Sammenheng og utvikling

Målet for opplæringen er at eleven skal kunne:

- tolke og bruke funksjoner i matematisk modellering og problemløsing
- planlegge, utføre og presentere selvstendig arbeid knyttet til modellering og funksjoner innenfor samfunnsfaglige tema
- bruke digitale verktøy i utforsking og problemløsing knyttet til egenskaper ved funksjoner, og diskutere løsningene
- modellere situasjoner knyttet til tema fra samfunnsliv og arbeidsliv, presentere og argumentere for resultatene og for når modellene er gyldige

Sammenheng mellom størrelser

I dette kapittelet vil vi bruke en del begreper som det er viktig at du forstår. Disse begrepene er markert med **fet skrift**, og du må be om forklaring dersom du leser et begrep som du ikke husker hva betyr.

Størrelse er et slikt begrep. Med **størrelse** mener vi noe som kan beskrives ved hjelp av tall, og eksempel på en **størrelse** kan være:

- Befolkning
- Penger
- Vekt
- Alder
- Avstand
- Volum

Dersom to **størrelser** henger sammen, kan vi beskrive denne **sammenhengen** ved hjelp av **funksjoner** eller **modeller**.

$$\boldsymbol{Funksjoner}\ og\ \boldsymbol{modeller}\ beskriver\ \boldsymbol{sammenhengen}\ mellom\ to\ \boldsymbol{størrelser}$$

For å beskrive **sammenhengen** mellom to **størrelser**, kan vi bruke:

- **Tekst**
- **Tabell**
- **Funksjonsuttrykk, modell eller formel**
- **Graf**

I teoretisk matematikk er det vanlig å erstatte **størrelsene** med bokstavene x og y.

For at en **sammenheng** skal kunne beskrives ved hjelp av **funksjoner**, er det et krav om at **endring** i **verdien** til **størrelse** x fører til en **endring** i **verdien** til **størrelse** y.

Dersom dette er tilfelle, sier vi at y er en funksjon av x.

$$y\ er\ en\ \boldsymbol{funksjon}\ av\ x\ dersom\ \boldsymbol{endring}\ i\ x\ fører\ til\ \boldsymbol{endring}\ i\ y$$

Det er denne **endringen** vi kaller **utvikling**; hva skjer med y når x øker?

Utvikling beskrevet med ulike typer modeller

Når vi skal beskrive **utviklingen** i y- **verdier** når x øker, kan vi beskrive dette ved hjelp av forskjellige typer **modeller**.

Nedenfor finner du en beskrivelse over de fire **modellene** som er pensum for dette kurset.

Modell	Funksjonsuttrykk	Beskriver
Lineær	$y = ax + b$	Endring med et fast tall
Eksponentiell	$y = a \cdot b^x$	Endring med en fast prosent
Potens	$y = a \cdot x^b$	
Polynom	Den høyeste eksponenten avgjør graden.	Den eneste **modellen** hvor endring i y- **verdi** kan være både positiv og negativ.
2. grad	$y = ax^2 + bx + c$	
3. grad	$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$	
4. grad	$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$	

Det skal komme klart frem i oppgaven hvilken **modell** du skal velge. Dette kan enten opplyses ved navn, **funksjonsuttrykk** eller en beskrivelse av **utviklingen.**

Felles for alle **modellene** er at de beskriver en **utvikling** med tre ulike innfallsvinkler:

- En nøyaktig representasjon utfra **punkter**
- En tilnærmet representasjon utfra **punkter**
- Utfra et **funksjonsuttrykk**

Dersom **utviklingen** er beskrevet gjennom et **funksjonsuttrykk**, er **funksjonen** som regel avgrenset til å være **gyldig** for en viss mengde x- **verdier.** Dette kalles **definisjonsmengden** for **funksjonen**, og skrives slik inn i GeoGebra:

$$funksjonsuttrykk, start \leq x \leq slutt$$

Dersom **utviklingen** er beskrevet gjennom **punkter**, må du skrive **punktene** inn i regnearket til GeoGebra. Deretter må du gjennomføre en regresjonsanalyse for å få frem den **modellen** du ønsker. I slike tilfeller blir du ofte bedt om å vurdere **modellens gyldighetsområde**.

Lineær utvikling: $y = ax + b$

Dersom y **endres** *fra* et startpunkt *med* et fast tall for hver gang x øker med 1, sier vi at **utviklingen** er **lineær**. Både startpunktet og det faste tallet har en praktisk betydning, og du vil bli bedt om å kommentere begge.

Lineær utvikling utfra punkter

Tenk deg at en lærer gjorde følgende demonstrasjon foran elevene sine:

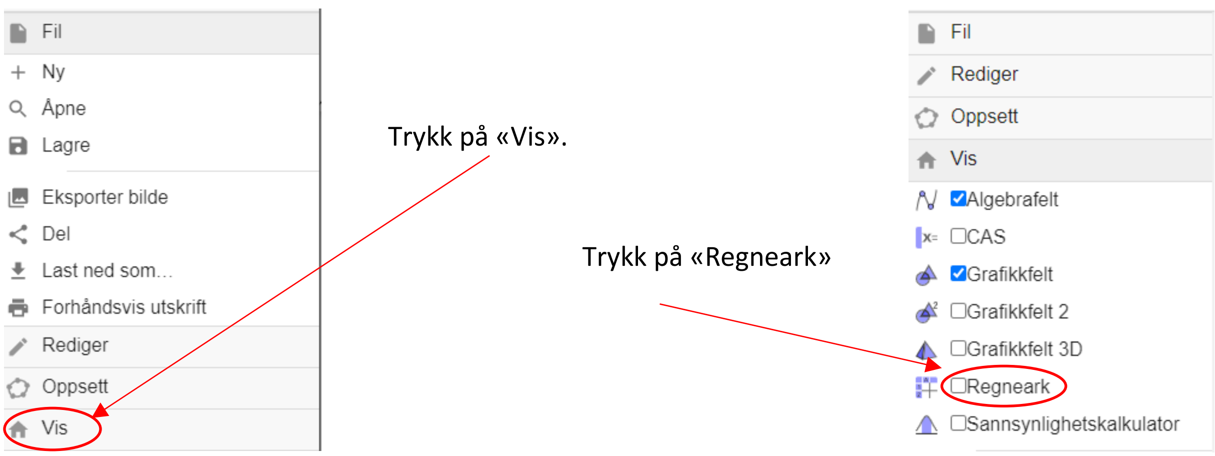
Læreren hadde med seg en pappkopp, en bunke med 30 identiske terninger og en vekt. Læreren nullstilte vekta og plasserte deretter pappkoppen på vekta.

Læreren la et ulikt antall terninger i koppen, og noterte den samlede vekten av terninger + koppen i **tabellen** nedenfor.

Utstyr:	Antall terninger (x)	Samlet vekt i gram (y)
	1	17
	4	32
	7	47
	10	62

Klarer du utfra **tabellen** å finne ut vekten til pappkoppen, og vekten av hver enkelt terning? Det kan godt hende du allerede har funnet svaret på dette spørsmålet. Likevel skal vi vise hvordan du kan bruke GeoGebra til å finne denne informasjonen.

Steg 1 – åpne regnearket i GeoGebra

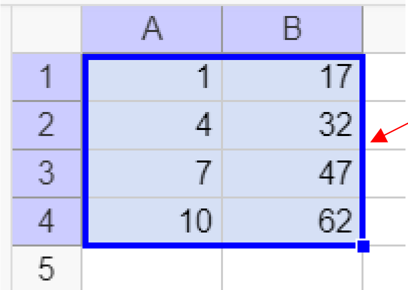


Steg 2 – skriv inn punktene fra tabellen

	A	B
1	1	17
2	4	32
3	7	47
4	10	62

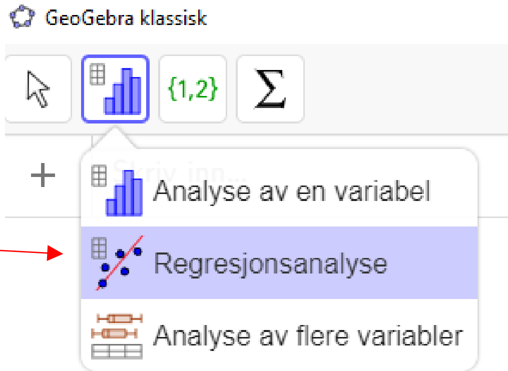
Vi skriver x- **verdiene** i A-kolonnen, og y-**verdiene** i B-kolonnen

Steg 3 – marker punktene og lag en regresjonsanalyse

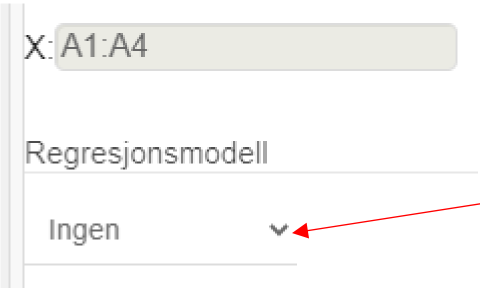


Marker tallene

Trykk på «Regresjonsanalyse

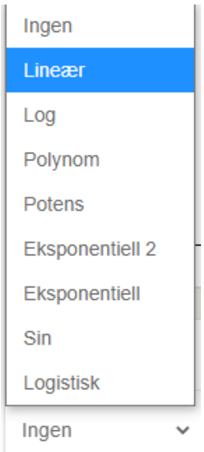


Steg 4 – velg riktig modell



Trykk på denne pila

Velg «Lineær»



Dermed får du opp dette bildet:

Her er **modellen**, eller **funksjonsuttrykket**, som skal hjelpe oss til å finne informasjonen som ble etterspurt. Hva betyr så dette **funksjonsuttrykket**?

Vi har følgende **sammenheng** mellom antall terninger + koppen, og den samlede vekten:

$$samlet\ vekt = vekt\ per\ terning\ \cdot antall\ terninger + koppens\ vekt$$

I tabellen på side 103 har vi definert y som samlet vekt, og x som antall terninger. Vi kan derfor beskrive **sammenhengen** mellom antall terninger +koppen, og den samlede vekten slik:

$$y = vekt\ per\ terning\ \cdot x + koppens\ vekt$$

Regresjonsanalysen i GeoGebra ga oss følgende **modell** på formen $y = ax + b$:

$$y = 5x + 12$$

Dette betyr at hver terning veier 5 gram, mens koppen veier 12 gram.

Dermed kan vi si at den samlede vekten starter på 12 gram, og øker med 5 gram for hver terning.

12 er **funksjonens** startpunkt. Dette kalles **funksjonens konstantledd**, og forkortes b
5 er **funksjonens endringsverdi**. Dette kalles **funksjonens stigningstall**, og forkortes a

Oppgave 1

En lærer har med seg en eske med 20 identiske penner, en kopp og en vekt. Læreren plasserer koppen på vekta, og måler den samlede vekten av noen penner og koppen. Resultatet fra målingen finner du i tabellen nedenfor:

Antall penner	4	9	12
Gram samlet vekt	230	330	390

Hva i oppgaveteksten er det som avgjør at dette er en lineær modell? Bruk tallene i tabellen til å lage en lineær modell som beskriver sammenhengen mellom antall penner og den samlede vekten.

Bruk modellen du laget til å finne:

- Hvor mye hver penn veier
- Hvor mye koppen veier

Oppgave 2

En nyåpnet videregående skole presenterte følgende elevtall for to utvalgte år etter oppstart:

År etter oppstart	1	3
Elevtall	620	650

Skolens ledelse antar at utviklingen i skolens elevtall kan beskrives med en lineær modell, som er gyldig i noen år fremover.

Bruk tallene i tabellen til å lage en modell som kan brukes til å beskrive utviklingen i skolens elevtall. Hva forteller modellen om antall elever ved skolens oppstart, og den årlige økningen i skolens elevtall?

Oppgave 3

I dag er det 280 kaniner innenfor et avgrenset område. Anta at en sykdom brer seg blant kaninene, og at det om 20 måneder bare vil være 40 kaniner igjen i området.

Bruk informasjonen i teksten ovenfor til å lage en modell som viser hvor mange kaniner det vil være om x måneder dersom antallet avtar lineært.

Hva forteller modellen om den månedlige nedgangen i antall kaniner?

Modellens gyldighetsområde

Ytterst få **modeller** brukt i praktiske situasjoner er **gyldige** for alle x- **verdier.** Kanskje er det noen begrensninger som gjør at **modellen** har en nedre eller øvre grense. Kanskje er det slik at **modellen** bli mer usikker etter hvert som x- **verdiene øker**.

I noen oppgaver er begrensningene oppgitt. I noen oppgaver skal du vurdere **modellen** opp mot et reelt **punkt**. I noen oppgaver må du gjøre selvstendige vurderinger.

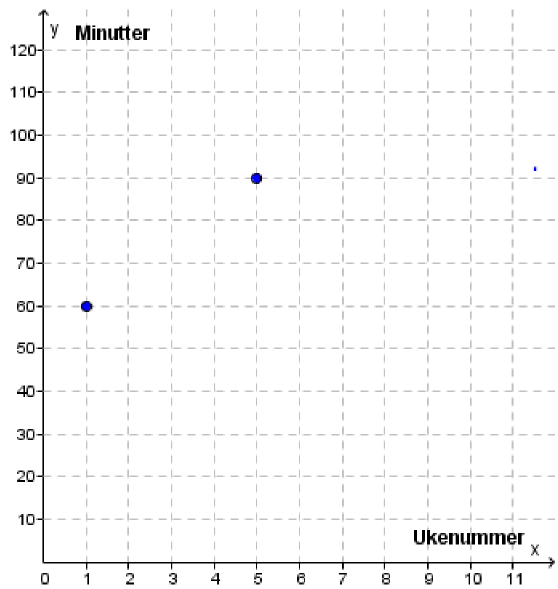
I eksempelet med læreren som måler den samlede vekten av terninger pluss en kopp, står det innledningsvis at læreren har med en bunke på 30 identiske terninger. Det betyr at **modellen** vi har funnet har en øvre grense på 30.

Det er i tillegg ikke mulig å legge på et negativt antall terninger. Dermed blir den nedre grensen 0.

Dette betyr at **modellen** er **gyldig** for x- **verdier** fra og med 0, og til og med 30.

I situasjoner uten tydelige grenser må du selv vurdere hva som er en fornuftig avgrensing.

Oppgave 4



I koordinatsystemet til høyre har Liv markert hvor mange minutter hun trente i uke 1 og i uke 5. Liv har som mål at antall minutter hun trener hver uke skal øke lineært.

Bestem en modell som Liv kan bruke for å regne ut hvor mange minutter hun må øke treningen med hver uke framover for å nå dette målet.

Vurder modellens gyldighetsområde.

Oppgave 5

En ungdom har sittet barnevakt som deltidsjobb. Lønna beregnes ut fra et fast beløp for oppmøte, og et fast beløp for hver time ungdommen sitter barnevakt.

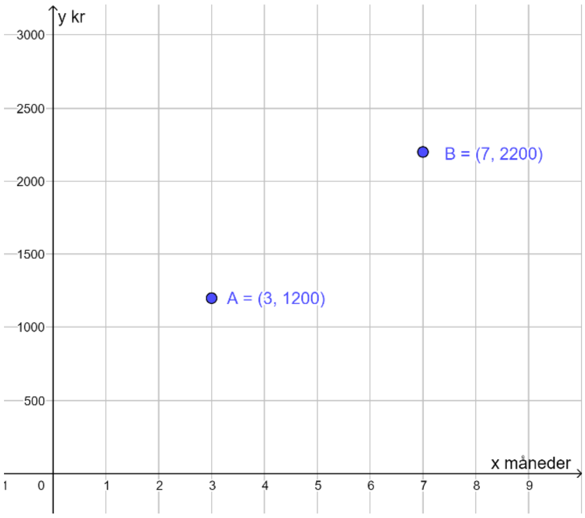
Grafen til høyre viser sammenhengen mellom antall timer ungdommen sitter barnevakt, og hvor mye ungdommen får i lønn.

Velg to punkter fra grafen, og lag en modell som viser sammenhengen mellom antall timer og lønn.

Hvilken informasjon gir modellen? Vurder modellens gyldighetsområde.

Oppgave 6

Kaia har bestemt seg for å spare et fast beløp hver måned et helt år. Punktene til høyre viser hvor mye hun har på sparekontoen etter 3 måneder og etter 7 måneder.



Bruk informasjonen fra grafikkbildet ovenfor til å lage en lineær modell som kan vise utviklingen i antall kroner på kontoen til Kaia.

Hvor mye sparer hun hver måned, og hvor mye hadde hun da hun startet sparinga?

Vurder modellens gyldighetsområde.

Presentasjonsoppgave

Det blir stadig vanskeligere for ungdom å skaffe seg arbeid. Andelen ungdom med deltidsjobb har sunket jevnt siden år 2000, og det er foreløpig ingen tegn til at utviklingen endres.

Tabellen nedenfor viser andelen av 17 år gamle gutter og jenter som har deltidsjobb i noen utvalgte år.

