorda



Oppgave 29
Forslag til interessant informasjon:
Funksjonsuttrykket forteller at verdien til Oljefondet inngangen til 2021 er på svimlende 11 000 milliarder kroner, og at verdien til Oljefondet øker med 6,3 % per år.
Oljefondets verdi passerer 14 000 mrd. kroner i 2025. I 2028 vil oljefondets verdi være på omtrent 17 000 mrd. kroner



Oppgave 30

Vekstfaktor på 0,83 betyr en nedgang i temperatur på 17 % per minutt. Tallet 20 indikerer romtemperatur, og funksjonsuttrykket er skrevet på denne måten for at verdien ikke skal synke under 20 grader. Modellen er dermed gyldig frem til romtemperaturen endres, eller kaffekoppen flyttes til en lokasjon med annen temperatur.

Oppgave 31

Funksjonsuttrykket forteller at Oslos innbyggertall er 697 000, og at innbyggertallet vil vokse med 0,8 % i årene fremover.

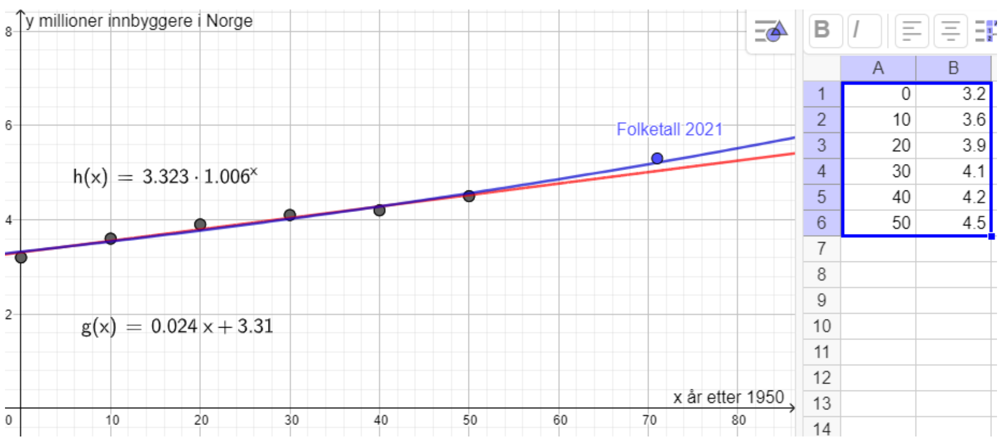
SSB spår følgende om antall innbyggere i Oslo i to utvalgte år:

Kilde: https://www.ssb.no/kommunefakta/oslo

Sammenlignet med disse tallene er modellen troverdig frem til 2030, men viser for høyt folketall i 2050. Det betyr at modellen vil bli upålitelig etter 2030.

Oppgave 32

a) En lineær modell som beskriver utviklingen: $0{,}024x + 3{,}31$. Denne modellen forteller at antall innbyggere i Norge øker med 24 000 per år.
b) En eksponentiell modell som beskriver utviklingen: $3{,}323 \cdot 1{,}006^x$. Denne modellen forteller at antall innbyggere i Norge øker med 0,6 % per år.
c) Sammenlignet med dagens folketall fremstår befolkningsutviklingen å være eksponentiell.

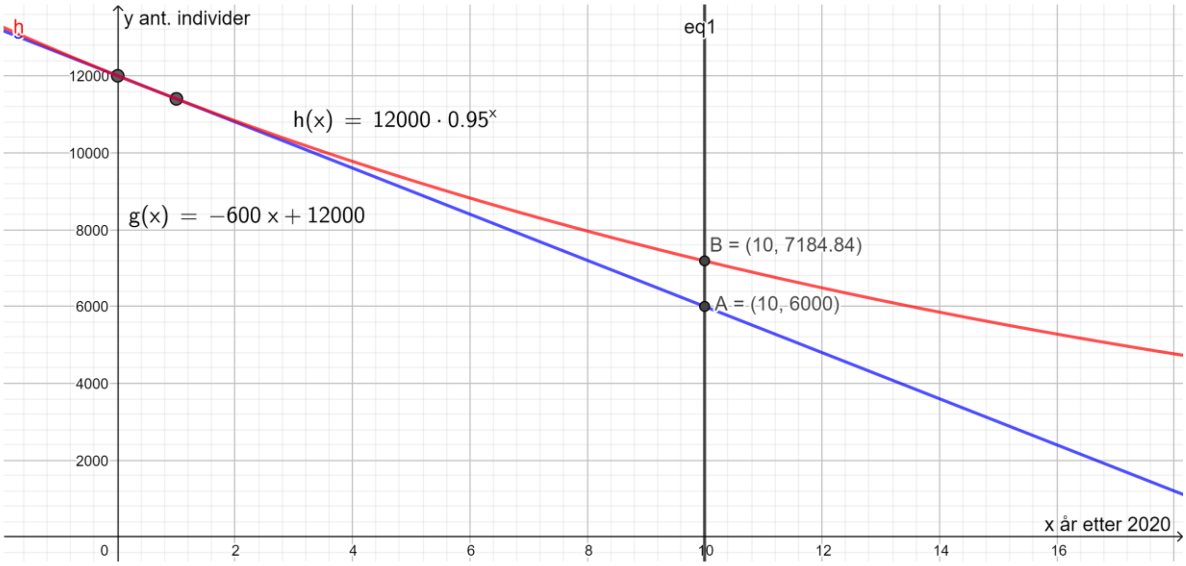


Oppgave 33

a) En lineær modell som beskriver utviklingen: $-600x + 12000$. Modellen forteller at antall individer synker med 600 per år.

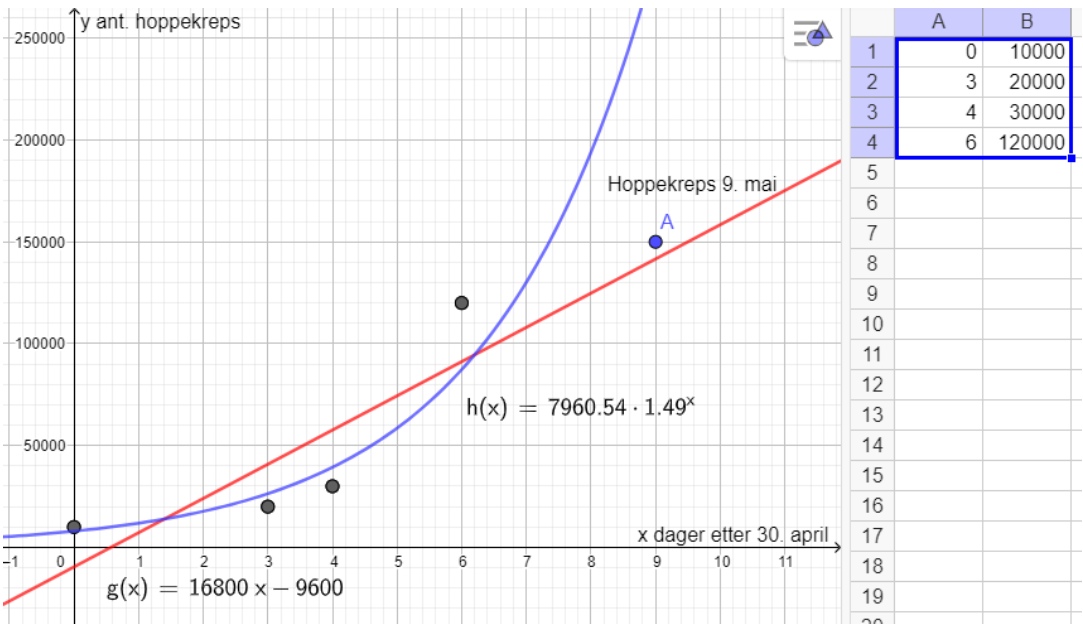
b) En eksponentiell modell som beskriver utviklingen: $12000 \cdot 0{,}95^x$. Modellen forteller at antall individer synker med 5 % hvert år.

c) Det fremstår som om forskerne antar at utviklingen i dyrebestanden avtar lineært.



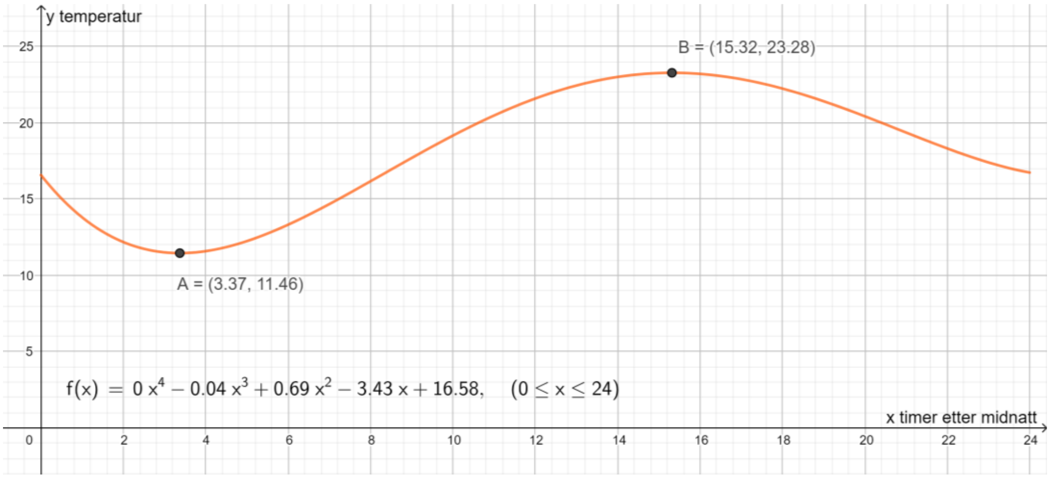
Oppgave 34

Ifølge Lars øker antall hoppekreps med 16 800 per dag.
Ifølge Lene øker antall hoppekreps med 49 % per dag.
Sammenlignet med antall hoppekreps 9. mai kan det kan virke som om utviklingen i antall hoppekreps bør beskrives lineært.