År	2000	2005	2010	2015
Andel jenter	74,1	63,9	64,6	55,9
Andel gutter	73,9	61,2	56,2	48,5

Kilde: https://www.ssb.no

Bruk informasjonen i tabellen, og lag en modell for hvert av kjønnene som viser en jevn utvikling i andelen jenter og gutter som har deltidsjobb.

Hva forteller modellene om nedgangen i andelen ungdom som har deltidsjobb? Hvilket gyldighetsområde har modellene?

Lineær utvikling utfra funksjonsuttrykk

Tenk deg at en pakke kjøttdeig tas ut av fryseren, og legges på kjøkkenbenken.

Funksjonsuttrykket

$$T(x) = 2{,}5x - 18$$

kan brukes til å beregne kjøttdeigens temperatur $T(x)$ grader ℃ etter x timer på kjøkkenbenken.

Hvilken informasjon gir dette **funksjonsuttrykket**, og hva kan vi bruke **funksjonsuttrykket** til?

$$T(x) = 2{,}5x - 18$$

Først må vi skjønne symbolene x og $T(x)$.

x står for antall timer som har gått siden kjøttdeigen ble tatt ut, og x er den eneste **variabelen** vi kan bruke når vi skal løse funksjonsoppgaver i GeoGebra. Hvis ikke kunne vi brukt **variabelen** t for timer.

$T(x)$ uttales «T av x», og måler kjøttdeigens temperatur. Skrivemåten forteller at temperaturen er en **funksjon** av **variabelen** x, som betyr at temperaturen **endres** etter hvert som x øker.

Hva betyr tallene i funksjonsuttrykket?

Leddet som står alene er **funksjonens konstantledd**. I dette tilfellet forteller **konstantleddet** at kjøttdeigens temperatur er -18℃ når den tas ut av fryseren.

Tallet foran **variabelen** x er **funksjonens stigningstall**. I dette tilfellet forteller **stigningstallet** at temperaturen stiger med 2,5 per time.

Hva kan vi bruke funksjonsuttrykket til?

Dersom vi tegner **grafen** til **funksjonsuttrykket** inn i GeoGebra, kan vi bruke **grafen** til å finne **tilhørende** x- og y- **verdier**.

Vi kan for eksempel finne ut hvor lang tid det tar før kjøttet har tint, eller hvilken temperatur kjøttet har etter 12 timer.

Tegne grafen for en definisjonsmengde

Definisjonsmengden er på mange måter det samme som **gyldighetsområde**.

Anta at kjøttdeigen når romtemperatur etter 16 timer. Det betyr at **definisjonsmengden** til **funksjonsuttrykket** er fra 0 til 16.

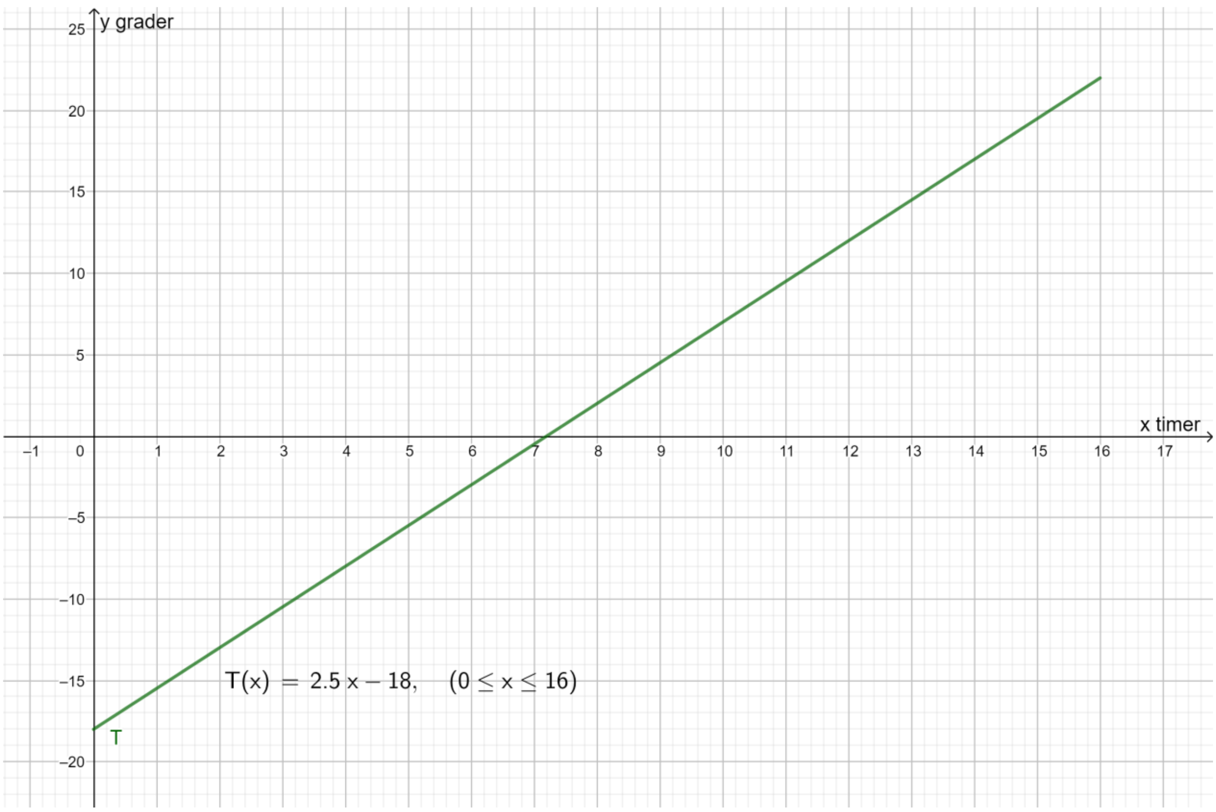
Dette kan også skrives slik:

$$0 \leq x \leq 16$$

Ofte blir **funksjonsuttrykket** og **definisjonsmengden** skrevet sammen slik:

$$T(x) = 2{,}5x - 18 \quad , \quad 0 \leq x \leq 16$$

Det er også slik vi skriver det inn i GeoGebra. Etter justeringer av x- og y- **aksen**, skal du få et grafikkfelt som likner på dette:



Husk å sette navn på **aksene**, og å trekke inn **funksjonsuttrykket**.

Vi kan nå finne **tilhørende** x- og y- **verdier**.

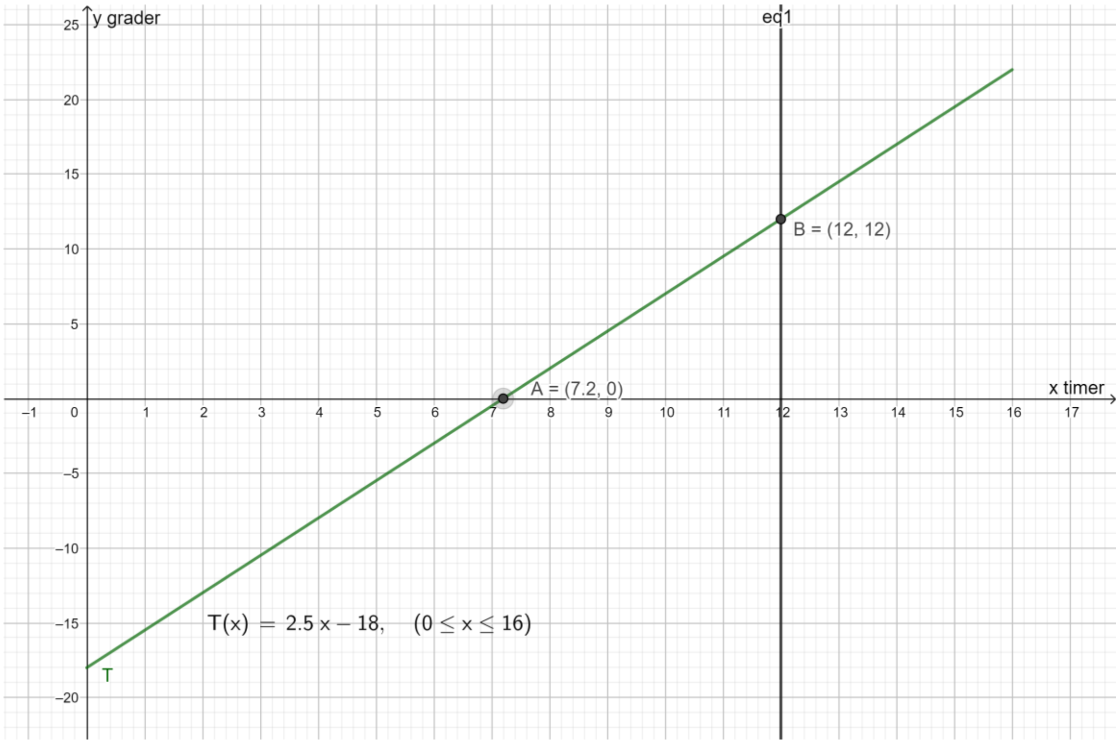
Skjæring mellom to objekt.

Hvor lang tid vil det ta før kjøttdeigen har tint. Hvilken temperatur har kjøttdeigen etter 12 timer?

Kjøttet har tint når det passerer 0℃. Dette finner vi ved å bruke «Skjæring mellom to objekt» og trykke der **grafen** skjærer x- **aksen**.

For å finne kjøttdeigens temperatur etter 12 timer må vi tenke at vii finner 12 timer på x- **aksen**. Derfor må vi skrive $x = 12$, og bruke «Skjæring mellom to objekt» der linja fra $x = 12$ skjærer **grafen**. Alternativt kan vi skrive (12,T(12)).

Dermed får vi disse **punktene** som vi må tolke:



Svar:

Kjøttdeigen tiner etter 7,2 timer. Fremgangsmåte: brukte «Skjæring mellom to objekt».

Etter 12 timer holder kjøttdeigen 12℃. Fremgangsmåte: skrev $x = 12$, brukte «Skjæring mellom to objekt».

Oppgave 7

Mathias ønsker å spare til en reise. Han oppretter et fast månedlig trekk inn på en sparekonto, hvor det allerede står et beløp.

Funksjonsuttrykket

$$S(x) = 500x + 4500 \quad , \quad 0 \leq x \leq 12$$

kan brukes til å regne ut hvor mye han har på sparekontoen $S(x)$ kr når han har spart i x måneder.

Bruk informasjonen ovenfor til å vise at du kan:

- Tegne en avgrenset graf i GeoGebra
- Sette navn på x- og y- aksen
- Gi en praktisk tolkning av en funksjons stigningstall og konstantledd
- Finne tilhørende x- og y- verdier

Alle svar skal skrives i Word, og skal forklares med fremgangsmåte.

Oppgave 8

En del kommuner i distrikts-Norge opplever en jevn nedgang i innbyggertallet.

Funksjonen

$$K(x) = -150x + 3800 \quad , \quad 0 \leq x \leq 10$$

kan brukes til å beregne innbyggertallet $K(x)$ i en kommune x år etter 2021.

Bruk informasjonen ovenfor til å vise at du kan:

- Tegne en avgrenset graf i GeoGebra
- Sette navn på x- og y- aksen
- Gi en praktisk tolkning av en funksjons stigningstall og konstantledd
- Finne tilhørende x- og y- verdier

Alle svar skal skrives i Word, og skal forklares med fremgangsmåte.

Oppgave 9

Tenk deg at du har en fulladet telefon, og at batteriprosenten synker med fast antall prosentpoeng per time ved normal bruk og temperatur. Fuksjonen B gitt ved

$$B(x) = -5x + 100$$

er en modell som viser batteriprosenten $B(x)$ til telefonen, x timer etter at telefonen var fulladet. Bruk informasjonen ovenfor til å vise at du kan:

- Tegne en graf i GeoGebra, og vurdere gyldighetsområdet til en modell
- Sette navn på x- og y- aksen
- Gi en praktisk tolkning av en funksjons stigningstall og konstantledd
- Finne tilhørende x- og y- verdier

Alle svar skal skrives i Word, og skal forklares med fremgangsmåte.

Oppgave 10

21. februar 2020 ble Covid-19 for første gang påvist hos en pasient i Norge. Etter dette steg antall smittede i et relativ raskt tempo.

Dersom vi antar at utviklingen i antall smittede nordmenn økte jevnt i perioden som fulgte, kan antall smittede nordmenn $S(x)$ beregnes ut fra modellen

$$S(x) = 97x$$

hvor x er antall dager etter 20. februar 2020.

22. mars var det registrert 2902 smittede nordmenn. 30. mars hadde dette tallet steget til 4898.

Bruk informasjonen ovenfor til å vise at du kan:

- Tegne en graf i GeoGebra, og vurdere gyldighetsområdet til en modell
- Sette navn på x- og y- aksen
- Gi en praktisk tolkning av en funksjons stigningstall og konstantledd
- Finne tilhørende x- og y- verdier
- Avgjøre om to størrelser er proporsjonale

Alle svar skal skrives i Word, og skal forklares med fremgangsmåte.

En eksamensoppgave

Jacob er selger.

Månedslønnen hans er gitt ved

$$M(x) = 0{,}075x + 32\,000$$

når han selger for x kroner i løpet av en måned.

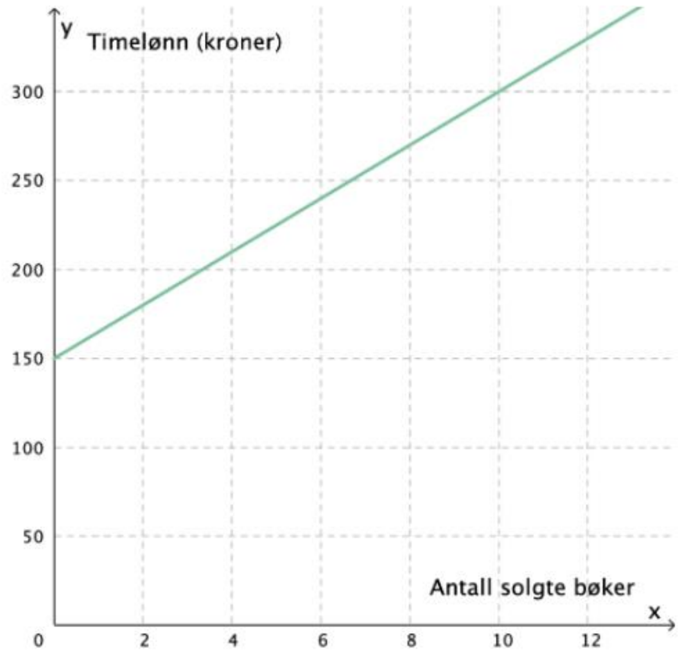
En måned selger Jacob for 150 000 kroner.

Bestem månedslønnen hans denne måneden.

En eksamensoppgave

Sarah har deltidsjobb som bokselger.

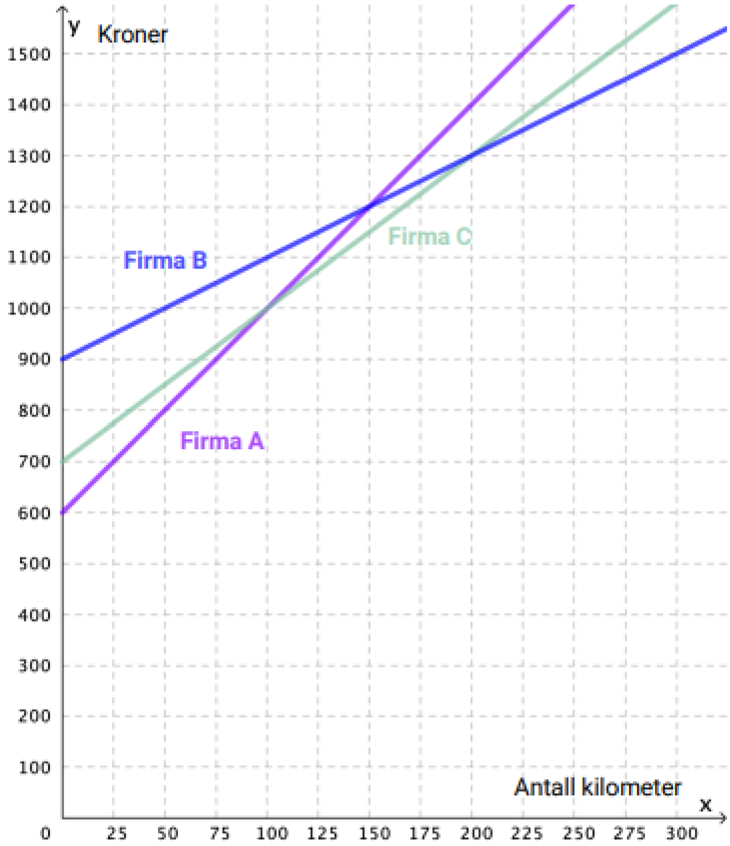
Modellen viser timelønnen hennes når hun selger x bøker i løpet av en time.



Hvor mange bøker må Sarah selge i løpet av en time for at timelønnen skal bli 450 kroner?

En eksamensoppgave

Markus skal leie en bil i ett døgn. Grafene nedenfor viser prisen han må betale i Firma A, Firma B og Firma C.



a) Forklar at prisen Markus må betale hos Firma A, kan beskrives med uttrykket

$$A(x) = 4x + 600$$

b) Hva blir prisen per km hos Firma B dersom Markus kjører 50 km?
Hva blir prisen per km hos Firma B dersom Markus kjører 400 km?

Markus skal kjøre fra Bodø til Sulitjelma og tilbake til Bodø igjen. På internett finner han ut at kjøreavstanden fra Bodø til Sulitjelma er 9,7 mil.

c) Gjør beregninger, og vurder hvilket firma han bør leie hos.

Eksponentiell utvikling: $y = a \cdot b^x$

Dersom y **endres** *fra* et startpunkt *med* en fast **prosent** for hver gang x øker med 1, sier vi at **utviklingen** er **eksponentiell**. Både startpunktet og den faste prosenten har en praktisk betydning, og du vil bli bedt om å kommentere begge.

For å kunne forstå **eksponentielle modeller**, må du først arbeide med **vekstfaktor**.

Prosentvis endring – vekstfaktor

Det er vanlig at prisen på de fleste varer og tjenester øker for hvert år. Siden varer og tjenester med høy pris vil øke med et høyere kronebeløp enn varer og tjenester med lav pris, er det vanlig å beskrive prisveksten med et **prosenttall**.

Vi anser den **opprinnelige** prisen på hver enkelt vare til å være 100 %. I 2021 er den antatte prisveksten på 2,6 %. Det betyr at i gjennomsnitt blir alle varer og tjenester 2,6 % dyrere enn de var ved inngangen til 2021.

Dette betyr at ved utgangen av 2021 har prisen på varer og tjenester steget til 102,6 % i forhold til prisen ved inngangen til 2021. Dette kaller vi **ny verdi i prosent**.

Endringen i prosent kan også være negativ. Som en følge av koronapandemien sank antall pasienter med døgnopphold på norske sykehus med 7 % i 2020, ifølge SSB.

Vi anser det **opprinnelige** antall pasienter med døgnopphold til å være 100 %. Med en nedgang på 7 %, vil **ny verdi i prosent** være 93 %. Det betyr at antall pasienter med døgnopphold i 2020 var 93 % i forhold til antall pasienter med døgnopphold i 2019.

Finne vekstfaktoren

$$100\ \% \pm \boldsymbol{endring\ i}\ \% = \boldsymbol{ny\ verdi\ i}\ \%$$

I forrige kapittel lærte du å gjøre **prosenttallet** om til et **desimaltall**. Det er dette **desimaltallet** vi kaller **vekstfaktor**

$$\frac{\boldsymbol{ny\ verdi\ i}\ \%}{100\ \%} = \boldsymbol{vekstfaktor}$$

Oppgave 11

Fyll ut tabellen nedenfor. Ta utgangspunkt i at **opprinnelig verdi** er 100 %.

-7 %	=	93 %	=	0,93		=		=	0,978
+ 7 %	=	107 %	=	1,07	+ 0,4 %	=		=	
- 7,5 %	=		=		- 17,5 %	=		=	
+ 12,3%	=		=			=	300 %	=	
+ 20 %	=		=			=		=	3,5
- 10 %	=		=		- 100 %	=		=	
	=		=	0,87	- 1,2 %	=		=	
	=	140 %	=			=		=	1,007
+ 100 %	=		=			=	100,2 %	=	
	=	70 %	=		- 25 %	=		=	

Oppgave 12

Beskriv sammenhengen mellom vekstfaktor og prosentvis endring med dine egne ord:

Bruke vekstfaktoren

Dersom vi får opplyst **startverdi** og **endringen i prosent**, kan vi regne **ny verdi** ved hjelp av følgende **regnemetode**:

$$\boldsymbol{Startverdi \cdot ny\ verdi\ i\ \% = ny\ verdi}$$

I oppgave 13 trente du på å gjøre **prosent** om til **desimaltall**. Dersom vi bruker **desimaltallet** i utregningen istedenfor **prosenten**, bruker vi ordet **vekstfaktor** om **desimaltallet**. Da får vi følgende **regnemetode**:

$$\boldsymbol{Startverdi \cdot vekstfaktor = ny\ verdi}$$

Anta at en vare i 2020 kostet 143 kroner, og at prisen steg med 2,6 % i løpet av 2021. For å finne prisen i 2021 kan vi enten multiplisere med **ny verdi i prosent**:

$Pris\ 2021 = 143kr \cdot 102{,}6\ \% \approx 147\ kr$

eller ved å multiplisere med **vekstfaktoren**:

$Pris\ 2021 = 143kr \cdot 1{,}026 \approx 147\ kr$

I 2019 ble det registrert omtrent 750 000 pasienter med døgnopphold på norske sykehus. I 2020 var dette antallet 7 % lavere. For å finne antall pasienter med døgnopphold i 2021 kan vi enten multiplisere med **ny verdi i prosent**:

$Antall\ pasienter\ med\ døgnopphold\ 2020 = 750\ 000 \cdot 93\ \% = 697\ 500$

eller ved å multiplisere med **vekstfaktoren**:

$Antall\ pasienter\ med\ døgnopphold\ 2020 = 750\ 000 \cdot 0{,}93 = 697\ 500$

Du velger selv hvilken metode du ønsker å bruke. Det er imidlertid greit å vite hvilke metoder du kan bruke på de ulike digitale hjelpemidlene:

Digitale hjelpemidler	Vekstfaktoren	Ny verdi i %
ExCel	✓	✓
GeoGebra	✓	✓
CAS	✓	✓
Kalkulator	✓	Ikke alle

Løs noen av oppgavene nedenfor ved hjelp av ExCel og CAS.

Oppgave 13
I 2018 ble en leilighet kjøpt for 2 450 000 kr. I 2021 hadde verdien av leiligheten steget med 15 %. Hvor høy er verdien av leiligheten i 2021?

Oppgave 14
Nypris på en moped var 12 000 kr. Etter ett år hadde verdien sunket med 20 %. Hva var verdien på mopeden etter ett år?

Oppgave 15
Hanne har en timelønn på 160 kr. Hun blir lovet en lønnsøkning på 4,3 %. Hva blir den nye timelønna hennes?

Oppgave 16
Prisen på en aksje var 68 kr. Dagen etter hadde verdien sunket med 2,8 %. Hva ble den nye verdien på denne aksjen?

Oppgave 17
En familie kjøpte en leilighet i 2008 for 1,8 millioner kroner. De antar at leilighetens verdi har steget med 150 % frem til i dag. Hvor høy er verdien på leiligheten dersom familien har rett?

Oppgave 18

a) I januar 2019 kjøpte en person akser for et visst beløp. Verdien på aksjene kunne i juni beregnes utfra regnestykket 15 000 · 1,05. Hva forteller tallene 15 000 og 1,05?
b) Høsten 2020 startet et visst antall elever på VG1. Antall elever som fullførte året kan beregnes utfra regnestykket 140 · 0,875. Hva forteller tallene 140 og 0,875?

Flere prosentvise endringer

Vi må forvente at prisen på varer og tjenester fortsetter å øke i årene som kommer. For hver prisstigning må vi multiplisere den nye prisen med **vekstfaktoren.** Selv om **endringen i prosent** er lik for hvert år, vil prisstigningen i kroner bli høyere for hvert år.

Anta at varen som kostet 147 kroner i 2021 øker med 2,6 % hvert år de neste 4 årene. For hver prisendring må vi multiplisere med **vekstfaktoren**, noe som gir dette regnestykket:

$Pris\ etter\ 4\ endringer = 147\ kr\ \cdot 1{,}026 \cdot 1{,}026 \cdot 1{,}026 \cdot 1{,}026 \approx 163\ kr$

Dette kan forenkles ved hjelp av potens

Vi får dermed:
$Pris\ etter\ 4\ endringer = 147\ kr\ \cdot 1{,}026^4 \approx 163\ kr$

Anta at antall pasienter med døgnopphold ved norske sykehus fortsetter å synke med 7 % hvert år i de neste tre årene. Vi kan dermed regne ut at
$Antall\ pasienter\ med\ døgnopphold = 697\ 500\ \cdot 0{,}93^3 = 561\ 039$

Vi kan regne ut **ny verdi** etter den siste **prosentvise endringen** ved hjelp av følgende **regnemetode**:

$$\boldsymbol{Startverdi\ \cdot vekstfaktor^x = ny\ verdi}$$
$$\boldsymbol{der\ x\ ertattes\ av\ antall\ endringer}$$

Du legger kanskje merke til at vi kun har vist utregning ved hjelp av **vekstfaktoren**, og ikke ved hjelp av **ny verdi i prosent**? Grunnen ser du her:

Digitale hjelpemidler	**Vekstfaktoren**	**Ny verdi i %**	Kalkulator lar deg ikke bruke **prosenttall** ved potensregning
ExCel	✔	✔	
GeoGebra	✔	✔	
CAS	✔	✔	
Kalkulator	✔	✘	

Løs noen av oppgavene nedenfor ved hjelp av ExCel og CAS.

Oppgave 19
Hvis vi setter 10 000 kr i banken 1. januar, vil vi etter ett år få *renter* av pengene slik at beløpet på kontoen øker. Renten er en bergenes prosentvis av det beløpet vi har på kontoen.

Hvor mye vil vi ha på kontoen etter 5 år dersom renta er på 3 % per år?

Oppgave 20
En bærbar PC koster 9800 kr som ny. Vi regner med at verdien minker med 25 % i året. Hvor mye er PC-en verdt etter 4 år?

Oppgave 21
Anta at en aksje, som i dag er verdt 118 kr, stiger med 2 % hver dag den neste uka. Hvor høy er verdien på aksjen etter en uke (7 dager)?

Oppgave 22
Knut kjøper en bil, og han vet at bilens verdi synker en viss prosentandel hvert år. Han ser for seg å beholde bilen i noen år, og han lager følgende regnestykke for å beregne hvor mye han kan selge bilen for:

$$Salgspris \ = \ 320\,000 \cdot 0{,}85^4$$

Hvor mye kjøpte Knut bilen for, hvor mange prosent antar Knut at verdien synker hvert år, og hvor mange år tenker Knut å beholde bilen før han selger den?

Hvor mye regner Knut å selge bilen for?

En eksamensoppgave

En bakterie formerer seg ved todeling (dobling) hvert 20. minutt.

Det vil si at om det i starten er én bakterie, vil det etter 20 minutter være 2 bakterier, etter 40 minutter være 4 bakterier osv.

Hvor mange bakterier vil det være etter 12 timer?

En eksamensoppgave

Verdifallet utgjør bilens største kostnad, særlig det første året, enten bilen er kjøpt ny eller brukt.

Verdifallet utgjør bilen største kostnad. Verdifallet er i de aller fleste tilfellene størst det første året. For en nybil kan du forvente 20 prosent første året. Deretter om lag 14 prosent av bruktprisen fra det andre året, synkende til 10 prosent det sjette året. Og fra det sjette året 10 prosent årlig.

Teksten ovenfor er hentet fra smartepenger.no.

Mathilde kjøpte en ny bil. Bilen kostet 390 000 kroner.

Mathilde vil lage en oversikt som viser bilens verdifall i prosent de første seks årene. Hvert år vil hun sammenligne bilens verdi med verdien året før. I tillegg vil hun hvert år sammenlikne bilens verdi med verdien da den var ny.

Hun har brukt tallene fra smartepenger.no, og satt opp et regneark som vist nedenfor.

	A	B	C
1	**Verdifall i prosent**		
2	**År**	**Sammenliknet med verdien året før**	**Sammenliknet med verdien som ny**
3	1	20 %	20 %
4	2	14 %	31 %
5	3	13 %	
6	4	12 %	
7	5	11 %	
8	6	10 %	

a) Vis hvordan Mathilde kan ha kommet frem til 31 % i celle C4.

b) Lag regnearket og legg inn formler for å regne ut verdier i de grønne cellene.

Mathilde vil også ha en oversikt som viser verdifallet i kroner for bilen hun kjøpte. Hvert år skal oversikten vise verdifallet fra året før. I tillegg skal den for hvert år vise verdifallet i kroner fra da bilen var ny.

c) Utvid regnearket fra oppgave b) slik at du også får med en slik oversikt.

Ukjent antall endringer – eksponentiell utvikling

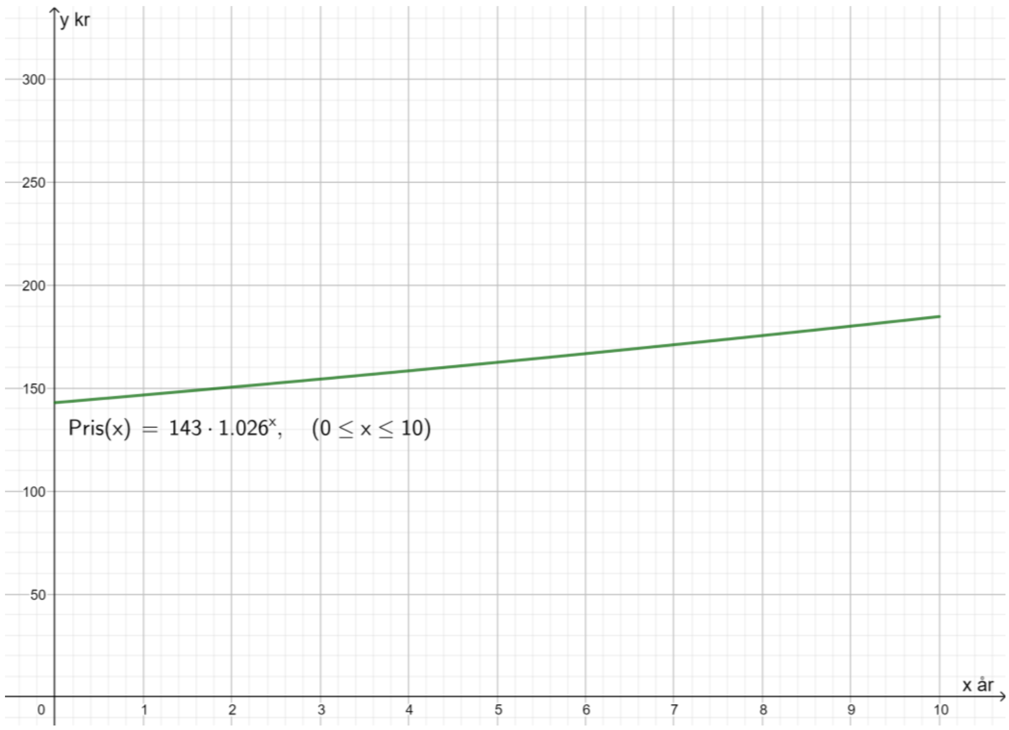
På de forrige sidene har vi sett på hvordan vi regner **ny verdi** etter et bestemt antall **prosentvise endringer**. Dersom vi ønsker å lage en **regnemetode** som gir oss mulighet til å finne **ny verdi** etter et ukjent antall **endringer**, må vi erstatte det kjente antallet **endringer** med variabelen x.

Nedenfor har vi beskrevet utviklingen i pris for varen fra tidligere eksempler.

Opprinnelig beløp	Etter 1 år	Etter 2 år	Etter 3 år	Etter x år

$143\ kr$	$143\ \cdot 1{,}026^1$	$143\ \cdot 1{,}026^2$	$143\ \cdot 1{,}026^3$	$143\ \cdot 1{,}026^x$

Grafisk vil utviklingen 10 år fremover se slik ut:



Funksjonsuttrykket $143 \cdot 1{,}026^x$ er skrevet på formen $y = a \cdot b^x$.

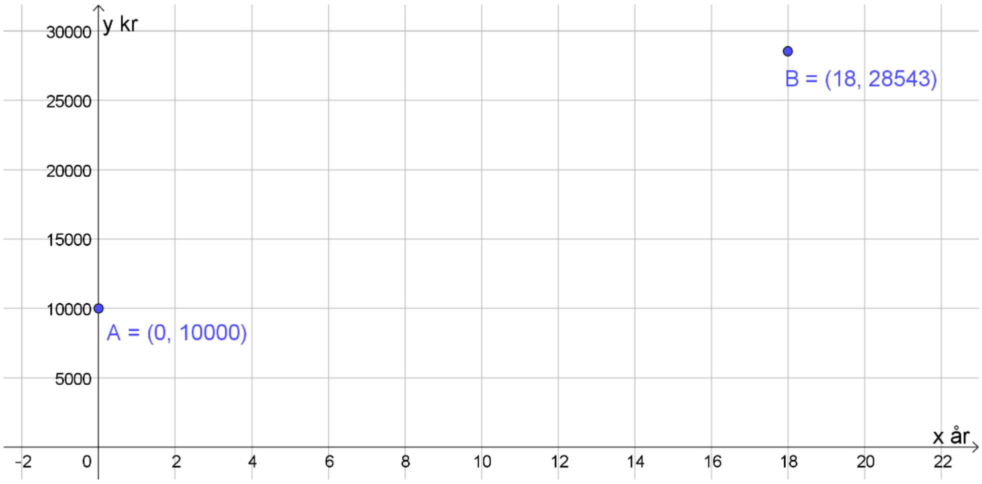
143 er **funksjonens opprinnelige verdi**, og forkortes a

1,026 er **funksjonens vekstfaktor**, og forkortes b.