Oppgave 35

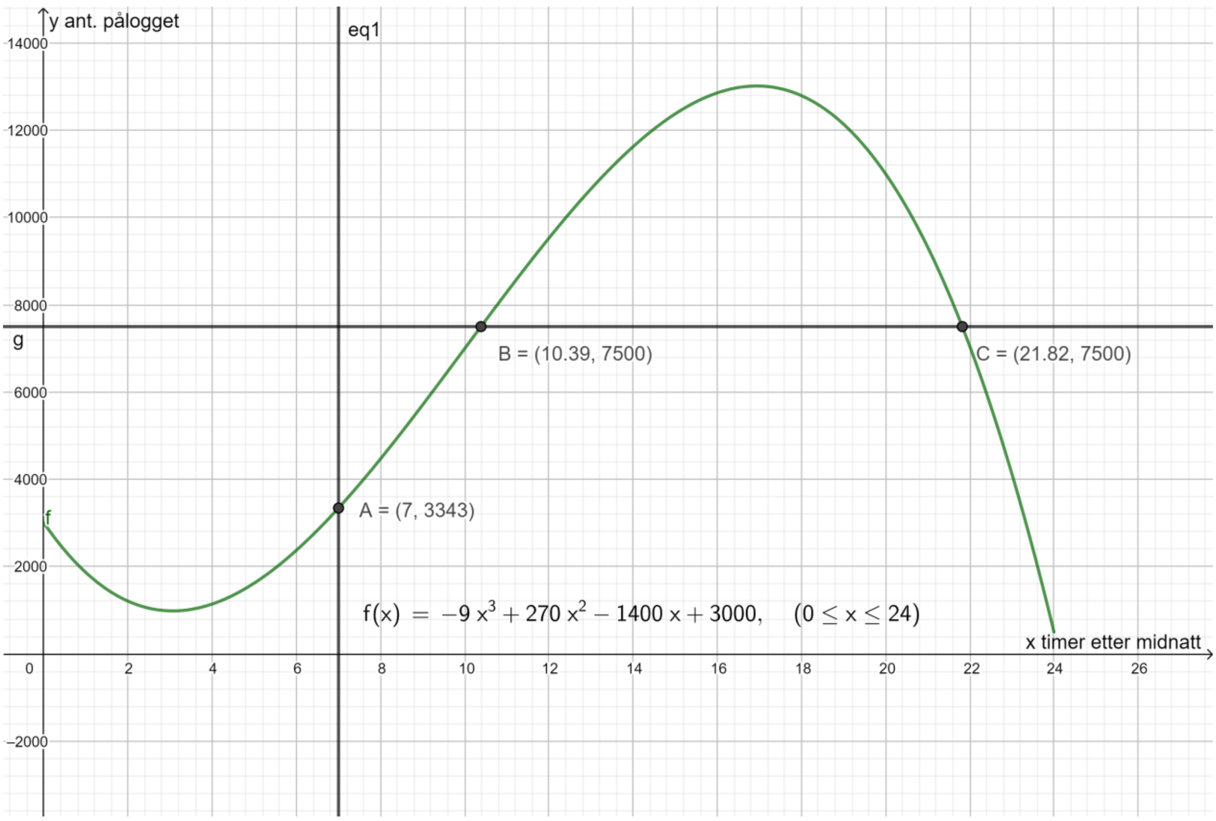
Vi valgte å bruke en polynommodell av 4. grad for å beskrive utviklingen i temperatur. Ifølge modellen vil høyeste temperatur være 23,3 ℃, og laveste temperatur vil være 11,5 ℃.



Oppgave 36

b) Kl. 07.00 var 3343 pålogget nettsiden.

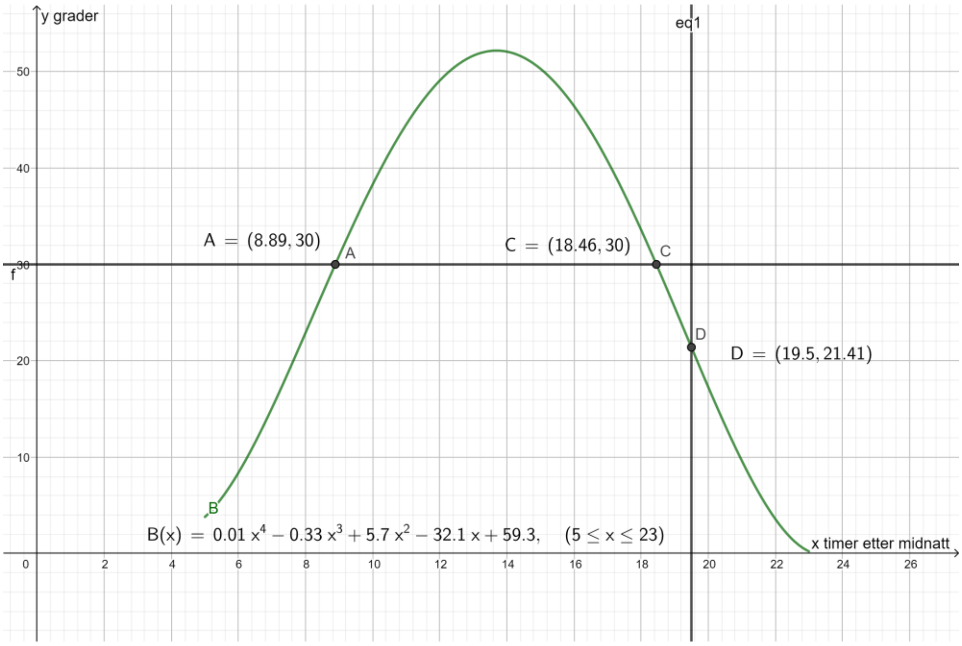
c) Det var mer enn 7500 pålogget nettsiden mellom 10.23 og 21.49 (husk at desimaltimer må gjøres om til timer og minutter).



Oppgave 37

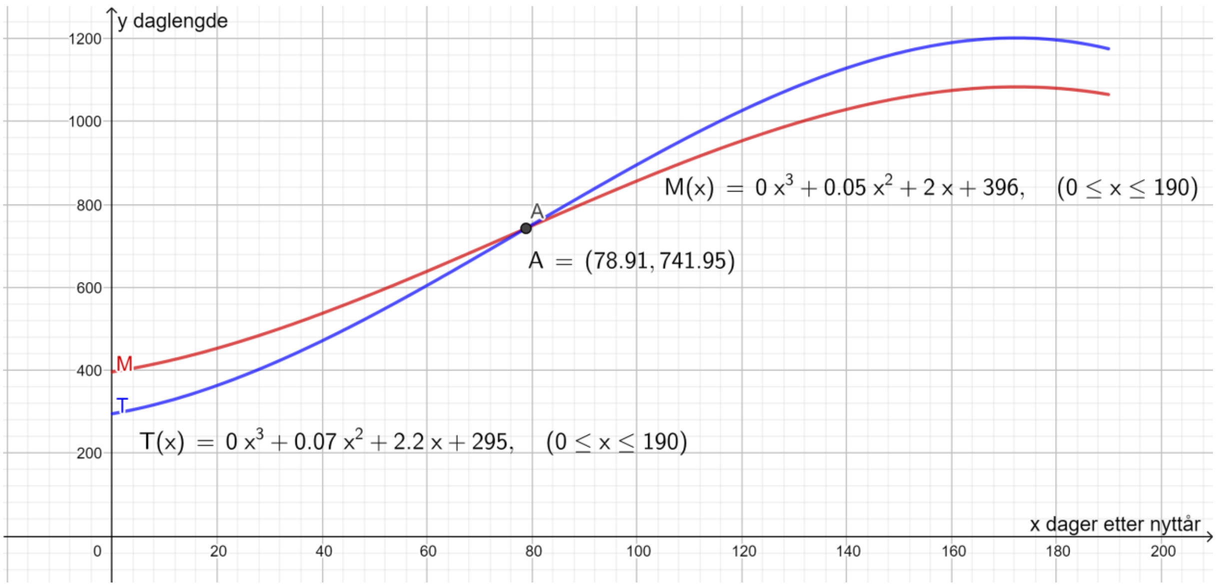
b) Solen sto høyere enn 30 grader over horisonten mellom kl. 8.53 og 18.27 (husk at desimaltimer må gjøres om til timer og minutter).

c) Kl. 19.30 sto solen omtrent 21 grader over horisonten.



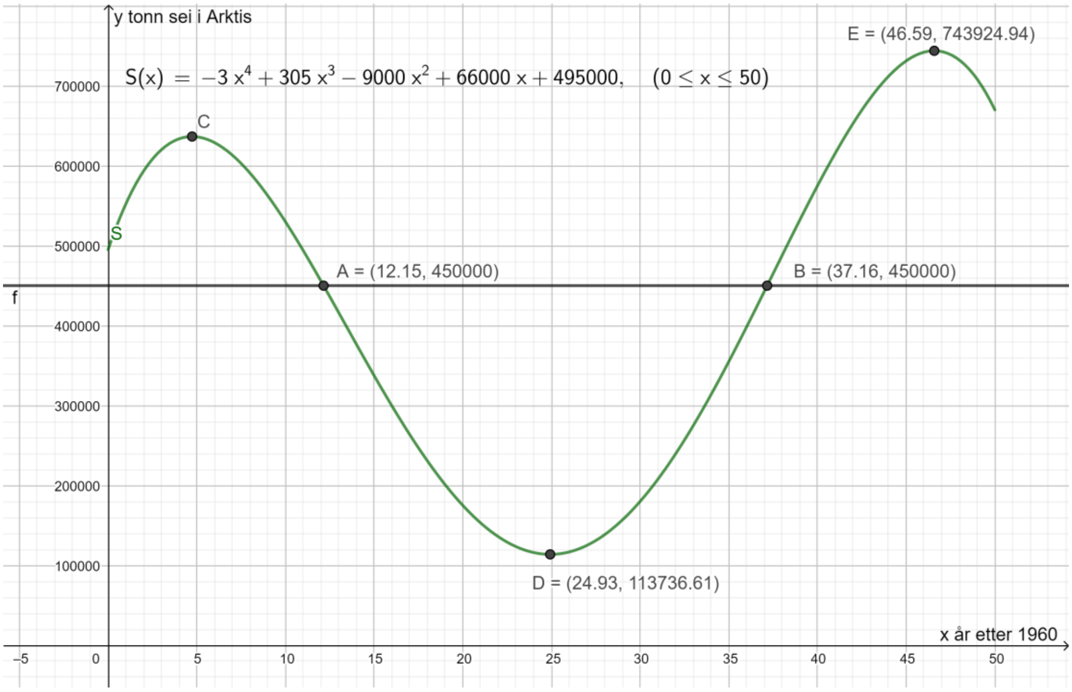
Oppgave 38

b) Etter 79 dager var daglengden lik i Mandal og Trondheim. Det betyr at daglengden var lengre i Mandal enn i Trondheim de første 78 dagene.