I oppgaver vil du bli bedt om å tolke **funksjonsuttrykket.**

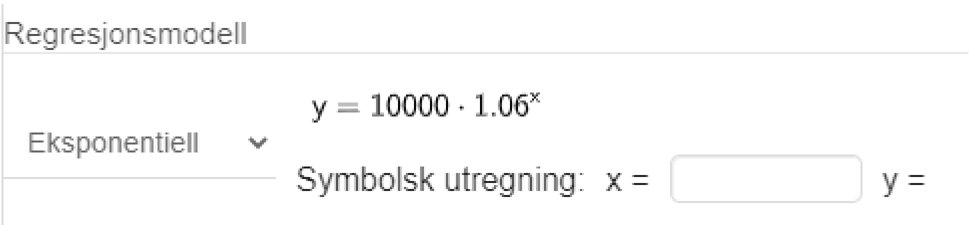
Eksponentiell utvikling utfra punkter

Tenk deg at foreldrene til et nyfødt barn satte inn et beløp i et aksjefond da barnet ble født. Foreldrene forventer at verdien til aksjefondet stiger frem til barnet blir 18 år.



Kan **punktene** i **koordinatsystemet** ovenfor brukes til å finne aksjefondets årlige verdiøkning, dersom aksjefondet har steget med en fast **prosent** hvert år?

Vi skriver punktene inn i regnearket i GeoGebra, og ber GeoGebra utføre en regresjonsanalyse. Deretter velger vi en eksponentiell modell, og får dette funksjonsuttrykket:



Funksjonsuttrykket gir oss denne informasjonen:

10 000 er det opprinnelige beløpet foreldrene plasserte i aksjefondet da barnet ble født.

1,06 = 106 %, som betyr 6 % årlig verdiøkning.

Også her kan du bli bedt om å finne **tilhørende** x- og y- **verdier**, og det gjøres på samme måte som tidligere.

Oppgave 23

En nyåpnet videregående skole presenterte følgende elevtall for to utvalgte år etter oppstart:

År etter oppstart	1	3
Elevtall	620	680

Skolens ledelse antar at utviklingen i skolens elevtall kan beskrives med en prosentvis endring som er gyldig i noen år fremover.

Bruk tallene i tabellen til å lage en modell som kan brukes til å beskrive utviklingen i skolens elevtall. Hva forteller modellen om den prosentvise endringen per år i skolens elevtall?

Oppgave 24

Ved en annen nyåpnet videregående skole så elevtallet slik ut i to utvalgte år:

År etter oppstart	1	3
Elevtall	1420	1217

Skolens ledelse antar at utviklingen i skolens elevtall kan beskrives med en prosentvis endring som er gyldig i noen år fremover.

Bruk tallene i tabellen til å lage en modell som kan brukes til å beskrive utviklingen i skolens elevtall. Hva forteller modellen om den prosentvise endringen per år i skolens elevtall?

En eksamensoppgave

Tabellen nedenfor viser antall innbyggere i Norge 1. januar noen utvalgte år.

År	1960	1970	1980	1990	2000	2010	2017

Innbyggere (millioner)	3,57	3,86	4,08	4,23	4,47	4,85	5,25

La x være antall år etter 1960. (La $x = 0$ svare til år 1960, $x = 10$ til 1970 osv.)

Før du begynner med oppgavene nedenfor må du regne ut x- verdiene til alle årstallene.

Vis at $f(x) = 3{,}57 \cdot 1{,}006^x$ er en modell som passer godt med tallene i tabellen. Hva forteller tallet 1,006 i denne modellen?

En eksamensoppgave

Dato	1. juni	1. juli	1. august	1. september
Antall tusen registrert smittet	6278	10 660	17 837	25 761

Tabellen viser antall tusen personer som totalt var registrert smittet av covid-19 noen dager i 2020.

La $x = 1$ svare til 1. juni, $x = 2$ til 1. juli, $x = 3$ til 1. august og $x = 4$ til 1. september.

a) Bruk regresjon til å vise at funksjonen f gitt ved

$$f(x) = 4038 \cdot 1{,}608^x$$

kan brukes som en modell for antall tusen personer som totalt var registrert smittet måned for måned i denne perioden.

b) Hvor mange prosent økte det totale antallet registrert smittede personer med per måned ifølge modellen?

Eksponentiell utvikling utfra funksjonsuttrykk

Tenk deg at du kjøper en moped når du blir 16 år, og selger denne når du blir 20 år. I hvert av de fire årene du eier mopeden, vil mopedens **verdi** synke med en fast prosent.

Funksjonen

$$M(x) = 15000 \cdot 0.85^x \quad , \quad 0 \leq x \leq 4$$

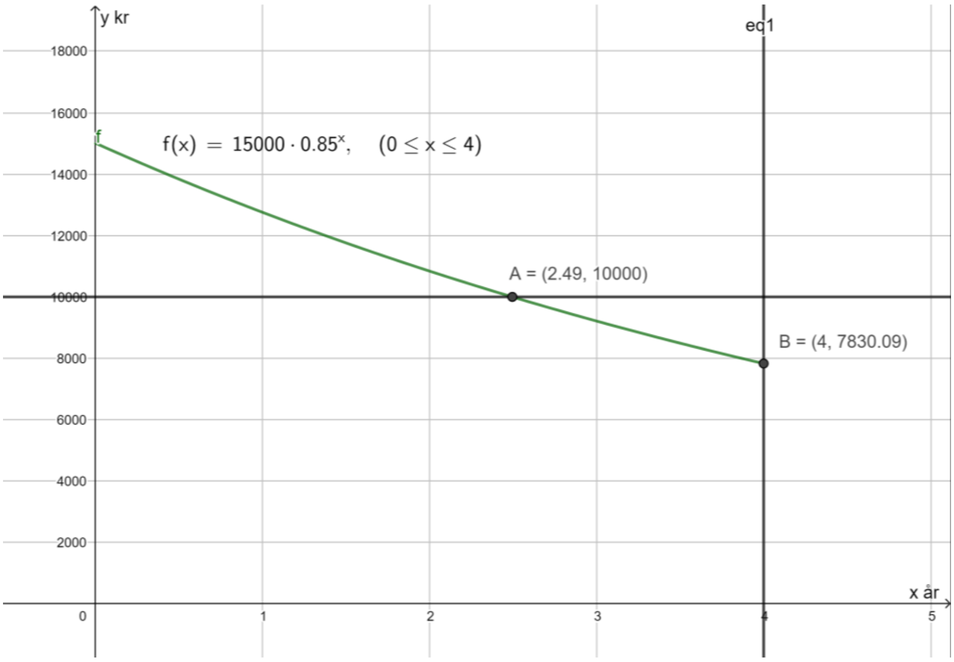
kan brukes til å beregne mopedens **verdi** $M(x)$ kroner x år etter at du kjøpte den.

Hvilken interessant informasjon kan vi finne ved hjelp av **funksjonsuttrykket**?

- **Opprinnelig verdi** er 15000. Dette er summen du kjøper mopeden for.
- **Vekstfaktoren** er 0,85. Dette betyr at mopedens verdi synker med 15 % i året
- $0 \leq x \leq 4$ er **funksjonens** avgrensning. Dette betyr at funksjonen er gyldig for x- verdier mellom 0 og 4.

Ved å tegne **grafen** i GeoGebra, kan vi finne ut at:

- **Punkt** A forteller at du må selge mopeden innen 2 år dersom du ønsker å selge den for minst 10 000 kr. Fremgangsmåte: skrev y = 10000, brukte «skjæring mellom to objekt».
- **Punkt** B forteller at forventet salgsverdi om 4 år er omtrent 7 800 kroner. Dette betyr at du må forvente et verditap på omtrent 7 200 kroner på dette kjøpet. Fremgangsmåte: skrev x = 4, brukte «skjæring mellom to objekt».



Oppgave 25

En familie kjøper en bil.

Funksjonen

$$f(x) = 420000 \cdot 0{,}82^x \quad , \quad 0 \leq x \leq 8$$

kan brukes til å beregne bilens verdi $f(x)$ kroner x år etter kjøpet av bilen, og frem til familien planlegger å selge bilen.

Bruk funksjonsuttrykket og grafen til å finne interessant informasjon om bilens verdi.

Oppgave 26

Familien kjøpte samtidig en leielighet.

Funksjonen

$$L(x) = 3480000 \cdot 1{,}08^x \quad , \quad 0 \leq x \leq 15$$

kan brukes til å beregne leilighetens verdi $L(x)$ kroner x år etter kjøpet av leiligheten, og frem til familien planlegger å selge leiligheten.

Bruk funksjonsuttrykket og grafen til å finne interessant informasjon om leilighetens verdi.

Oppgave 27

Funksjonen *N* gitt ved

$$N(x) = 5{,}32 \cdot 10^6 \cdot 1{,}008^x \qquad 0 \leq x \leq 9$$

kan brukes til å regne ut befolkningen *N*(x*)* i Norge *x* år etter 1. januar 2021.

Bruk funksjonsuttrykket og grafen til å finne interessant informasjon om Norges befolkning.

Oppgave 28

Spørsmålet om hvor mange mennesker som kan leve på jorda har vært stilt en rekke ganger. Funksjonen gitt ved

$$F(x) = 7{,}83 \cdot 10^9 \cdot 1{,}0114^x \quad 0 \leq x \leq 10$$

kan brukes til å beregne folketallet på jorda *x* år etter 1. januar 2021.

Bruk funksjonsuttrykket og grafen til å finne interessant informasjon om verdens folketall.

Oppgave 29

Funksjonen *O* gitt ved

$$O(x) = 1{,}1 \cdot 10^{13} \cdot 1{,}063^x \qquad 0 \leq x \leq 10$$

viser forventet verdi av Statens pensjonsfond utland (Oljefondet) *O*(x*)* for x år etter 1. januar 2021.

Bruk funksjonsuttrykket og grafen til å finne interessant informasjon om Norges fondsformue.

Oppgave 30

En kopp med rykende varm kaffe settes på kjøkkenbenken. Funksjonen

$$T(x) = 73 \cdot 0{,}83^x + 20$$

er en modell som viser temperaturen $T(x)$ grader °C til kaffen, x minutter etter at koppen blir satt på kjøkkenbenken.

Tegn grafen til T. Gi en forklaring på tallene 0,83 og 20.

Hvilket gyldighetsområde vil du si at modellen kan ha?

Oppgave 31

Funksjonen O gitt ved

$$O(x) = 697000 \cdot 1{,}008^x$$

kan brukes til å beregne folketallet i Oslo x år fremover.

Gi en forklaring på tallene 697 000 og 1,008.

Hvilket gyldighetsområde vil du si at modellen kan ha?

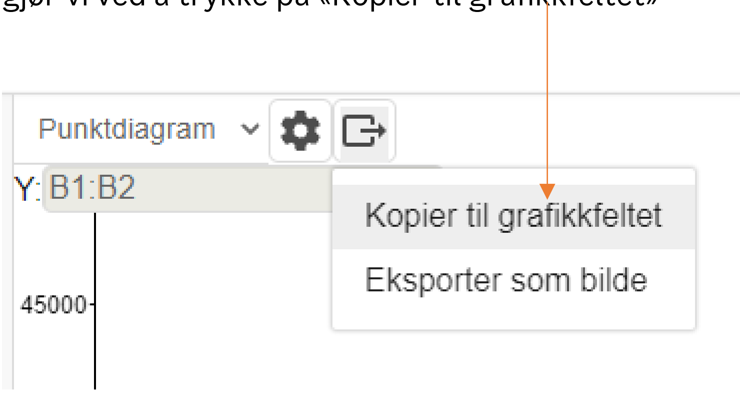
Sammenligne lineære og eksponentielle modeller

Det kan ofte være interessant å analysere en utvikling ved hjelp av ulike modeller. For å avgjøre hvilken av modellene som best beskriver utviklingen må vi sammenligne hva modellene spår med en reell observasjon eller en prognose.

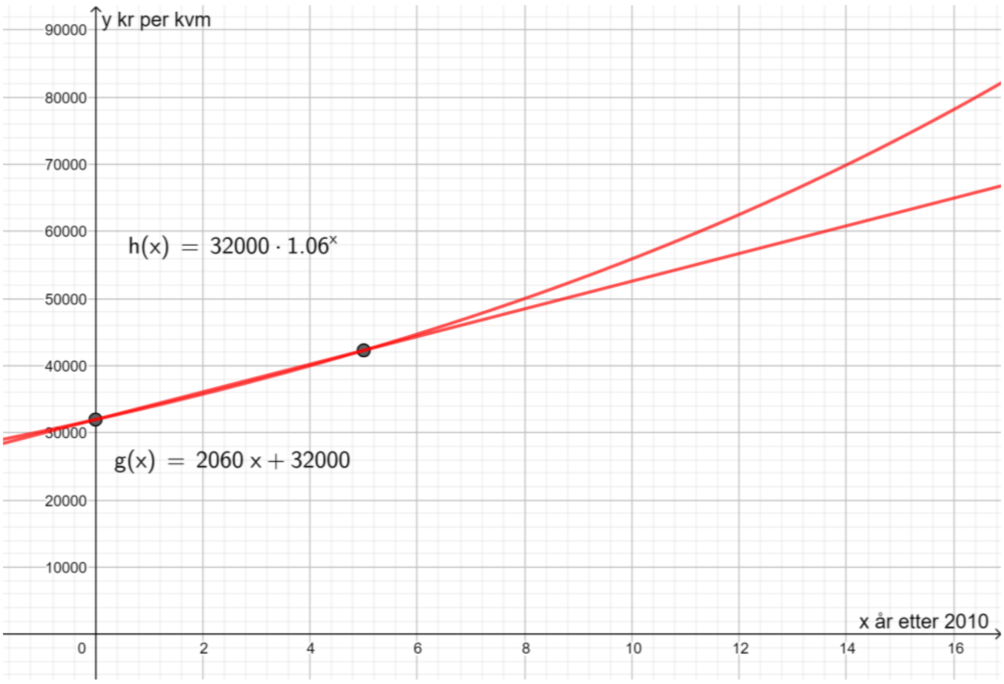
I januar 2010 var den gjennomsnittlige kvadratmeterprisen for alle brukte OBOS-tilknyttede boliger omtrent 32 000 kroner. I januar 2015 hadde denne prisen steget til omtrent 46 500 kroner.

Vi kan beskrive utviklingen i kvadratmeterpris for OBOS-boliger både lineært og eksponentielt slik vi har gjort tidligere, men hvilken av modellene gir et mest mulig riktig bilde av prisutviklingen i årene etter 2015?

For å finne svaret på dette kan vi kopiere hver av modellene til grafikkfeltet. Dette gjør vi ved å trykke på «Kopier til grafikkfeltet»

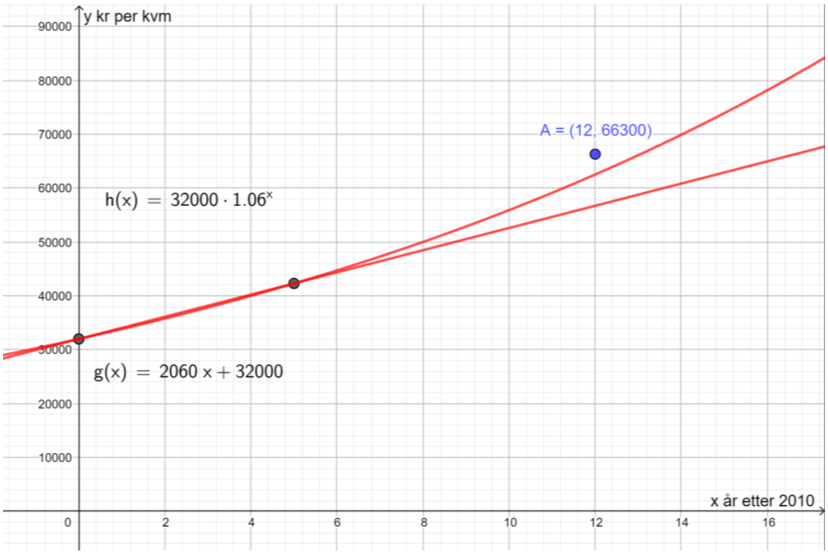


Vi kan dermed få frem dette bildet, etter å ha endret aksene:



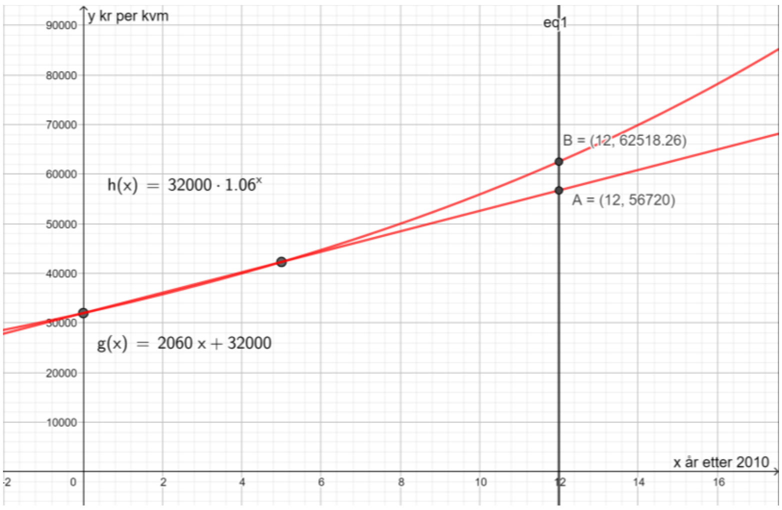
Bildet på forrige side viser at modellene viser relativt lik utvikling mellom 2010 og 2015, men at det eksponentielle modellen stiger vesentlig mer enn den lineære i årene etter 2015. Dersom vi ønsker å avgjøre hvilken av modellene som best beskriver prisutviklingen, må vi sammenligne modellene med et fremtidspunkt.

I januar 2022 hadde kvadratmeterprisen for Obos-boliger steget til omtrent 66 300 kroner. Vi legger denne opplysningen inn i grafikkfeltet, og får dette bildet:



Grafikkbildet ovenfor viser at den eksponentielle modellen er nærmest det virkelige punktet, og vi kan derfor anta at prisutviklingen i årene fremover best beskrives eksponentielt.

Vi kunne også sjekket hvor høy hver av modellen spår kvadratmeterprisen vil være i 2022, ved å skrive inn x=12, og deretter bruke «Skjæring mellom to objekt»:



Konklusjonen blir uansett den samme: den eksponentielle modellen er nærmest den virkelige prisen, og prisutviklingen beskrives best eksponentielt!

Oppgave 32

Tabellen viser folketallet y i Norge (i millioner) fra 1950 (x = 0) til 2000 (x = 50).

År	**1950**	**1960**	**1970**	**1980**	**1990**	**2000**
X	0					50

y folketall i millioner	3,2	3,6	3,9	4,1	4,2	4,5

a) Finn ved regresjon en lineær modell som passer godt til denne utviklingen. Omtrent hvor mye har folketallet økt per år ifølge denne modellen? Kopier grafen til grafikkfeltet.

b) Finn en modell på formen $y = a \cdot b^x$ som passer godt til denne utviklingen. Omtrent hvor mye øker folketallet per år ifølge denne modellen? Kopier grafen til grafikkfeltet.

Undersøk folketallet i Norge i dag (73 år etter 1950). Lag et punkt av denne opplysningen i grafikkfeltet.

c) Hvilken av modellene passer best med dagens folketall?

Oppgave 33

Antall individer i en dyrebestand ble kartlagt.

I 2020 var det 12 000 individer i dyrebestanden.

I 2021 var det 11 400 individer i dyrebestanden.

La x være antall år etter 2020

a) Lag en modell som kan brukes til å beregne antall individer x år etter 2020, dersom nedgangen skal beskrives med et fast tall.

b) Lag en modell som kan brukes til å beregne antall individer x år etter 2020, dersom nedgangen skal beskrives med en fast prosent..

En gruppe forskere antar at antall individer i dyrebestanden i 2030 vil være omtrent 5 700.

c) Bruk denne opplysningen til å avgjøre om forskerne antar at utviklingen i antall dyr vil være lineær eller eksponentiell.

Oppgave 34

Lars og Lene forsker på hvordan antallet hoppekreps i et ferskvann endrer seg. Tabellen nedenfor viser antall observerte hoppekreps noen dager i april og mai.

Dato	30. april	3. mai	4. mai	6. mai
Antall hoppekreps	10 000	20 000	30 000	120 000

Ut fra disse observasjonene vil Lars og Lene lage ulike modeller. De lar x være antall dager etter 30. april, og y være antall hoppekreps.

Når Lars lager sin modell, antar han at antallet hoppekreps øker med et fast antall hver dag.

a) Bestem modellen han da får.
Gjør rede for hva hvert av tallene i modellen betyr i denne praktiske situasjonen.

Når Lene lager sin modell, antar hun at antallet hoppekreps øker med en fast prosent hver dag.

b) Bestem modellen hun da får.
Gjør rede for hva hvert av tallene i modellen betyr i denne praktiske situasjonen.

9. mai ble det registrert omtrent 150 000 hoppekreps i ferskvannet.

c) Avgjør om utviklingen i antall hoppekreps passer best med modellen du lagde i a) eller modellen du lagde i b)

Presentasjonsoppgave

I tabellen nedenfor finner du informasjon om lønnsutvikling i perioden 2015 – 2019 blant ulike yrkesgrupper.

	Gjennomsnittlig månedslønn				
Yrkesgruppe	**2015**	**2016**	**2017**	**2018**	**2019**
Ledere	63400	64350	65800	67810	70150
Akademiske yrker	49620	50370	51640	53120	54970
Kontoryrker	36840	37660	38560	39720	41000
Salg og service	32510	33210	33980	34900	36140
Håndverker	36080	36890	37900	38940	40210

La x være antall år fra 2015. Bruk GeoGebra til å finne:

- en lineær beskrivelse av lønnsutviklingen til hver av yrkesgruppene
- en eksponentiell (prosentvis) beskrivelse av lønnsutviklingen til hver av yrkesgruppene

Syns du lønnsutviklingen til yrkesgruppene er rettferdig?

Polynomisk utvikling: $y = ax^2 + bx + c$

Felles for **lineær** og **eksponentiell utvikling** er at **utviklingen** enten er positiv eller negativ. Dersom vi skal beskrive **utvikling** som både er positiv og negativ, må vi bruke **polynomiske modeller**.

Ordet **poly** betyr flere, og en **polynofunksjon** består av flere **ledd**. En **polynomfunksjon** inneholder **variabler** med ulike eksponenter, og den høyeste eksponenten bestemmer graden.

Et **tredjegradspolynom** inneholder et **ledd** med x^3 som høyeste eksponent.

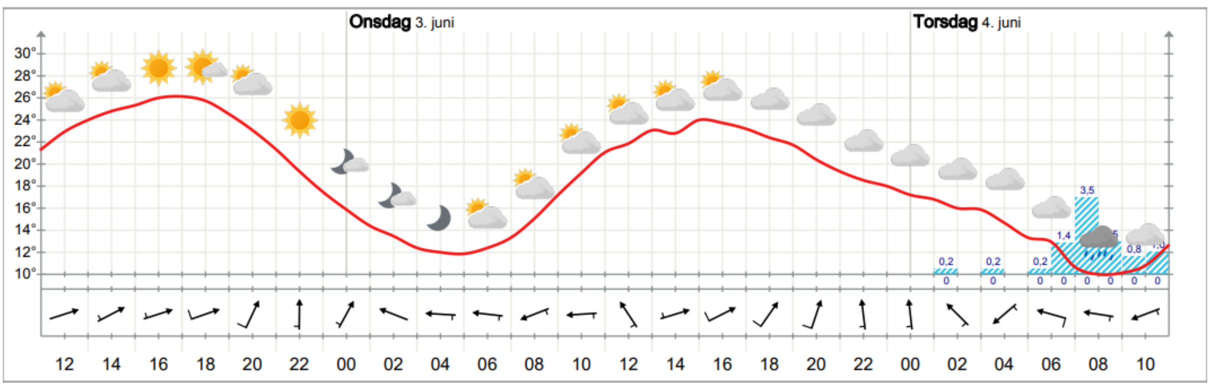
Et **andregradspolynom** inneholder et **ledd** med x^2 som høyeste eksponent.

Oppgave 35

Yr.no har følgende prognose for temperaturen på Hellerud onsdag 3. juni:

Klokkeslett	**0**	**2**	**3**	**5**	**8**	**10**	**11**	**14**	**15**	**17**	**20**	**21**	**22**	**23**
Temperatur	16	13	12	12	15	19	21	23	24	23	20	19	18	18

I tillegg bruker nettsiden følgende linjediagram for å vise den forventet temperatur samme dag:



Legg informasjonen i tabellen inn som punkter i GeoGebra, og velg en modell med en graf som ligner på linjediagrammet ovenfor.

Polynomisk utvikling utfra funksjonsuttrykk

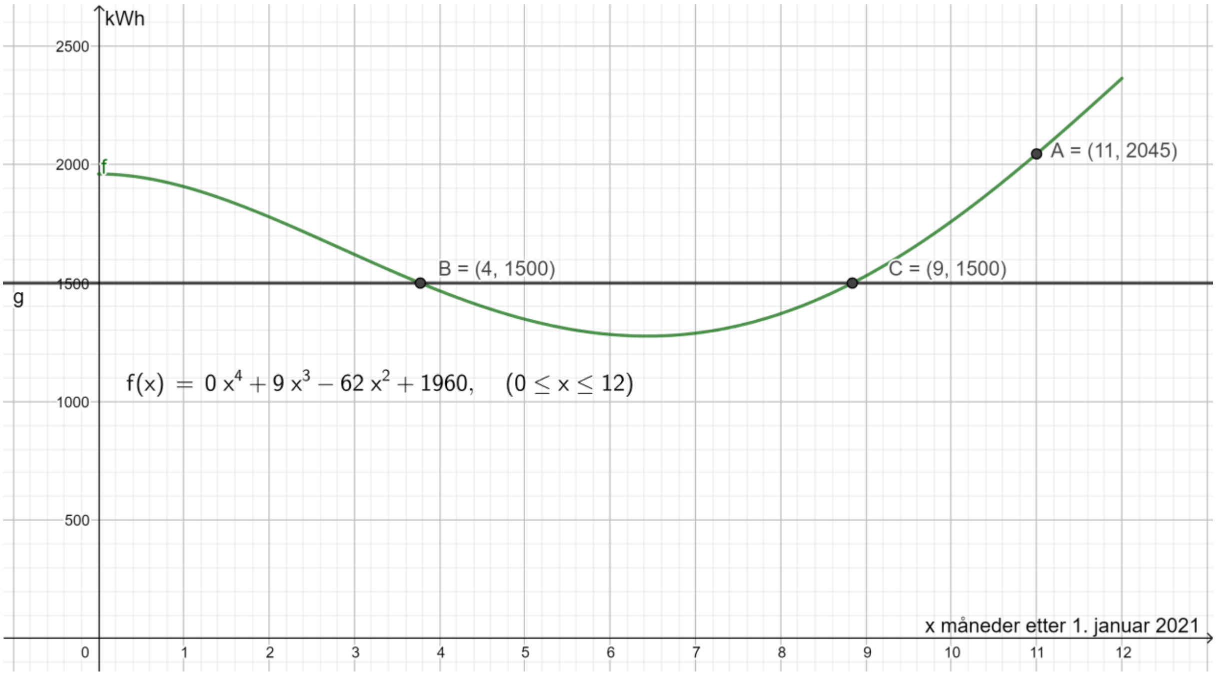
Funksjonen F gitt ved

$$F(x) = -3x^4 + 9x^3 - 62x^2 + 1960 \quad , \quad 0 \leq x \leq 12$$

er en modell som tilnærmet viser det elektriske energiforbruket $F(x)$ kWh per måned i en enebolig x måneder etter 1. januar 2021.

Dersom vi skriver inn funksjonsuttrykket i GeoGebra, kan vi bruke grafen til å finne ut for eksempel:

- Hvor høyt strømforbruket var i november (2045 kWh, se punkt A)
- I hvilke måneder strømforbruket var lavere enn 1500 kWh (fra april til septbemer, se punkt B og C).



Oppgave 36

Funksjonen *f* gitt ved

$$f(x) = -9x^3 + 270x^2 - 1400x + 3000 \quad , \quad 0 \leq x \leq 24$$

viser hvor mange personer som var logget på en nettside x timer etter midnatt et gitt døgn.

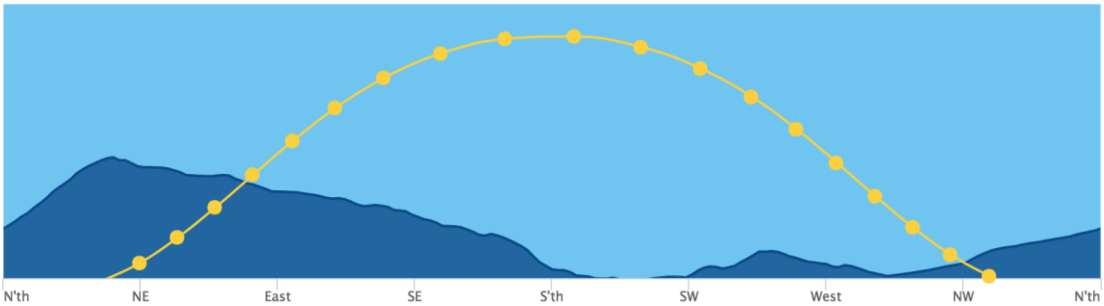
a) Bruk graftegner til å tegne grafen til f.
b) Hvor mange var pålogget nettsiden kl. 07.00?
c) Mellom hvilke klokkeslett var flere enn 7 500 pålogget nettsiden?

Oppgave 37

Funksjonen B gitt ved

$$B(x) = 0{,}006x^4 - 0{,}33x^3 + 5{,}7x^2 - 32{,}1x + 59{,}3 \quad , \quad 5 \leq x \leq 23$$

viser hvor mange grader *B(x)* sola stod over horisonten x timer etter midnatt i Bergen 21. juni 2021.



a) Bruk graftegner til å tegne grafen til B.
b) Mellom hvilke klokkeslett sto sola høyere enn 30 grader over horisonten?
c) Hvor høyt over horisonten sto sola kl. 19.30?

Oppgave 38

Funksjonene M og T gitt ved

$$M(x) = -0{,}0002x^3 + 0{,}046x^2 + 2x + 396 \quad , \quad 0 \leq x \leq 190$$
$$T(x) = -0{,}00028x^3 + 0{,}066x^2 + 2{,}2x + 295 \quad , \quad 0 \leq x \leq 190$$

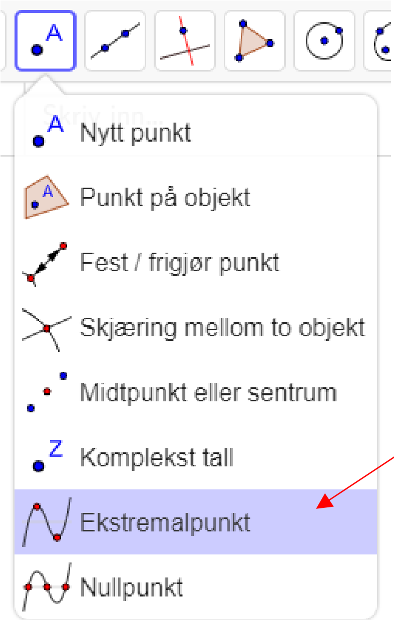
viser tilnærmet daglengde, $M(x)$ minutter i Mandal og $T(x)$ minutter i Trondheim, x døgn etter 31. desember 2021.

a) Tegn grafene til M og T i samme koordinatsystem.
b) I hvor mange dager var daglengden i Mandal lengre enn daglengden i Trondheim?

Høyest eller lavest verdi – ekstremalpunkt

En utvikling som både stiger og synker vil ha en lavest og en høyest **funksjonsverdi**. Dette kan vi enten finne i ett av **endepunktene** til **grafen**, eller ved å bruke «Ekstremalpunkt».

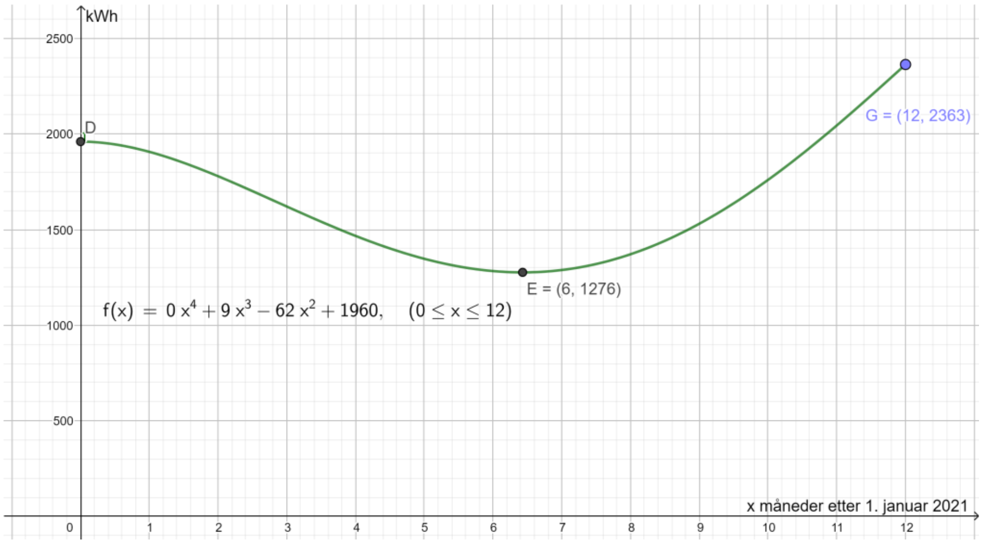
Ved å velge «Ekstremalpunkt» kan du tenke at vi ber GeoGebra finne x- og y-**verdier** der **grafen** snur.