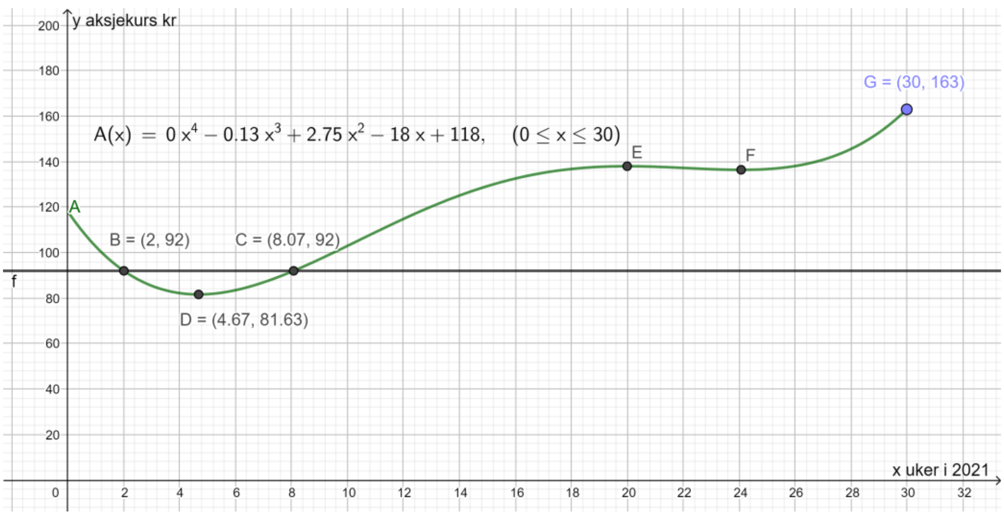
Oppgave 39

b) Seibestanden var lavere enn 450 000 tonn i 25 år, fra 1972 til 1997.
c) Sebestanden var på sitt laveste i 1985 (ca. 114 000 tonn), og på sitt høyeste i 2006 (omtrent 744 000 tonn).



Oppgave 40

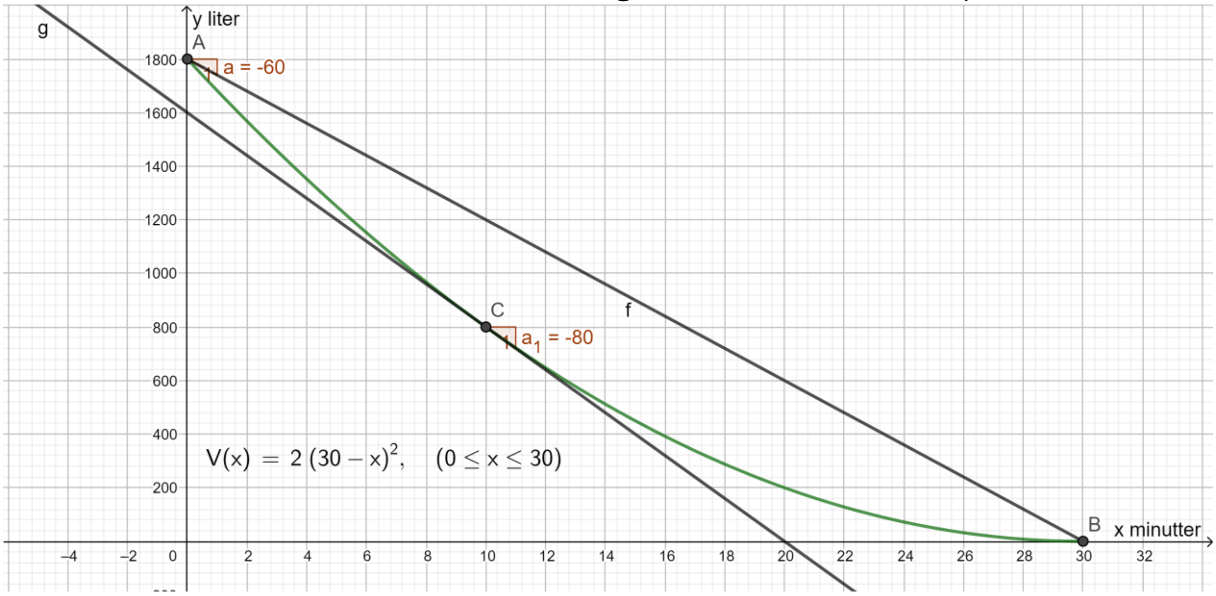
b) Aksjekursen var høyere enn 92 kroner de første to ukene, og deretter fra uke 8 til uke 30. Til sammen blir dette 24 uker.
c) Verdimengden til A er fra 81,63 til 163.



Oppgave 41

b) Det renner i gjennomsnitt ut 60 liter vann per minutt fra Kari åpner krana, til badestampen er tom.

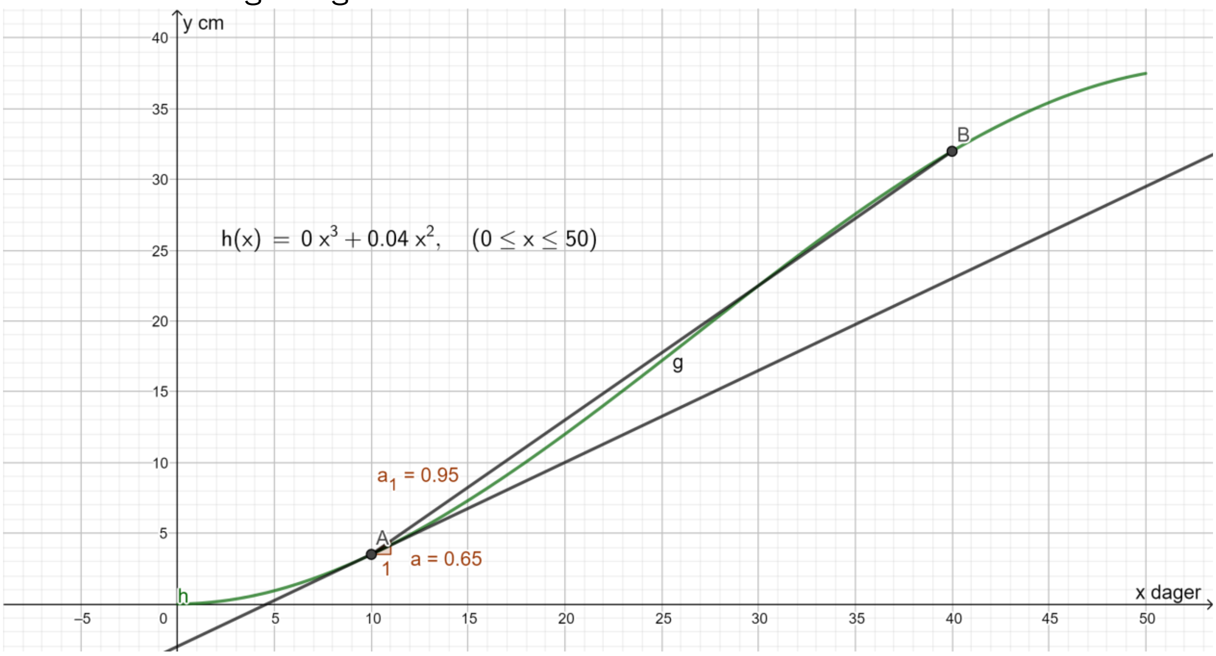
c) Den momentane vekstfarten til V når $x = 10$ er − 80. Det betyr at i det tiende minutt renner vannet ut med en hastighet tilsvarende 80 liter per minutt.



Oppgave 42

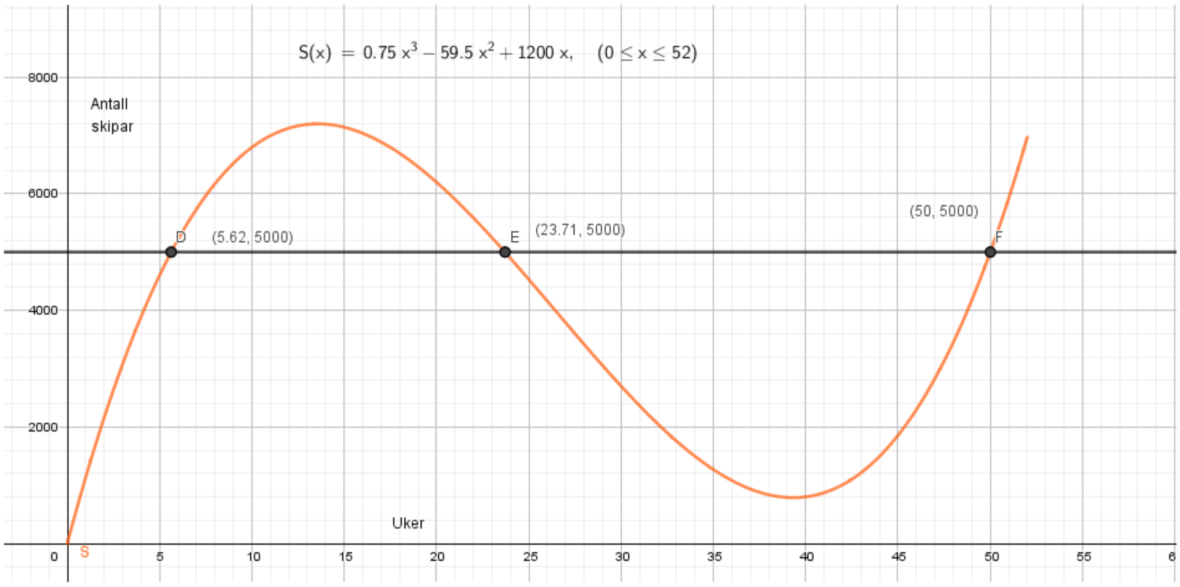
b) Den momentane vekstfarten til $h(10)$ er 0,65. Det betyr at i dag 10 vokser planten med en hastighet på 0,65 cm per dag.

c) Stigningstallet til den rette linja som går gjennom punktene $(10, h(10))$ og $(40, h(40))$ er 0,95. Det betyr at planten vokser i gjennomsnitt 0,95 cm per dag mellom dag 10 og 40.



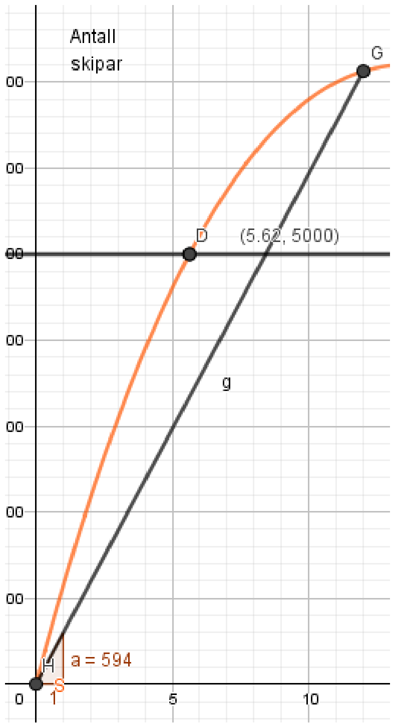
Eksamensoppgave side 139

a)



Tegner grafen til funksjonen S i Geogebra. Lager linja y=5000 og finner skjæringspunktene mellom linja og grafen til S. Ser at butikken kan selge mer enn 5000 par ski fra uke 5.6 til uke 23.7 (litt over 18 uker), og fra uke 50 til 52 (2 uker). Det vil si at butikken kan selge mer enn 5000 par ski i ca. 20 uker, ifølge modellen.

b)



Stigningstallet er 594, det betyr at i årets første 12 uker øker skisalget i gjennomsnitt med ca. 600 par i uken.