Du finner «snupunktene» ved å velge «Ekstremalpunkt» her:

Deretter trykker du hvor som helst på grafen.

Nedenfor finner vi høyest og lavest strømforbruk i forrige eksempel:



Ved å bruke «Ekstremalpunkt», finner GeoGebra snupunktene D og E. Vi kan se at punkt E er lavest på kurven, og dette forteller oss at strømforbruket var lavest i juni (1276 kWh). Høyest forbruk var i desember (2363 kWh). Avstanden fra lavest til høyest y-**verdi** kalles funksjonens **verdimengde**.

Oppgave 39

I denne oppgaven skal vi bruke funksjonen S gitt ved

$$S(x) = -3x^4 + 305x^3 - 9000x^2 + 66000x + 495000 \quad , \quad 0 \leq x \leq 50$$

som en modell for seibestanden $S(x)$ tonn i Arktis x år etter 1960.

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til S.
b) I hvor mange år var seibestanden lavere enn 450 000 tonn?
c) Når var seibestanden i Arktis på sitt laveste og sitt høyeste? Hvor stor var seibestanden da?

Oppgave 40

Anta at funksjonen A gitt ved

$$A(x) = 0{,}002x^4 - 0{,}13x^3 + 2{,}75x^2 - 18x + 118 \quad , \quad 0 \leq x \leq 30$$

kan brukes som en modell som viser verdien $A(x)$ kroner av en aksje x uker etter 01.01.2021.

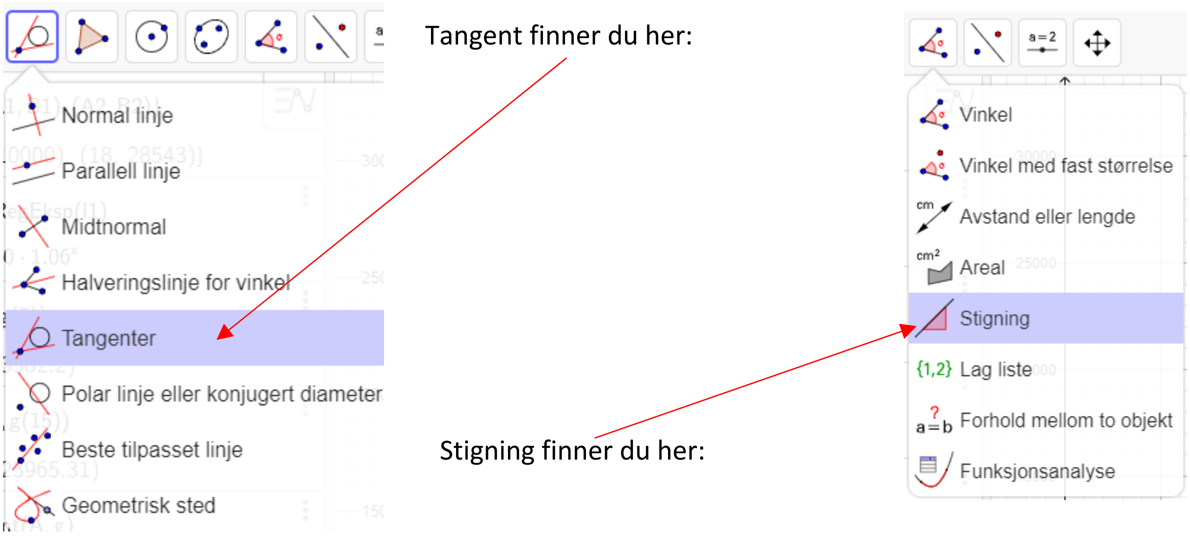
a) Bruk graftegner til å tegne grafen til A.
b) I hvor mange uker var verdien av aksjen høyere enn 92 kroner?
c) Bestem verdimengden til A.

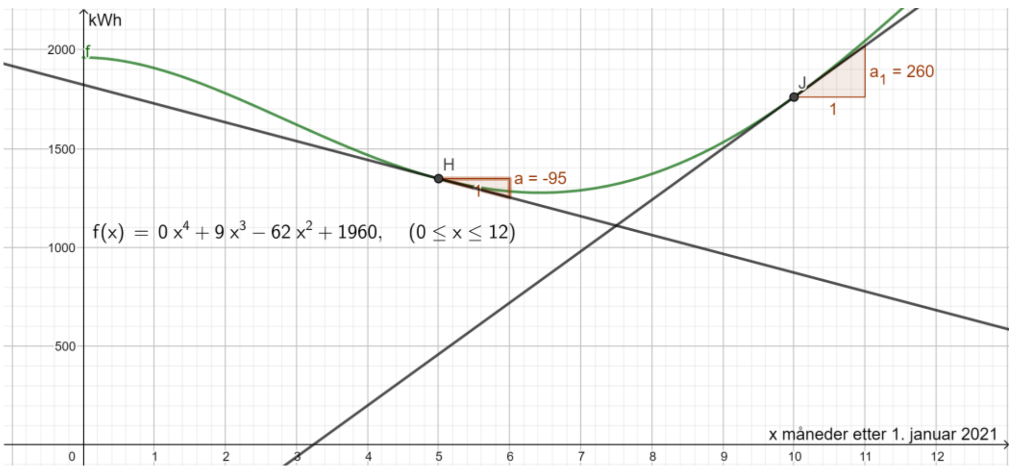
Momentan vekstfart i ett punkt

Det kan være interessant å beskrive **endringen** i y- verdi utfra ett bestemt **punkt**. Det er dette som kalles **momentan vekstfart**.

For å finne den **momentane vekstfarten** til y i ett bestemt **punkt** må vi først lage punktet. Deretter velger vi «Tangent», og trykker på **grafen** og **punktet** vi lagde. Vi er ute etter **stigningstallet** til denne tangenten. **Stigningstallet** forteller om **utviklingen** i y- **verdi** i akkurat dette **punktet**. Velg «Stigning», og trykk på begge tangentene.

I eksempelet nedenfor ønsker vi å finne den **momentane vekstfarten** i mai og oktober.





Stigningstallet til **tangenten** i punkt H forteller at i mai synker forbruket med 148 kWh per måned.

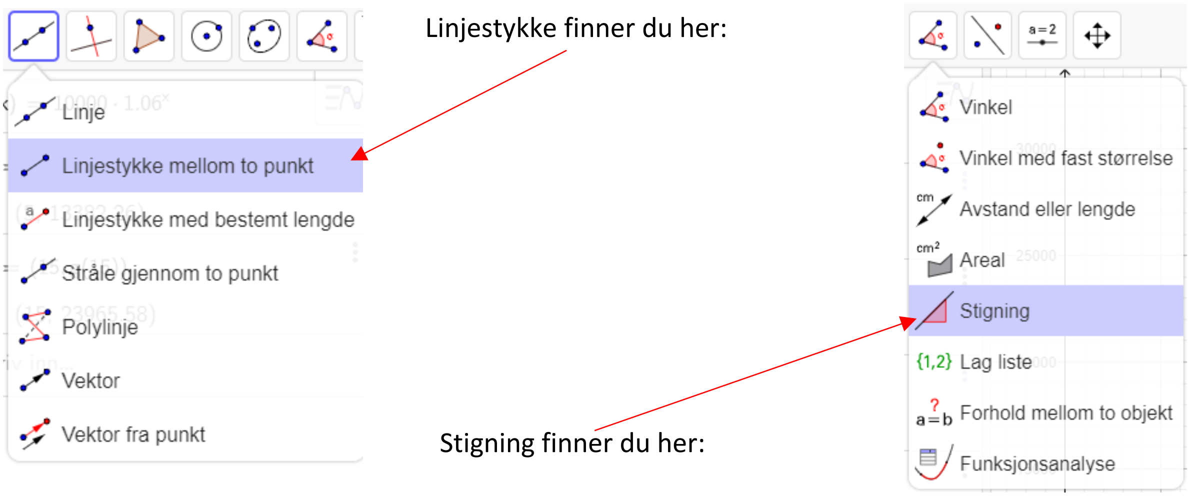
Stigningstallet til **tangenten** i punkt J forteller at i oktober stiger forbruket med 260 kWh per måned.

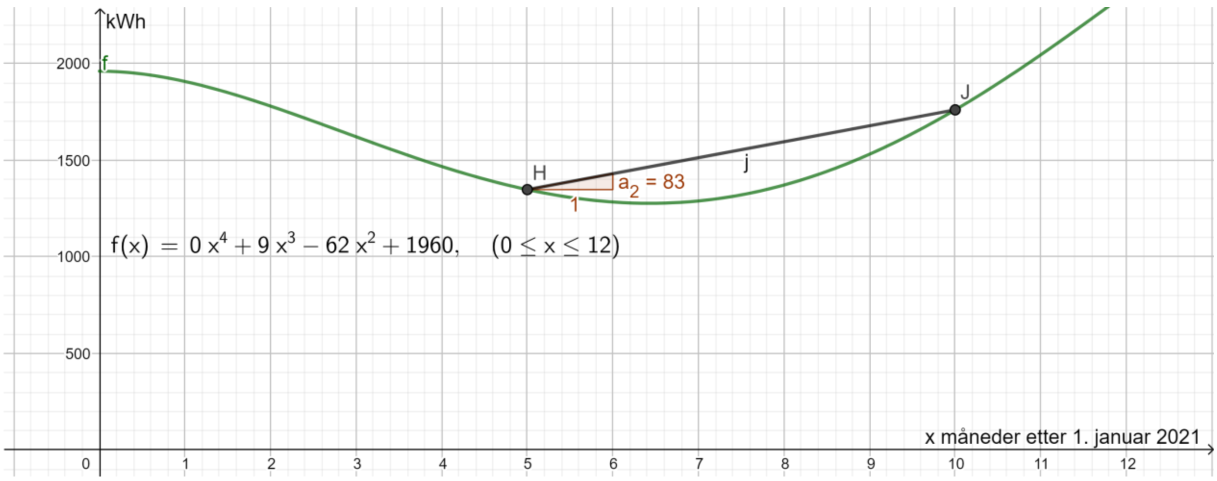
Gjennomsnittlig vekstfart mellom to punkter

Det kan også være interessant å beskrive **endringen** i y- verdi mellom to **punkter**. Det er dette som kalles **gjennomsnittlig vekstfart**.

For å finne den **gjennomsnittlige vekstfarten** til y mellom to **punkter** må vi først lage **punktene** (i dette eksempelet skal vi bruke **punkter** vi fant i forrige eksempel).

Deretter velger vi «Linjestykke mellom to punkt», og trykker på **punktene** vi lagde. Vi er ute etter **stigningstallet** til dette linjestykket. **Stigningstallet** forteller om gjennomsnittlig **utvikling** i y- **verdi** mellom disse **punktene**. Velg «Stigning», og trykk på linjestykket.





Stigningstallet til **linjestykket** forteller at strømforbruket økte i gjennomsnitt med 83 kWh per måned fra mai til oktober.

Oppgave 41

Kari tapper ut vannet av en badestamp. Volumet V liter av vannet i badestampen x minutter etter at hun har åpnet kranen, er gitt ved

$$V(x) = 2 \cdot (30 - x)^2 \quad , \quad 0 \leq x \leq 30$$

a) Tegn grafen til V.
b) Hvor mye vann renner i gjennomsnitt ut per minutt fra Kari åpner krana, til badestampen er tom?
c) Bestem den momentane vekstfarten til funksjonen V når $x = 10$.
Gi en praktisk tolkning av svaret.

Oppgave 42

Funksjonen h gitt ved

$$h(x) = -0{,}0005x^3 + 0{,}04x^2 \quad , \quad 0 \leq x \leq 50$$

er en modell som viser høyden $h(x)$ cm til en plante, x dager etter at planten har begynt å spire.

a) Tegn grafen til h.
b) Finn den momentane vekstfarten til $h(10)$.
Gi en praktisk tolkning av svaret.
c) Finn stigningstallet til den rette linja som går gjennom punktene $(10, h(10))$ og $(40, h(40))$.
Gi en praktisk tolkning av svaret.

En eksamensoppgave

En nettbutikk vil starte salg av en ny type ski 1. november 2022.

Anta at funksjonen S gitt ved

$$S(x) = 0{,}75x^3 - 59{,}5x^2 + 1200x \quad , \quad 0 \leq x \leq 52$$

kan brukes som en modell for hvor mange par ski $S(x)$ butikken vil kunne selge per uke x uker etter salgsstart.

a) Hvor mange uker vil butikken kunne selge mer enn 5000 par ski, ifølge modellen?
b) Bestem stigningstallet til den rette linja som går gjennom punktene $(0, S(0))$ og $(12, S(12))$. Gi en praktisk tolkning av svaret.

En eksamensoppgave

Et firma produserer vanntanker. Carl har undersøkt en av tankene og funnet ut at dersom tanken er full og kranen åpnes, vil det etter x minutter være $V(x)$ liter vann igjen i tanken, der

$$V(x) = (10 - 0{,}1x^2)^3 \quad , \quad 0 \leq x \leq 10$$

a) Bestem $V(0)$, og gi en praktisk tolkning av svaret du får.
b) Bruk graftegner til å tegne grafen til V.
c) Hvor lang tid går det fra kranen åpnes, til det er 400 L vann igjen i tanken?
d) Hvor mye vann renner i gjennomsnitt ut av tanken per minutt mens den tømmes?
e) Bestem den momentane vekstfarten til funksjonen V når $x = 3$.
G en praktisk tolkning av svaret du får.

En eksamensoppgave

En dyrebestand består i dag av 500 dyr. En forsker antar at bestanden vil doble seg i løpet av de neste 10 årene.

a) Sett opp en modell $L(x)$ som viser hvor mange dyr det vil være i bestanden om x år, dersom vi antar at bestanden øker lineært.

b) Sett opp en modell $E(x)$ som viser hvor mange dyr det vil være i bestanden om x år, dersom vi antar at bestanden øker eksponentielt.

c) Tegn grafen til funksjonen F gitt ved
$$F(x) = L(x) - E(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq 13$$

d) Bestem toppunktet på grafen til F, og skjæringspunktene mellom grafen til F og hver av de rette linjene $x = 12$ og $y = 12$.
Gi en praktisk tolkning av svarene du får.

Presentasjonsoppgave

Tabellen nedenfor viser det månedlige strømforbruket til en enebolig i Oslo i 2019.

Måned	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
kWh	2800	2230	2360	1420	1410	1190	720	1070	1180	1800	2430	2520

I tillegg får du vite at den gjennomsnittlige strømprisen i 2019 var 112,6 øre/kWh.

Bruk informasjonen over til å finne interessant informasjon om strømforbruket til boligen.

Løsningsforslag

Oppgave 1

Dette er en lineær modell fordi pennene veier like mye, og vekten vil øke med det samme for hver penn som legges i koppen.

Finner ved regresjon modellen $f(x) = 20x + 150$

hvor x er antall penner som blir lagt i koppen.
Funksjonsuttrykket forteller at hver penn veier 20 gram, mens koppen veier 150 gram.

Oppgave 2

Ved regresjon finner vi modellen $y = 15x + 605$

Funksjonsuttrykket forteller at det var 605 elever ved skolens oppstart, og at elevtallet øker med 15 elever per år.

Oppgave 3

Finner ved regresjon modellen $y = -12x + 280$

Funksjonsuttrykket forteller at antall kaniner synker med 12 for hver måned.

Oppgave 4
Liv må øke treningen med 7,5 minutter per uke for å nå dette målet.
Det er vanskelig å sette en begrensning for Liv, men noe særlig mer enn 1 time hver dag (420 minutter i uka) er lite trolig at hun klarer. Vi tror derfor at modellen er gyldig for $x \in [0{,}49]$

Oppgave 5
Modellen forteller at ungdommen får 250 kroner for oppmøtet, og 80 kroner per time.