Eksamensoppgave side 139

a) $V(0) = (10 - 0{,}1 \cdot 0^2)^3$

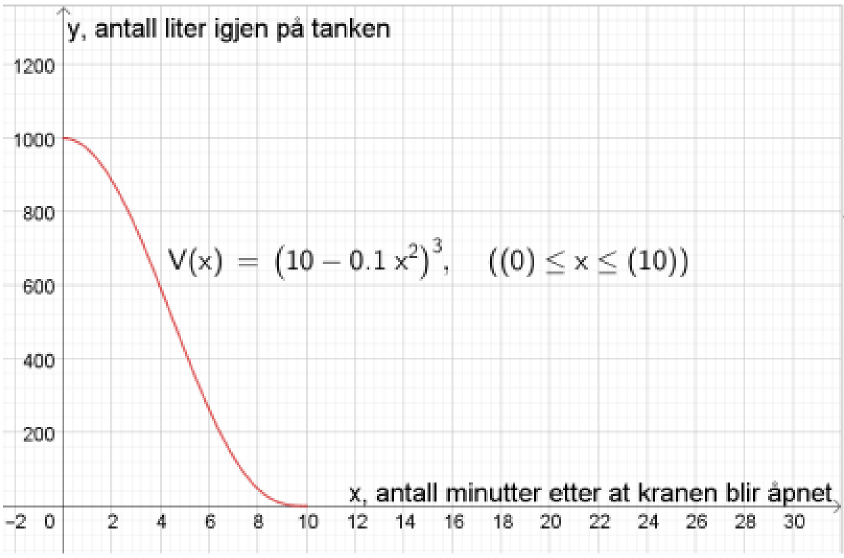
$V(0) = (10 - 0)^3$

$V(0) = 10^3$

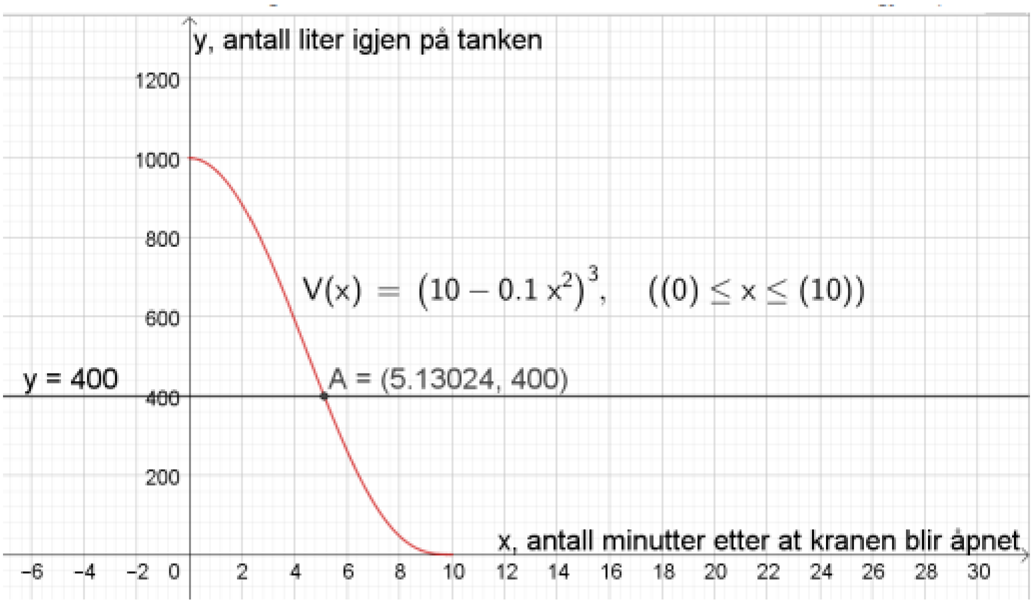
$V(0) = 1000$

Dette forteller oss at tanken rommer 1000 liter vann (antall liter igjen i tanken etter 0 minutter).

b)



c) Skriver inn y=400, velger «skjæring mellom to objekt» og markerer grafen og linjen. Får punktet A (se bildet under). Dette betyr at det tar 5,13 minutter før det er 400 liter igjen på tanken. Altså omtrent 5 minutter og 8 sekunder fra kranen åpnes til det er 400 liter igjen på tanken.



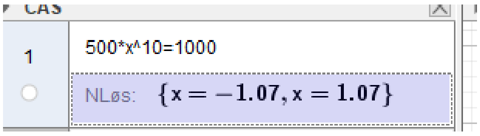
Eksamensoppgave side 140

a)

Dersom en bestand bestående av 500 dyr dobler seg lineært på 10 år ser funksjonen slik ut: L(x) = 50 x + 500

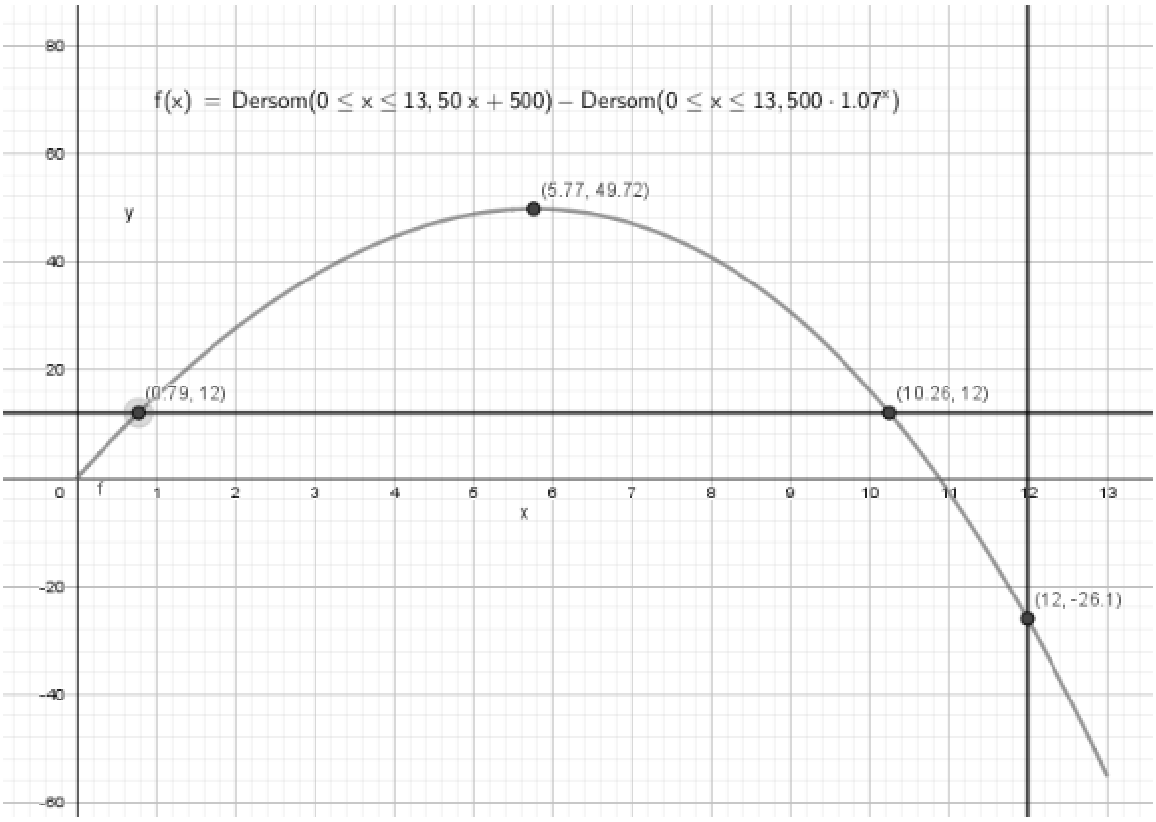
b)

Dersom bestanden øker eksponentielt får vi:



$E(x) = 500 \cdot 1{,}07^x$

c)

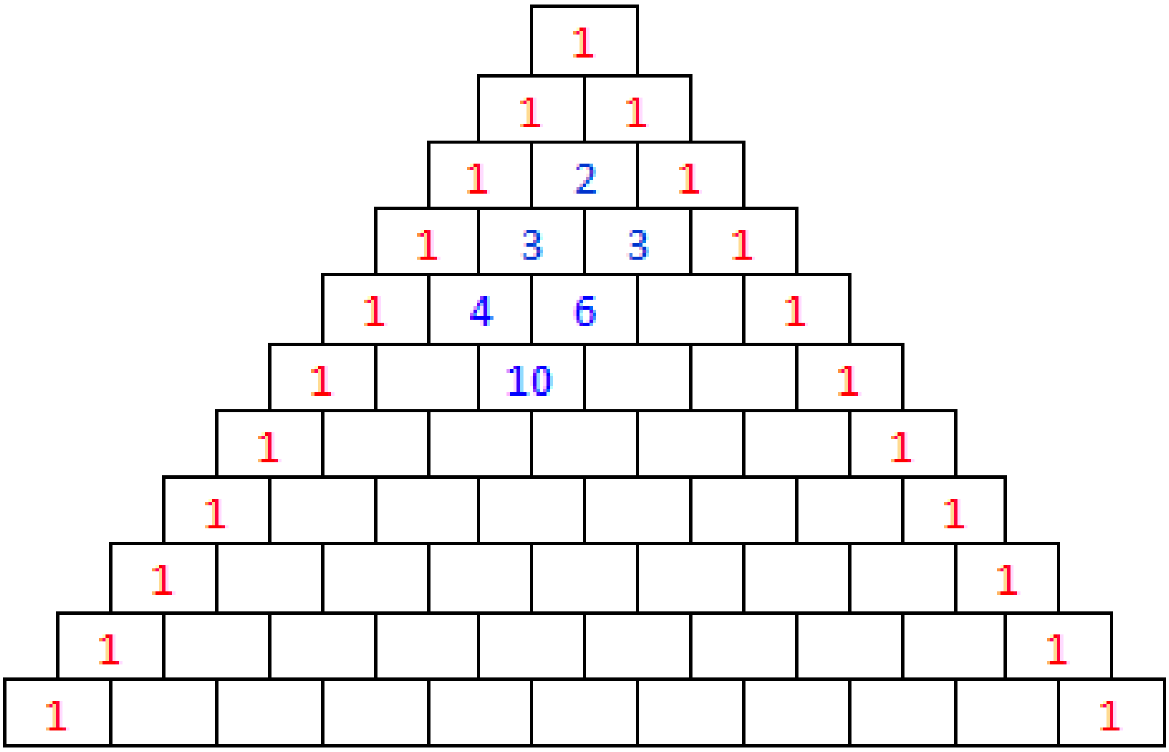


d)

Grafen til f viser forskjellen i estimat mellom den lineære modellen og den eksponentielle, under de gitte forutsetninger. Den største forskjellen er på ca. 50 dyr, etter ca 6 år. Den praktiske tolkningen av y= 12 er ved hvilke tidspunkt den lineære modellen estimerer 12 dyr mer enn den eksponentielle. For x = 12 får vi en funksjonsverdi nær - 26. Det må tolkes som at den eksponentielle funksjonen nå har det høyeste estimatet, og etter 12 år viser den eksponentielle funksjonen ca. 26 dyr mer enn den lineære funksjonen.

Begge funksjonene, L og E skulle doble seg på 10 år. Fra figuren i c ser man at det tar nesten 11 år før E dobler seg. Det skyldes at jeg burde tatt med en desimal til i uttrykket for vekstfaktoren.

Figurtall



Målet for opplæringen er at eleven skal kunne:

- identifisere variable størrelser i ulike situasjoner og bruke dem til utforsking og generalisering

Å se etter mønster

Dersom vi skriver tall i en ordnet liste, kalles dette en **tallfølge,** og tallene i en **tallfølge** danner et bestemt **mønster**. Dersom vi forstår **mønsteret** i en **tallfølge** kan vi forutsi det både det neste tallet i **tallfølgen**, og et tall lengre ut i lista.

Tallfølger kan ofte **representeres geometrisk** ved at vi lager en **figur** til hvert av tallene i lista. Derfor bruker vi gjerne ordet **figurtall** om slike **tallfølger**.

Figurtall er en tallfølge som er representert geometrisk

Din oppgave er å finne **mønsteret** i slike **tallfølger**, og beskrive dette **mønsteret** ved gjennom en **formel**.

Hver **figur** i en **tallfølge** har et **figurnummer**. Den første **figuren** kalles **figur nummer 1**, som skrives $\mathbf{F_1}$**.** Den neste figuren kalles $\mathbf{F_s}$**.** Deretter følger $\mathbf{F_3}$ osv.

I **formler** som brukes til å beskrive **mønster** er det vanlig å benytte **variabelen** n, og ikke x som ble brukt i forrige kapittel. Derfor vil du se at vi bruker n når vi skal beskrive et ukjent **figurnummer**, som skrives $\mathbf{F_n}$.

Når du har funnet **mønsteret** i en **tallfølge**, kan du bli bedt om å finne

- Det neste tallet eller den neste **figuren** i **tallfølgen**
- Et tall eller en **figur** lengre ut i lista
- **Summen** av alle tall eller **figurer** i **tallfølgen** frem til et bestemt nummer i lista

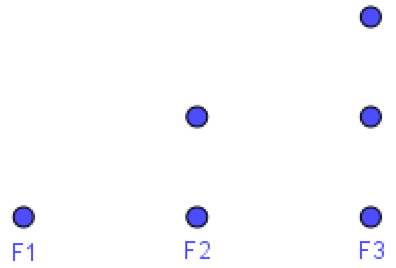
Å se etter **mønster** i **figurtall** har vi mennesker drevet med i hvert fall 2 500 år. Kilder kan fortelle oss at greske matematikere formet **figurene** i **figurtall** med steiner i sanden. Ordet *kalkulere* kommer fra det latinske ordet *calculus*, som betyr liten stein. Derfor finnes det en stor mengde ulike **mønstre**, og langt flere enn vi skal jobbe med i 1P. Du har kanskje hørt om Fibonaccis **tallfølge** eller Pascals trekant? Dersom du har interesse for å utforske **mønster** finnes det mye du kan søke opp.

I dette kapittelet presenterer vi de grunnleggende **mønstrene**; **lineær utvikling**, **kvadrattall**, **rektangeltall**, og **trekanttall**. Når du behersker disse **mønstrene** vil du kunne utforske **figurer** som er satt sammen av flere typer **mønster**.

Naturlige tall – lineær utvikling

Oppgave 1

Tegn figurnummer 4 her:



Beskriv sammenhengen mellom figurnummer og antall prikker i figuren med ord:

a) Hvor mange prikker vil det være i F_n?
b) Hvor mange prikker vil det være i F_{10}?
c) Hvilket figurnummer kan du lage av 20 prikker?

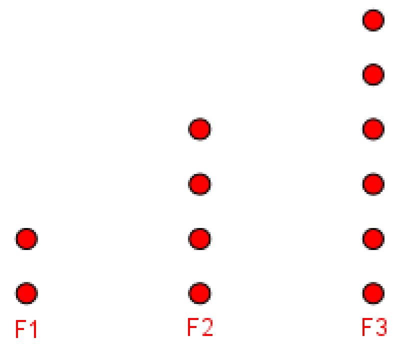
Tenk deg at du skal lage de 20 første figurene, og du ønsker å finne ut hvor mange prikker det blir til sammen.

d) Nedenfor har vi skrevet et program. Vil programmet finne ut hvor mange prikker det blir til sammen på de 20 første figurene? Hvis nei, hvilke endringer må gjøres?

```
Fn=0             #Fn betyr Figurnummer
prikker=0

for i in range(20):
  Fn=Fn+1
  prikker=prikker+(Fn)

print("Antall prikker til sammen:",prikker)
```

Oppgave 2

Tegn figurnummer 4 her:



Beskriv sammenhengen mellom figurnummer og antall prikker i figuren med ord:

a) Hvor mange prikker vil det være i F_n?
b) Hvor mange prikker vil det være i F_{20}?
c) Hvilket figurnummer kan du lage av 36 prikker?

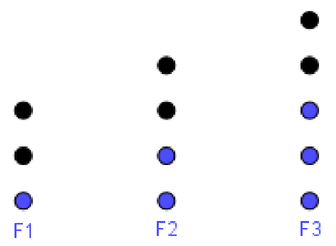
Tenk deg at du skal lage de 20 første figurene, og du ønsker å finne ut hvor mange prikker det blir til sammen.

d) Nedenfor har vi skrevet et program. Vil programmet finne ut hvor mange prikker det blir til sammen på de 20 første figurene? Hvis nei, hvilke endringer må gjøres?

```
Fn=0           #Fn betyr Figurnummer
prikker=0

for i in range(20):
  Fn=Fn+1
  prikker=(Fn*2)

print("Antall prikker til sammen:",prikker)
```

Oppgave 3

Tegn figurnummer 4 her:



Beskriv sammenhengen mellom figurnummer og antall prikker i figuren med ord:

a) Hvor mange prikker vil det være i F_n?
b) Hvor mange prikker vil det være i F_{15}?
c) Hvilket figurnummer kan du lage av 52 prikker?

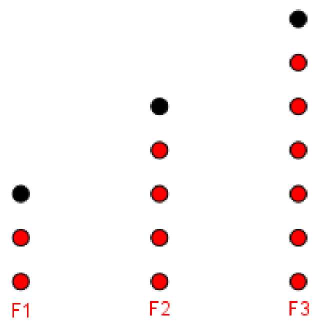
Tenk deg at du skal lage de 15 første figurene, og du ønsker å finne ut hvor mange prikker det blir til sammen.

d) Nedenfor har vi skrevet et program. Vil programmet finne ut hvor mange prikker det blir til sammen på de 15 første figurene? Hvis nei, hvilke endringer må gjøres?

```
Fn=0          #Fn betyr Figurnummer
prikker=0

for i in range(15):
  Fn=Fn+1
  prikker=prikker+(Fn+2)

print("Antall prikker til sammen:",prikker)
```

Oppgave 4

Tegn figurnummer 4 her:



Beskriv sammenhengen mellom figurnummer og antall prikker i figuren med ord:

a) Hvor mange prikker vil det være i F_n?
b) Hvor mange prikker vil det være i F_8?
c) Hvilket figurnummer kan du lage av 61 prikker?

Tenk deg at du skal lage de 15 første figurene, og du ønsker å finne ut hvor mange prikker det blir til sammen.

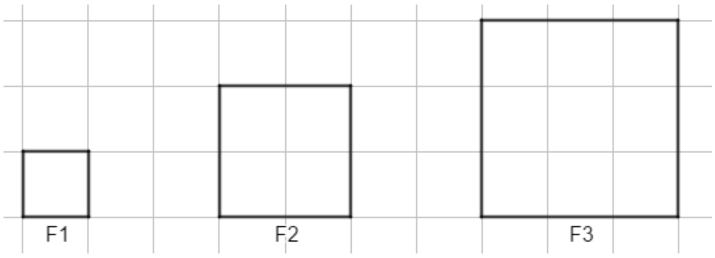
d) Nedenfor har vi skrevet et program. Vil programmet finne ut hvor mange prikker det blir til sammen på de 15 første figurene? Hvis nei, hvilke endringer må gjøres?

```
Fn=0              #Fn betyr Figurnummer
prikker=0

for i in range(20):
  Fn=Fn+1
  prikker=prikker+(Fn*2+1)

print("Antall prikker til sammen:",prikker)
```

Kvadrattall

Oppgave 5

Tegn figurnummer 4 her:



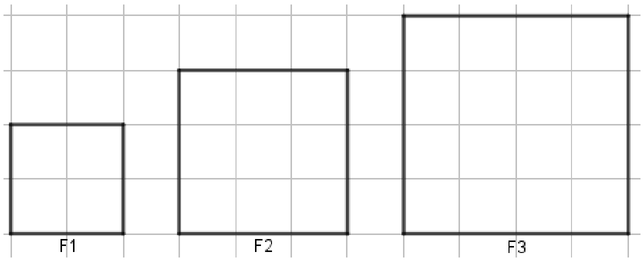
Beskriv sammenhengen mellom figurnummer og antall ruter i figuren med ord:

a) Hvor mange ruter vil det være i F_n?
b) Hvor mange ruter vil det være i F_{12}?
c) Hvilket figurnummer kan du lage av 81 ruter?
d) Tenk deg at du skal tegne de 15 første figurene. Hvor mange ruter vil det være til sammen i alle 15 figurene?

En mer eller en mindre; (n+1) eller (n-1)

I noen oppgaver har vi behov for å uttrykke 1 mer eller 1 mindre enn figurnummert når vi skal beskrive en figurutvikling. Matematisk skrives dette som (n+1) eller (n-1). Dette vil vi få bruk for når vi skal regne rektangeltall, trekanttall eller dersom det er en forskyvning slik som i oppgave 6 og 7.

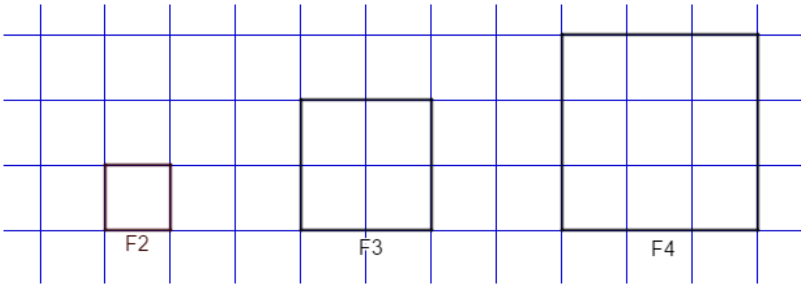
Oppgave 6



Beskriv sammenhengen mellom figurnummer og antall ruter i figuren med ord:

a) Hvor mange ruter vil det være i F_n?
b) Hvor mange ruter vil det være i F_9?
c) Hvilket figurnummer kan du lage av 81 ruter?
d) Hvor mange ruter vil det være til sammen i de 30 første figurene?