$y = 80\,x + 250$

Vi tenker at ungdommen kan jobbe fra 2 til 6 timer barnevakt per gang. I så fall er modellen gyldig for $x \in [2{,}6]$

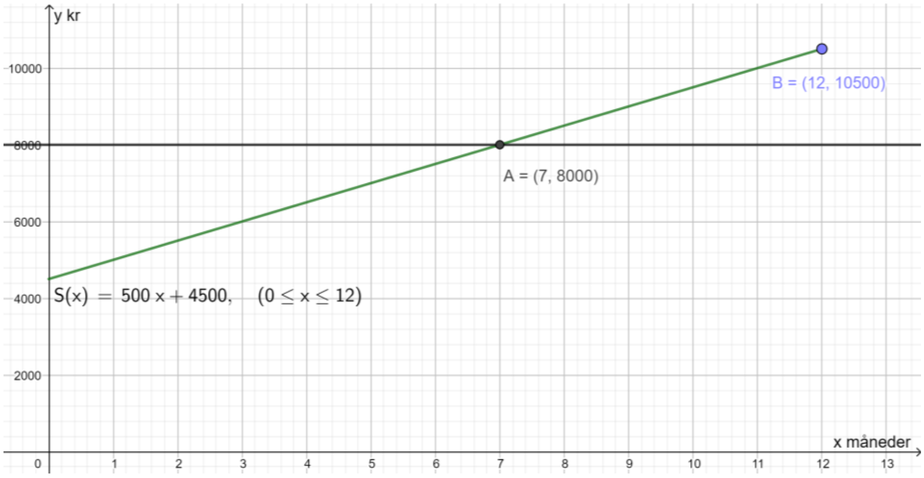
Oppgave 6
Ved regresjon finner vi modellen $y = 250\,x + 450$

Modellen forteller at Kaia hadde 450 kr da hun begynte sparinga, og at hun sparer 250 kr hver måned.

Oppgaven forteller at hun skal spare i ett år. Modellens gyldighet er dermed for $x \in [0,12]$

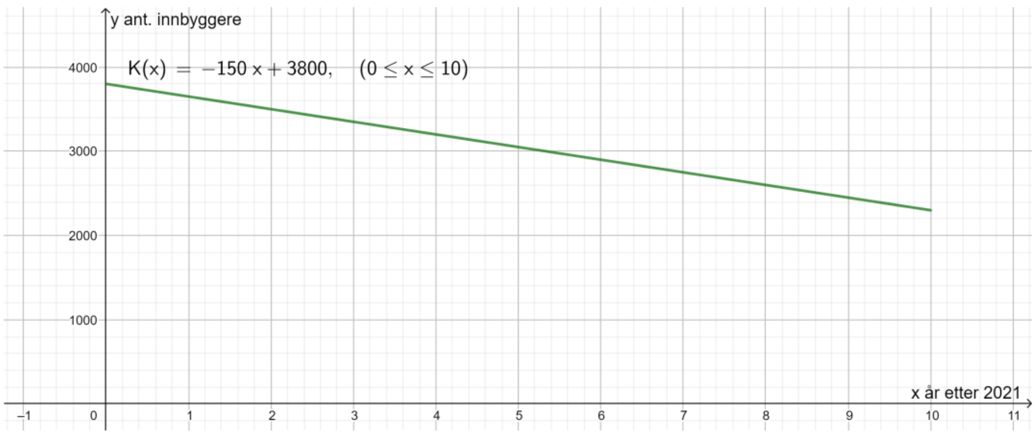
Oppgave 7

Funksjonsuttrykket forteller at Mathias har 4 500 kroner på sparekontoen når han begynner å spare, og at han sparer 500 kroner per måned.
Punkt A forteller at det tar 7 måneder før sparekontoen passerer 8 000 kroner, mens punkt B forteller at han har 10 500 kroner på kontoen etter å ha spart i ett år.



Oppgave 8

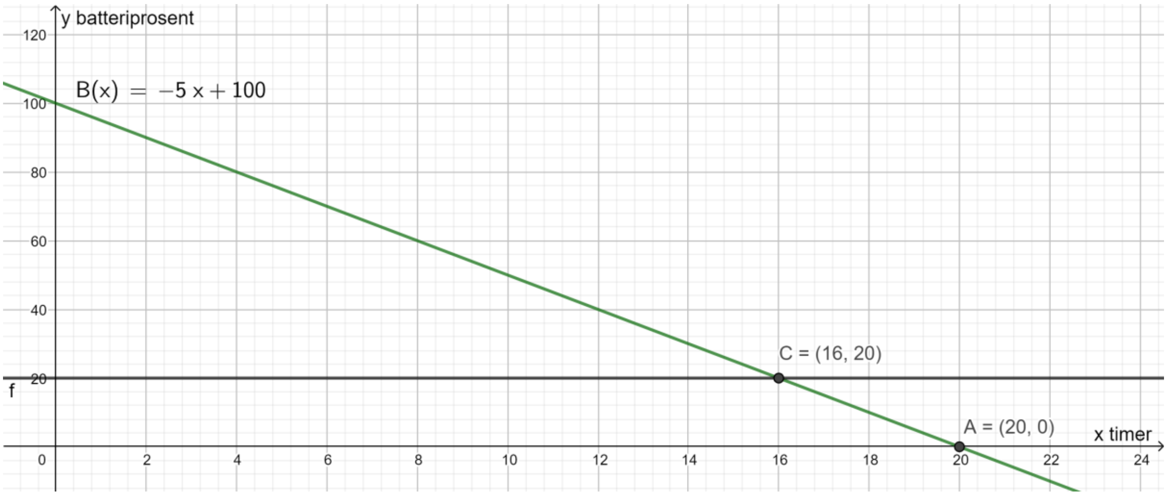
Funksjonsuttrykket forteller at det var 3 800 innbyggere i 2021, og at innbyggertallet synker med 150 per år.



Oppgave 9

Funksjonsuttrykket forteller at batterinivået synker med 5 prosentpoeng per time ved normal bruk. Modellen er i beste fall gyldig frem til telefonen er tom for strøm, som ifølge modellen inntreffer etter 20 timer.
Imidlertid har de fleste telefoner en innstilling som gjør at strømforbruket reduseres

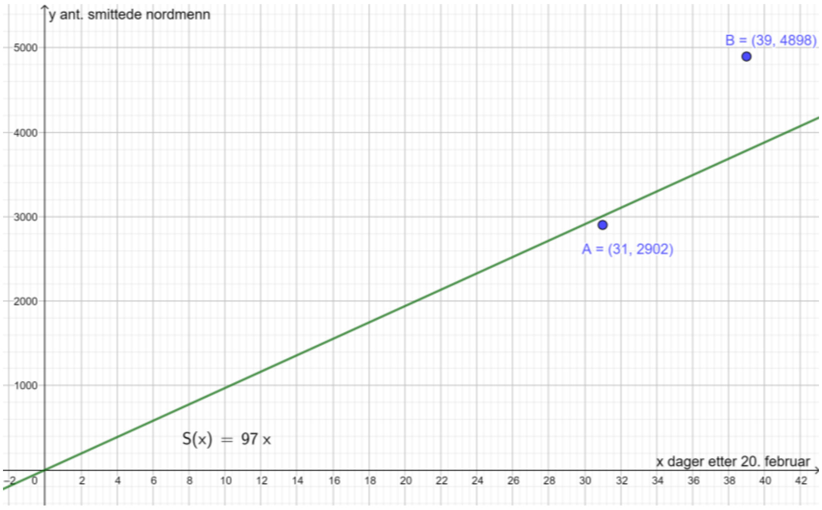
når batterinivået er lavere enn 20 %. Det betyr at modellen kun er gyldig frem til punkt B, altså 16 timer. Vi vurderer derfor funksjonen til å være gyldig for $x \in [0,16]$



Oppgave 10

Ifølge modellen er antall dager og antall smittede proporsjonale størrelser, og antall smittede øker med 97 per dag.

Modellen stemmer relativt bra med punkt A, men kan ikke brukes til å forklare utviklingen etter 31 dager. Antall smittede nordmenn økte derfor ikke lineært i denne perioden, og vi må derfor bruke en annen modell for å beskrive utviklingen i antall smittede etter 22. mars.



Eksamensoppgave side 109

Jacob tjener ($0{,}075 \cdot 150000 + 32\,000 =$) 43 250 kroner denne måneden.

Eksamensoppgave side 109

Sarah må selge 20 bøker for at timelønna skal bli 450 kroner

$y = 15\,x + 150$

Symbolsk utregning: x = 20 y = 450

Eksamensoppgave side 110

a) Grafen som beskriver prisen Markus må betale hos firma *A* er ei rett linje som går gjennom punktene $(0,600)$ og $(25,700)$.

Da er stigningstallet $\frac{700-600}{25-0} = \frac{100}{25} = 4$.

Punktet $(0,600)$ forteller dessuten at konstantleddet er 600.

Linja er altså grafen til $A(x) = 4x + 600$, <u>som skulle forklares</u>.

b) Leser av grafen og ser at totalprisen blir 1000 kroner hos firma B dersom Markus kjører 50 km.

$$\frac{1000kr}{50km} = 20\,{}^{kr}\!/_{km}$$

Ser også av grafen at totalprisen øker med 200 kroner per 100 kilometer, så det må bli 1700 kroner totalt for 400 km når det er 1500 kroner totalt for 300 km.

$$\frac{1700kr}{400km} = 4{,}25\,{}^{kr}\!/_{km}$$

<u>Hos firma *B* blir prisen 20 kr per kilometer dersom Markus kjører 50 km, mens prisen blir 4,25 kr per kilometer dersom han kjører 400 kilometer.</u>

c) $9{,}7mil \cdot 2 = 97km \cdot 2 = 194km$, så turen er altså på totalt 194 kilometer.
Vi ser av de ulike grafene at det er firma C som lønner seg her.
<u>Markus bør leie bil hos firma C</u>.

Oppgave 11

-7 %	=	93 %	=	0,93	- 2,2 %	=	97,8 %	=	0,978

+ 7 %	=	107 %	=	1,07	+ 0,4 %	=	100,4 %	=	1,004
- 7,5 %	=	92,5 %	=	0,925	- 17,5 %	=	82,5 %	=	0,825
+ 12,3%	=	112,3 %	=	1,1123	+ 200 %	=	300 %	=	3
+ 20 %	=	120 %	=	1,2	+ 250 %	=	350 %	=	3,5
- 10 %	=	90 %	=	0,9	- 100 %	=	0 %	=	0
- 13 %	=	87 %	=	0,87	- 1,2 %	=	98,8 %	=	0,988
+ 40 %	=	140 %	=	1,4	+ 0,7 %	=	100,7 %	=	1,007
+ 100 %	=	200 %	=	2	+ 0,2 %	=	100,2 %	=	1,002
- 30 %	=	70 %	=	0,7	- 25 %	=	75 %	=	0,75

Oppgave	Svar	Oppgave	Svar
13	2 817 500 kr	**19**	11 592,74 kr
14	9 600 kr	**20**	3 100 kr
15	166,88 kr/time	**21**	135,54 kr
16	66,10 kr		
17	4,5 millioner kroner	**22**	Knut betalte 320 000 kr for bilen, han antar at bilens verdi synker med 15 % hvert år, og han skal selge bilen etter 5 år for omtrent 142 000 kroner.
18	a) 15 000 betyr kjøpesummen, 1,05 betyr en verdiøkning på 5 % b) 140 betyr antall elever ved skolestart .0,875 betyr at 12,5 % har sluttet.		

Eksamensoppgave side 116

Dobling hvert 20.miutt betyr tre doblinger per time, som da blir 36 doblinger i løpet av 12 timer.

$2^{36} = 68719476736$

<u>Det vil være 68 719 476 736 bakterier etter 12 timer. (altså ca.68,7 milliarder).</u>

Eksamensoppgave side 117

a)

Ett verdifall på 20 % gir en vekstfaktor på 0,8. Et videre fall på 14 % gir et totalt fall på $0,8 \cdot 0,86 = 0,688$. 1 - 0.688 = 0,312 = 31%.

b)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3								
4			Nybilpris	390000	kr			
5								
6				Verdifall i prosent		Verdfall i kroner		Bilens verdi
7			År	fra fjoråret	fra nyverdi	fra fjorår	fra nyverdi	
8			1	20 %	20.0 %	78000	78000	312000
9			2	14 %	31.2 %	43680	121680	268320
10			3	13 %	40.1 %	34882	156562	233438
11			4	12 %	47.3 %	28013	184574	205426
12			5	11 %	53.1 %	22597	207171	182829
13			6	10 %	57.8 %	18283	225454	164546

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3								
4			Nybilpris	390000	kr			
5								
6					Verdifall i prosent	Verdfall i kroner		Bilens verdi
7			År	fra fjoråret	fra nyverdi	fra fjorår	fra nyverdi	
8			1	0.2	=D8	=D4*D8/100%	=F8	=D4-F8
9			2	0.14	=100% -(100%-E8)*(100%-D9)	=H8*D9	=G8+F9	=H8-F9
10			3	0.13	=100% -(100%-E9)*(100%-D10)	=H9*D10	=G9+F10	=H9-F10
11			4	0.12	=100% -(100%-E10)*(100%-D11)	=H10*D11	=G10+F11	=H10-F11
12			5	0.11	=100% -(100%-E11)*(100%-D12)	=H11*D12	=G11+F12	=H11-F12
13			6	0.1	=100% -(100%-E12)*(100%-D13)	=H12*D13	=G12+F13	=H12-F13
14								

c)

Se figur i b.

Oppgave 23

Vekstfaktoren 1,05 forteller at antall elever øker med 5 % hvert år.

Oppgave 24

Vekstfaktoren 0,93 forteller at antall elever synker med 7 % hvert år.

Eksamensoppgave side 121

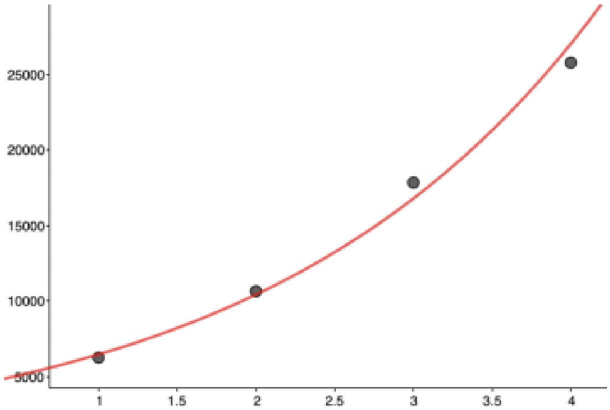
Har brukt regresjon til å vise at modellen passer godt med tallene i tabellen.
1,006 er en vekstfaktor, som forteller at folketallet i Norge øker med 0,6 % per år

Eksamensoppgave side 121

	A	B
1	1	6278
2	2	10660
3	3	17837
4	4	25761

X: A1:A4

Y: B1:B4



Regresjonsmodell

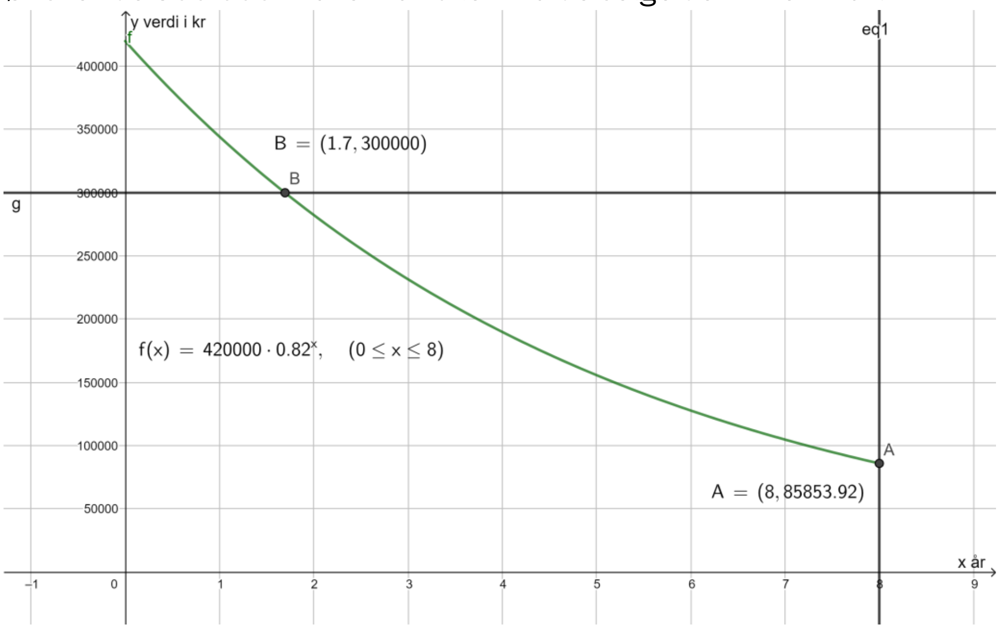
Eksponentiell

$y = 4038.4858 \cdot 1.608^x$

b) Jeg ser at vekstfaktoren er 1,608.
Det betyr at antall registrert smittede økte med 60,8 % per måned.