Oppgave 7



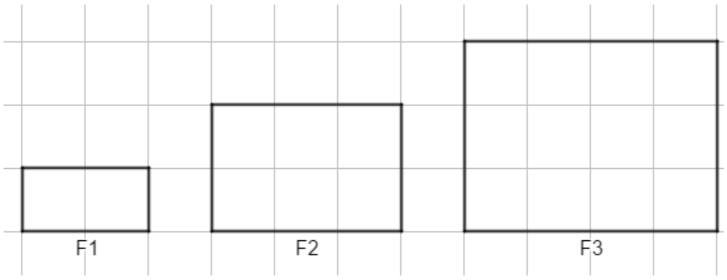
Beskriv sammenhengen mellom figurnummer og antall ruter i figuren med ord:

a) Hvor mange ruter vil det være i F_n?
b) Hvor mange ruter vil det være i F_7?
c) Hvor mange ruter vil det være i F_1?
d) Hvilket figurnummer er det største du kan lage av 140 ruter?
e) Hvor mange ruter vil det være til sammen i de 25 første figurene?

Rektangeltall

Oppgave 8

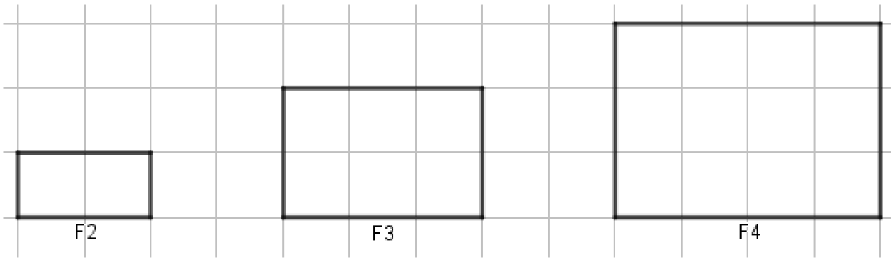
Tegn figurnummer 4 her:



Beskriv sammenhengen mellom figurnummer og antall ruter i figuren med ord:

a) Hvor mange ruter vil det være i F_n?
b) Hvor mange ruter vil det være i F_{100}?
c) Hvilket figurnummer kan du lage av 420 ruter?
d) Hvor mange ruter vil det være til sammen i de 100 første figurene?

Oppgave 9



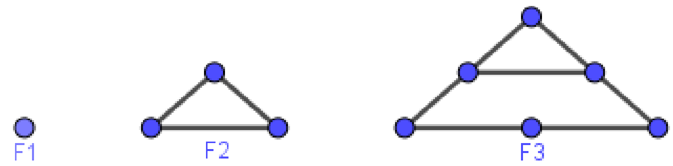
Beskriv sammenhengen mellom figurnummer og antall ruter i figuren med ord:

a) Hvor mange ruter vil det være i F_n?
b) Hvor mange ruter vil det være i F_{10}?
c) Hvilket figurnummer er det største du kan lage av 200 ruter?
d) Hvor mange ruter vil det være til sammen i de 25 første figurene?

Trekanttall

Oppgave 10

Tegn figurnummer 4 her:



Beskriv sammenhengen mellom figurnummer og antall prikker i figuren med ord:

a) Hvor mange prikker vil det være i F_n?
b) Hvor mange prikker vil det være i F_{50}?
c) Hvilket figurnummer kan du lage av 325 prikker?

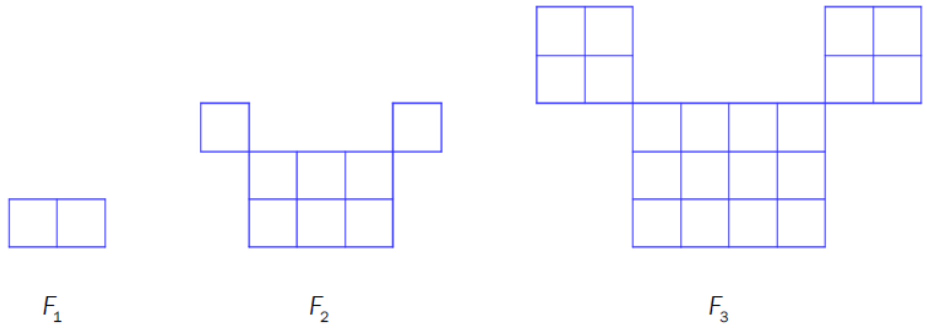
Tenk deg at du skal lage de 15 første figurene, og du ønsker å finne ut hvor mange prikker det blir til sammen.

d) Nedenfor har vi skrevet et program. Vil programmet finne ut hvor mange prikker det blir til sammen på de 15 første figurene? Hvis nei, hvilke endringer må gjøres?

	A	B
1	Figurnummer	Antall prikker
2	1	=A2*(A2+1)/2
3	2	=A3*(A3+1)/2
4	3	=A4*(A4+1)/2
5	4	=A5*(A5+1)/2
6	5	=A6*(A6+1)/2
7	6	=A7*(A7+1)/2
8	7	=A8*(A8+1)/2
9	8	=A9*(A9+1)/2
10	9	=A10*(A10+1)/2
11	10	=A11*(A11+1)/2
12	11	=A12*(A12+1)/2
13	12	=A13*(A13+1)/2
14	13	=A14*(A14+1)/2
15	14	=A15*(A15+1)/2
16	15	=A16*(A16+1)/2
17	Til sammen:	=SUMMER(B2:B16)

Sammensatte figurer

Oppgave 11

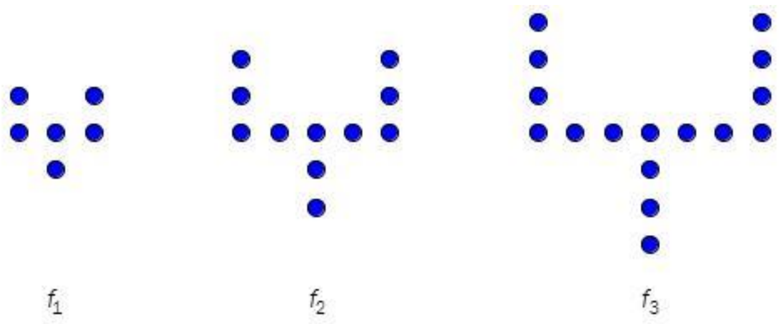


Snorre lager figurer av kvadriske klosser etter et fast mønster.

Ovenfor ser du figur F_1 , F_2 og F_3 .

Hvor mange klosser må han bruke for å bygge de 10 første figurene?

Oppgave 12

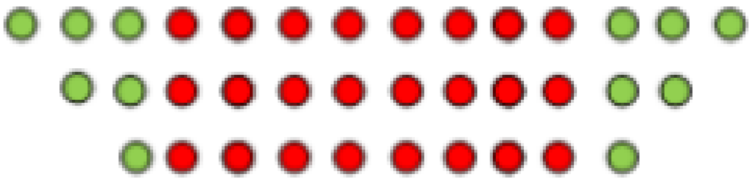


Siri lager figurer av runde perler. Figurene ovenfor har hun kalt f_1, f_2 og f_3 .

Hvor mange perler må hun bruke for å lage de 50 første figurene?

Oppgave 13

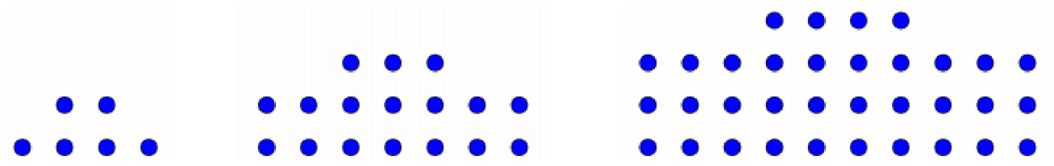
I en teatersal der det 580 plasser. På første stolrad er det 10 plasser. På andre stolrad er det 12 plasser, og på tredje stolrad er det 14 plasser. Se figuren nedenfor.



Slik fortsetter det å øke med to plasser for hver stolrad bakover i salen.

Hvor mange stolrader er det i salen?

Oppgave 14

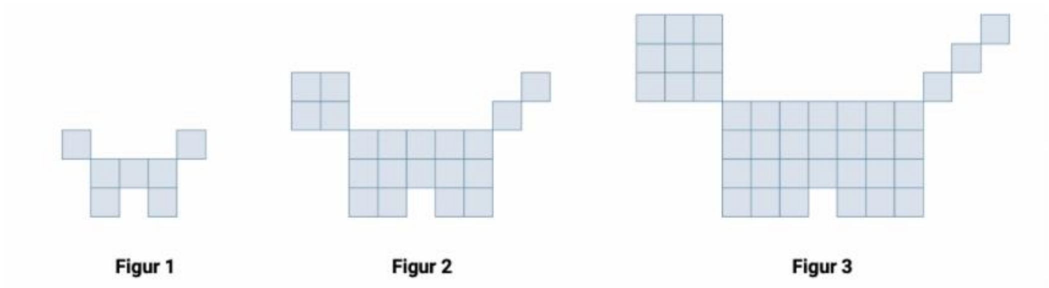


Figur 1 Figur 2 Figur 3

Ovenfor ser du tre figurer. Figurene er satt sammen av små sirkler. Dina vil fortsette å tegne figurer etter samme mønster.

Hvor mange små sirkler er det til sammen i de 100 første figurene?

En eksamensoppgave



Ovenfor ser du tre figurer. Figurene er satt sammen av små kvadrater. Tenk deg at du skal fortsette å lage figurer etter samme mønster.

Hvor mange små kvadrater trenger du totalt for å lage de 100 første figurene?

En eksamensoppgave

Figur 1

Figur 2

Marius og Maria arbeider i en dagligvarebutikk. De skal stable bokser med erter.

Marius stabler boksene som vist i figur 1. I figur 1 har han laget et tårn med fire etasjer.

a) Hvor mange bokser trenger Marius for å lage et tårn med 20 etasjer, dersom han stabler bokser på denne måten?

Marius har 400 bokser.

b) Hvor mange etasjer vil det være i det største tårnet han kan lage?

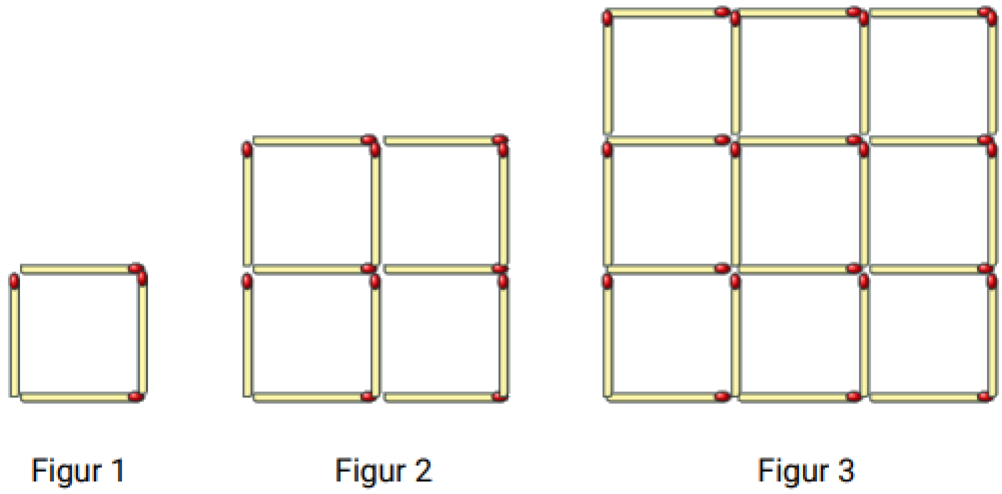
Maria vil stable bokser som vist i figur 2. I figur 2 har hun et tårn med tre etasjer.

c) Hvor mange bokser trenger Maria for å lage et tårn med 20 etasjer, dersom hun stabler bokser på denne måten?

Maria har 4 000 bokser.

d) Hvor mange etasjer vil det være i det største tårnet hun kan lage?

En eksamensoppgave



De tre figurene er laget av fyrstikker.

Figur 1 består av ett lite kvadrat, figur 2 består av fire små kvadrater, og figur 3 består av ni små kvadrater.

Tenk deg at du har 10 000 fyrstikker.

Du skal lage de tre figurene, og så fortsette å lage figurer etter samme mønster, èn i hver størrelse.

a) Hvor mange figurer kan du lage?
b) Hvor mange fyrstikker vil du ha igjen når du har laget den siste figuren?

Løsningsforslag

Oppgave	Svar
1	a) F_n= *n* antall prikker b) F_{10}= 10 prikker c) 20 prikker = F_{20} d) Ja, programmet vil fungere.
2	a) F_n= 2*n* antall prikker b) F_{20}= 40 prikker c) 36 prikker = F_{36} d) Nei. Det må endres til: prikker=prikker+(Fn*2)
3	a) F_n= *n*+2 ant. prikker b) F_{15}= 17 prikker c) 52 prikker = F_{25} d) Ja, programmet vil fungere
4	a) F_n= 2*n*+1 ant. prikker b) F_8= 17 prikker c) 61 prikker = F_{30} d) Nei. Range må endres til 15
5	a) F_n= n^2 antall ruter b) F_{12}= 144 ruter c) 81 ruter = F_9 d) 1240 ruter
6	a) F_n= $(n+1)^2$ ant. ruter b) F_9= 100 ruter c) 81 ruter = F_8 d) 10 415 ruter

Oppgave	Svar
7	a) F_n= $(n-1)^2$ ant. ruter b) F_7= 36 ruter c) F_1= 0 ruter d) 121 ruter = F_{12} e) 4 900 ruter
8	a) F_n= $n \cdot (n+1)$ ant. ruter = $(n^2 + n)$ ant. ruter b) F_{100}= 10100 ruter c) 420 ruter = F_{20} d) 328 352 ruter
9	a) F_n= $n \cdot (n-1)$ ant. ruter = $(n^2 - n)$ ant. ruter b) F_{10}= 90 ruter c) F_1= 0 ruter d) 182 ruter = F_{14} e) 5 200 ruter
10	a) F_n= $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$ ant. prikker $=\frac{n^2+n}{2}$ b) F_{50}= 1275 prikker c) 325 prikker = F_{25} d) Ja, programmet vil fungere.

Oppgave 11

Finner formelen ved hjelp av regresjon:

$$y = 3x^2 - 3x + 2$$

	A	B
1	Oppgave 11	
2	Figur nr	Antall klosser
3	1	2
4	2	8
5	3	20
6	4	38
7	5	62
8	6	92
9	7	128
10	8	170
11	9	218
12	10	272
13	Sum	1010

	A	B
1	Oppgave 11	
2	Figur nr	Antall klosser
3	1	=3*A3^2-3*A3+2
4	2	=3*A4^2-3*A4+2
5	3	=3*A5^2-3*A5+2
6	4	=3*A6^2-3*A6+2
7	5	=3*A7^2-3*A7+2
8	6	=3*A8^2-3*A8+2
9	7	=3*A9^2-3*A9+2
10	8	=3*A10^2-3*A10+2
11	9	=3*A11^2-3*A11+2
12	10	=3*A12^2-3*A12+2
13	Sum	=SUMMER(B3:B12)

Oppgave 12

Finner først formelen ved hjelp av regresjon

$$y = 5x + 1$$

	A	B
1	Oppgave 12	
2	Figur nr	Antall perler
3	1	6
4	2	11
5	3	16
6	4	21
7	5	26
45	43	216
46	44	221
47	45	226
48	46	231
49	47	236
50	48	241
51	49	246
52	50	251
53	Sum	6425

	A	B
1	Oppgave 12	
2	Figur nr	Antall perler
3	1	=5*A3+1
4	2	=5*A4+1
5	3	=5*A5+1
6	4	=5*A6+1
7	5	=5*A7+1
45	43	=5*A45+1
46	44	=5*A46+1
47	45	=5*A47+1
48	46	=5*A48+1
49	47	=5*A49+1
50	48	=5*A50+1
51	49	=5*A51+1
52	50	=5*A52+1
53	Sum	=SUMMER(B3:B52)

Radene 8 – 44 er skjult for å spare plass.

Oppgave 13

Finner formelen ved hjelp av regresjon:

$$y = 2x + 8$$

	A	B	C
1	Oppgave 13		
2	Rad nummer	Antall stoler per rad	Sum stoler
3	1	10	10
4	2	12	22
5	3	14	36
6	4	16	52
7	5	18	70
8	6	20	90
9	7	22	112
10	8	24	136
11	9	26	162
12	10	28	190
13	11	30	220
14	12	32	252
15	13	34	286
16	14	36	322
17	15	38	360
18	16	40	400
19	17	42	442
20	18	44	486
21	19	46	532
22	20	48	580

	A	B	C
1	Oppgave 13		
2	Rad nummer	Antall stoler per rad	Sum stoler
3	1	=2*A3+8	=B3
4	2	=2*A4+8	=C3+B4
5	3	=2*A5+8	=C4+B5
6	4	=2*A6+8	=C5+B6
7	5	=2*A7+8	=C6+B7
8	6	=2*A8+8	=C7+B8
9	7	=2*A9+8	=C8+B9
10	8	=2*A10+8	=C9+B10
11	9	=2*A11+8	=C10+B11
12	10	=2*A12+8	=C11+B12
13	11	=2*A13+8	=C12+B13
14	12	=2*A14+8	=C13+B14
15	13	=2*A15+8	=C14+B15
16	14	=2*A16+8	=C15+B16
17	15	=2*A17+8	=C16+B17
18	16	=2*A18+8	=C17+B18
19	17	=2*A19+8	=C18+B19
20	18	=2*A20+8	=C19+B20
21	19	=2*A21+8	=C20+B21
22	20	=2*A22+8	=C21+B22

20 rader gir til sammen 580 sitteplasser

Oppgave 14

Finner formelen ved hjelp av regresjon:

$$y = 3x^2 + 2x + 1$$

	A	B
1	Oppgave 14	
2	Figur nr	Antall sirkler
3	1	6
4	2	17
5	3	34
6	4	57
7	5	86
8	6	121
96	94	26697
97	95	27266
98	96	27841
99	97	28422
100	98	29009
101	99	29602
102	100	30201
103	Sum	1025250

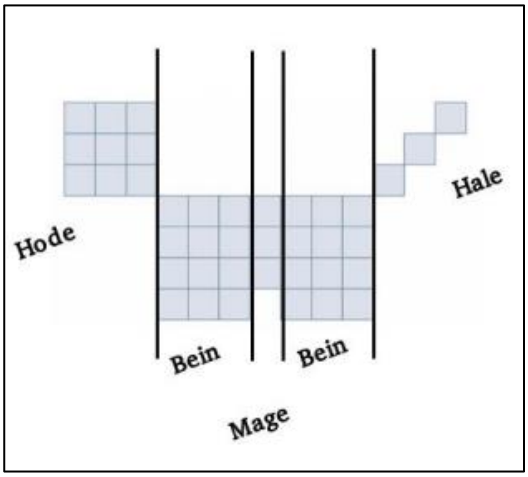
	A	B
1	Oppgave 14	
2	Figur nr	Antall sirkler
3	1	=3*A3^2+2*A3+1
4	2	=3*A4^2+2*A4+1
5	3	=3*A5^2+2*A5+1
6	4	=3*A6^2+2*A6+1
7	5	=3*A7^2+2*A7+1
8	6	=3*A8^2+2*A8+1
96	94	=3*A96^2+2*A96+1
97	95	=3*A97^2+2*A97+1
98	96	=3*A98^2+2*A98+1
99	97	=3*A99^2+2*A99+1
100	98	=3*A100^2+2*A100+1
101	99	=3*A101^2+2*A101+1
102	100	=3*A102^2+2*A102+1
103	Sum	=SUMMER(B3:B102)

Radene 9 – 95 er skjult for å spare plass

Eksamensoppgave side 170

	A	B	C	D	E	F
1	Figur	Hode	Hale	Mage	Bein	Hund
2	1	1	1	1	2	7
3	2	4	2	2	6	20
4	3	9	3	3	12	39
5	4	16	4	4	20	64
6	5	25	5	5	30	95
7	6	36	6	6	42	132
8	7	49	7	7	56	175
9	8	64	8	8	72	224
10	9	81	9	9	90	279
11	10	100	10	10	110	340
12	11	121	11	11	132	407
13	12	144	12	12	156	480
14	13	169	13	13	182	559
15	14	196	14	14	210	644
16	15	225	15	15	240	735
17	16	256	16	16	272	832
18	17	289	17	17	306	935
19	18	324	18	18	342	1044
20	19	361	19	19	380	1159

81	80	6400	80	80	6480	19520
82	81	6561	81	81	6642	20007
83	82	6724	82	82	6806	20500
84	83	6889	83	83	6972	20999
85	84	7056	84	84	7140	21504
86	85	7225	85	85	7310	22015
87	86	7396	86	86	7482	22532
88	87	7569	87	87	7656	23055
89	88	7744	88	88	7832	23584
90	89	7921	89	89	8010	24119
91	90	8100	90	90	8190	24660
92	91	8281	91	91	8372	25207
93	92	8464	92	92	8556	25760
94	93	8649	93	93	8742	26319
95	94	8836	94	94	8930	26884
96	95	9025	95	95	9120	27455
97	96	9216	96	96	9312	28032
98	97	9409	97	97	9506	28615
99	98	9604	98	98	9702	29204
100	99	9801	99	99	9900	29799
101	100	10000	100	100	10100	30400
102						
103					SUM	1035250



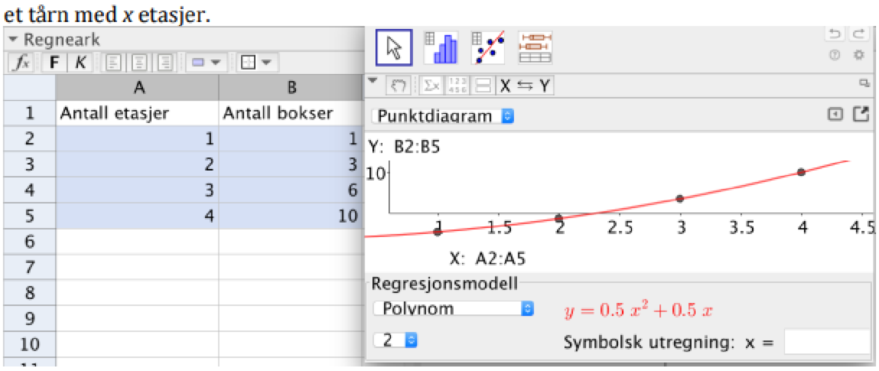
Under er formlene jeg har brukt:

	A	B	C	D	E	F
1	Figur	Hode	Hale	Mage	Bein	Hund
2	1	=A2*A2	=A2	=A2	=A2*(A2+1)	=B2+C2+D2+2*E2
3	2	=A3*A3	=A3	=A3	=A3*(A3+1)	=B3+C3+D3+2*E3
4	3	=A4*A4	=A4	=A4	=A4*(A4+1)	=B4+C4+D4+2*E4
5	4	=A5*A5	=A5	=A5	=A5*(A5+1)	=B5+C5+D5+2*E5
6	5	=A6*A6	=A6	=A6	=A6*(A6+1)	=B6+C6+D6+2*E6
7	6	=A7*A7	=A7	=A7	=A7*(A7+1)	=B7+C7+D7+2*E7
8	7	=A8*A8	=A8	=A8	=A8*(A8+1)	=B8+C8+D8+2*E8
9	8	=A9*A9	=A9	=A9	=A9*(A9+1)	=B9+C9+D9+2*E9
10	9	=A10*A10	=A10	=A10	=A10*(A10+1)	=B10+C10+D10+2*E10
100	99	=A100*A100	=A100	=A100	=A100*(A100+1)	=B100+C100+D100+2*E100
101	100	=A101*A101	=A101	=A101	=A101*(A101+1)	=B101+C101+D101+2*E101
102						
103					SUM	=SUMMER(F2:F101)

Jeg trenger 1 035 250 kvadrater for å lage de 100 første hundene.

Eksamensoppgave side 171

a) Bruker regresjonsanalyse i GeoGebra til å bestemme et uttrykk for antall bokser i et tårn med x etasjer.



	A	B
1	Antall etasjer	Antall bokser
2	1	1
3	2	3
4	3	6
5	4	10

Ser at antall bokser i et tårn med x etasjer er $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$.

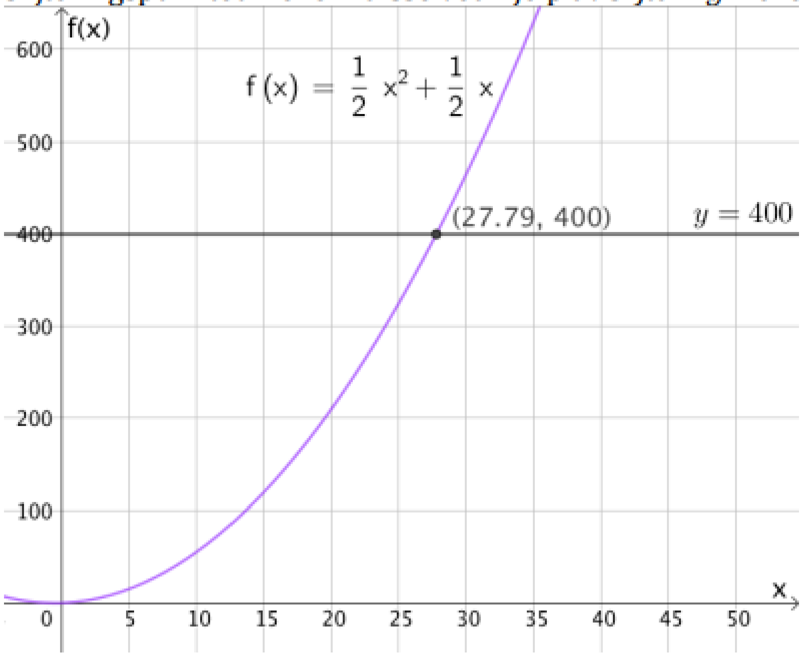
Finner antall bokser i et tårn med 20 etasjer:

$y = 0.5\,x^2 + 0.5\,x$

Symbolsk utregning: x = 20 y = 210

Marius trenger 210 bokser for å lage et tårn med 20 etasjer.

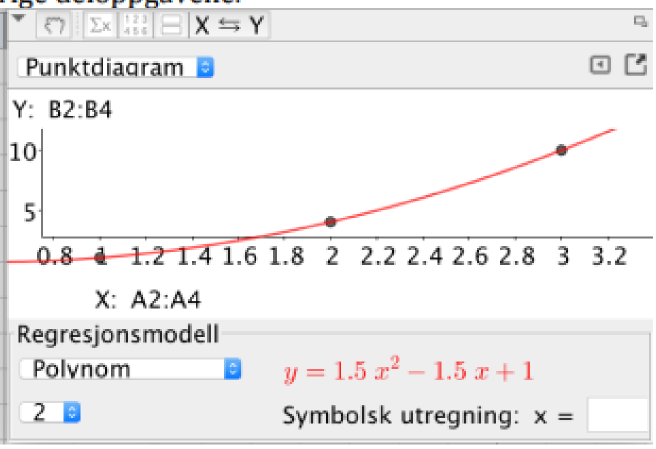
b) Tegner grafen til $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$ sammen med linja $y=400$ og bestemmer skjæringspunktet mellom disse ved hjelp av *skjæring mellom to objekt*.



<u>Det største tårnet Marius kan lage er et tårn med 27 etasjer</u>.

c) Bruker samme strategi som i de to forrige deloppgavene.

	A	B
1	Antall etasjer	Antall bokser
2	1	1
3	2	4
4	3	10
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		



I et tårn med x etasjer vil det være $\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x+1$ bokser.

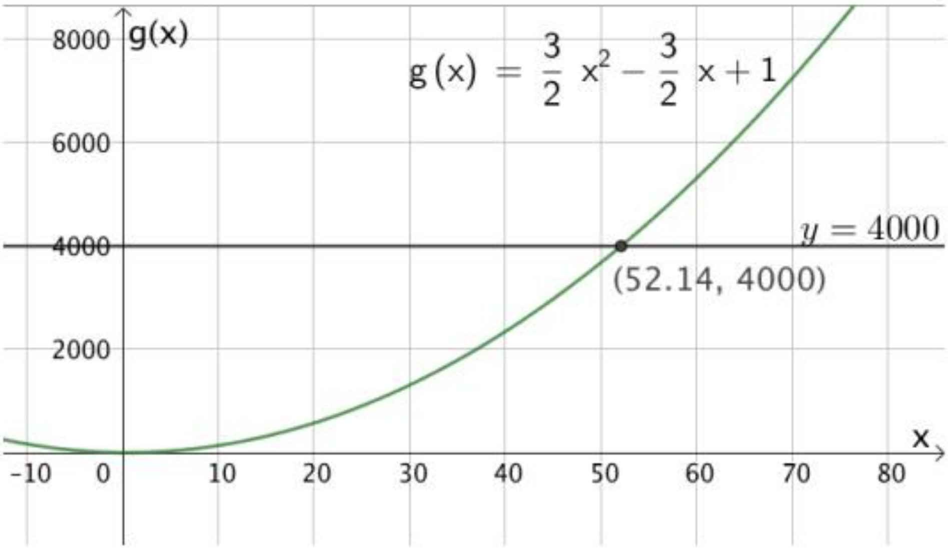
Finner antall bokser i et tårn med 20 etasjer:

$y = 1.5\,x^2 - 1.5\,x + 1$

Symbolsk utregning: x = 20 y = 571

<u>Maria trenger 571 bokser om hun skal stable et tårn med 20 etasjer.</u>

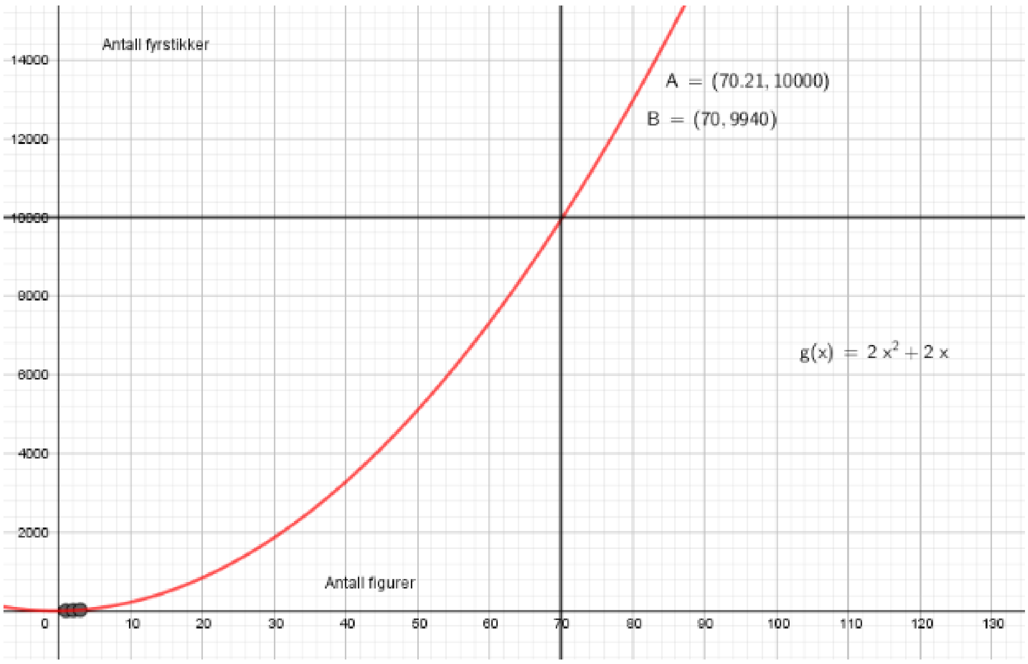
d) Tegner grafen til $g(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x+1$ sammen med linja $y=4000$ og finner skjæringspunktet mellom disse ved hjelp av *skjæring mellom to objekt.*



Det største tårnet Maria kan lage vil ha 52 etasjer.

Eksamensoppgave side 172

a)



Bruker regresjon, finner et funksjonsuttrykk og ser at man kan lage 70 figurer.

b)

Man får 60 fyrstikker tilovers.