Oppgave 25

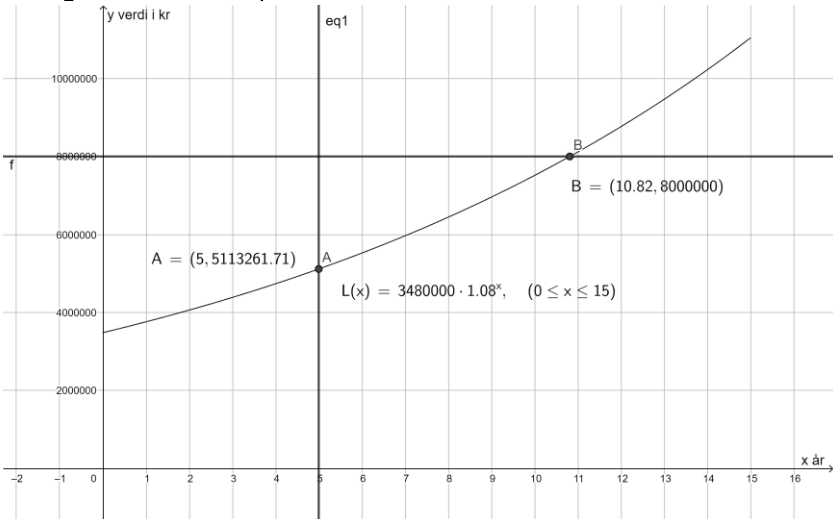
Forslag til interessant informasjon:
Funksjonsuttrykket forteller at familien betalte 420 000 kroner for bilen, og at bilens verdi synker med 18 % per år.
Familien kan forvente å få ca. 86 000 kroner for bilen dersom de selger bilen om 8 år.
Ønsker de 300 000 kroner for bilen må de selge den innen 2 år.



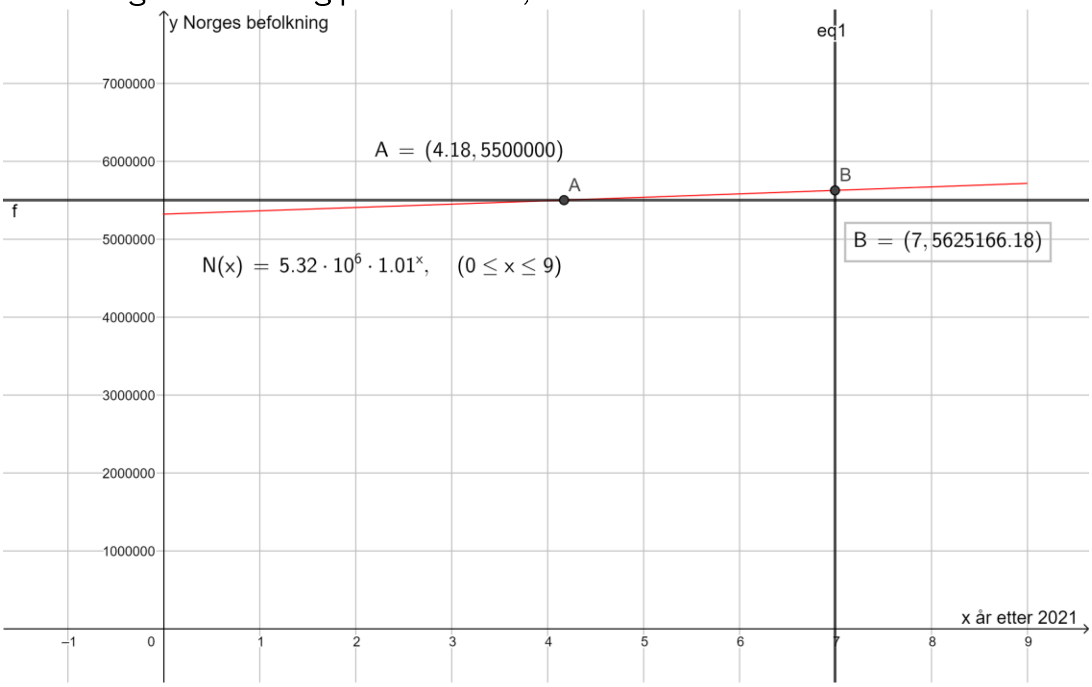
Oppgave 26

Forslag til interessant informasjon:

Funksjonsuttrykket forteller at familien betalte 3 480 000 kroner for leiligheten, og at leilighetens verdi øker med 8 % per år.
Etter 5 år er leilighetens verdi omtrent 5,1 millioner kroner.
Leilighetens verdi passerer 8 millioner kroner etter 11 år.

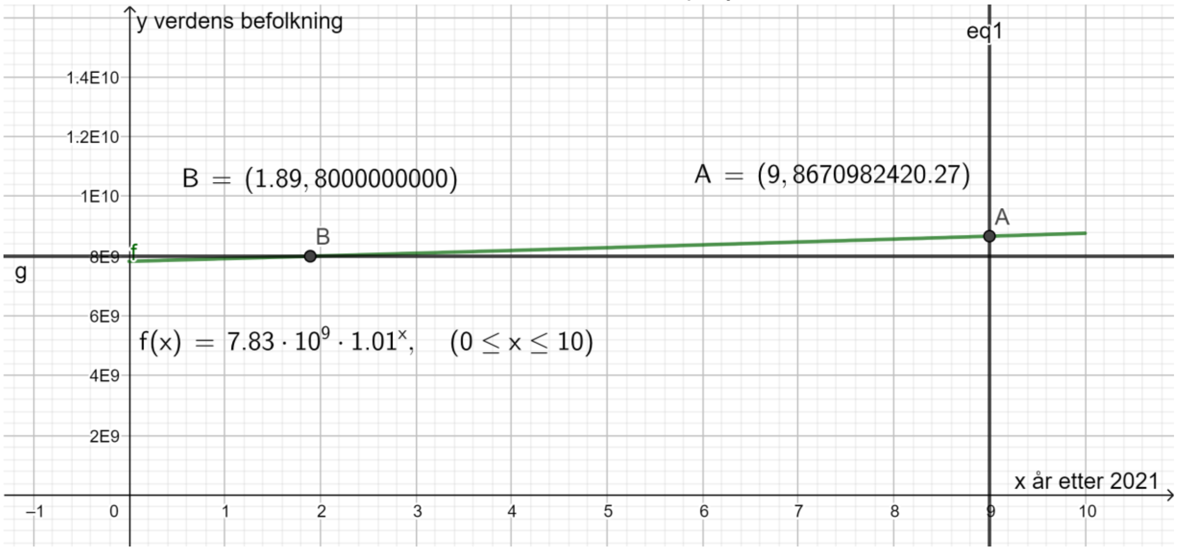


Oppgave 27
Forslag til interessant informasjon
Funksjonsuttrykket forteller at folketallet i Norge ved inngangen til 2021 er 5,32 millioner og at folketallet øker med 0,8 % per år.
Norges innbyggertall passerer 5,5 millioner i 2025.
I 2028 er Norges befolkning på omtrent 5,6 millioner mennesker.



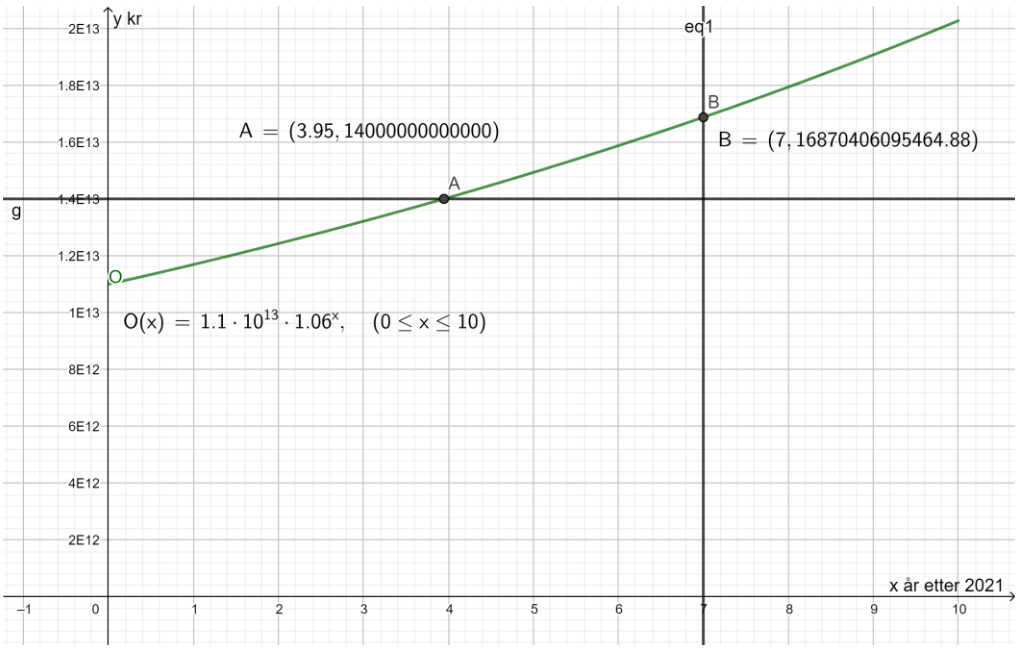
Oppgave 28
Forslag til interessant informasjon:
Funksjonsuttrykket forteller at folketallet i verden ved inngangen til 2021 er 7,83 milliarder og at folketallet øker med 1,14 % per år.
Jordens befolkning vil passere 8 mrd. i 2023.

I 2030 vil det være omtrent 8,7 mrd. mennesker på jorda



Oppgave 29

Forslag til interessant informasjon:
Funksjonsuttrykket forteller at verdien til Oljefondet inngangen til 2021 er på svimlende 11 000 milliarder kroner, og at verdien til Oljefondet øker med 6,3 % per år.
Oljefondets verdi passerer 14 000 mrd. kroner i 2025. I 2028 vil oljefondets verdi være på omtrent 17 000 mrd. kroner



Oppgave 30

Vekstfaktor på 0,83 betyr en nedgang i temperatur på 17 % per minutt. Tallet 20 indikerer romtemperatur, og funksjonsuttrykket er skrevet på denne måten for at verdien ikke skal synke under 20 grader. Modellen er dermed gyldig frem til romtemperaturen endres, eller kaffekoppen flyttes til en lokasjon med annen temperatur.

Oppgave 31

Funksjonsuttrykket forteller at Oslos innbyggertall er 697 000, og at innbyggertallet vil vokse med 0,8 % i årene fremover.

SSB spår følgende om antall innbyggere i Oslo i to utvalgte år:

Kilde: https://www.ssb.no/kommunefakta/oslo

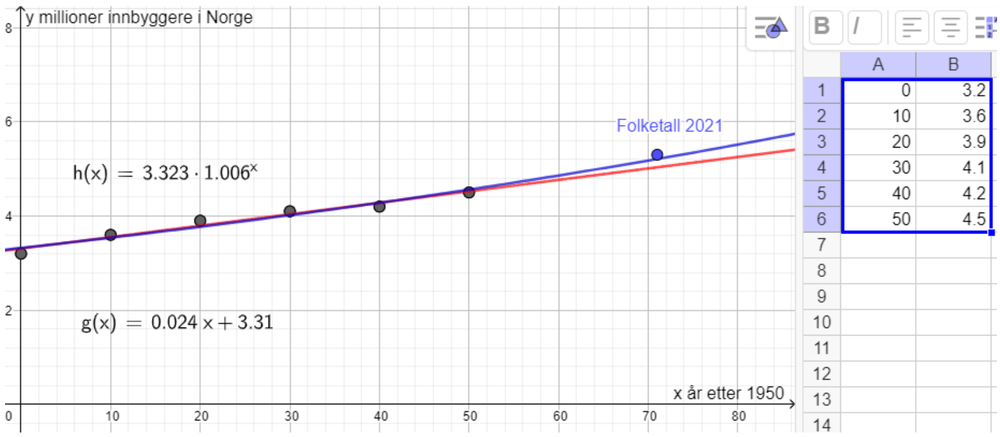
Sammenlignet med disse tallene er modellen troverdig frem til 2030, men viser for høyt folketall i 2050. Det betyr at modellen vil bli upålitelig etter 2030.

Oppgave 32

a) En lineær modell som beskriver utviklingen: $0{,}024x + 3{,}31$. Denne modellen forteller at antall innbyggere i Norge øker med 24 000 per år.

b) En eksponentiell modell som beskriver utviklingen: $3{,}323 \cdot 1{,}006^x$. Denne modellen forteller at antall innbyggere i Norge øker med 0,6 % per år.

c) Sammenlignet med dagens folketall fremstår befolkningsutviklingen å være eksponentiell.

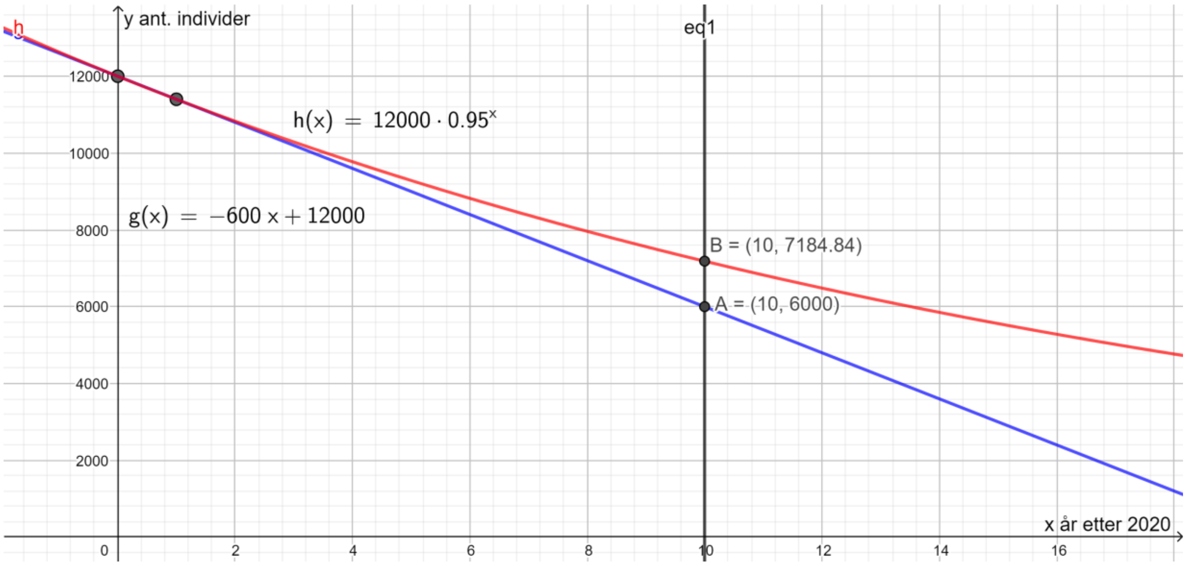


Oppgave 33

a) En lineær modell som beskriver utviklingen: $-600x + 12000$. Modellen forteller at antall individer synker med 600 per år.

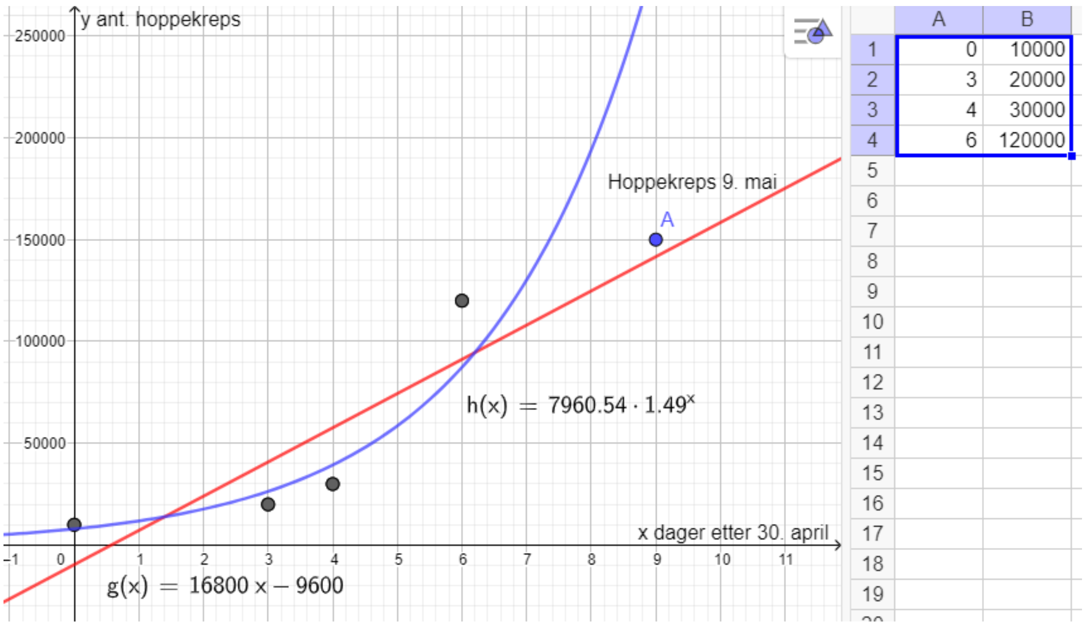
b) En eksponentiell modell som beskriver utviklingen: $12000 \cdot 0{,}95^x$. Modellen forteller at antall individer synker med 5 % hvert år.

c) Det fremstår som om forskerne antar at utviklingen i dyrebestanden avtar lineært.



Oppgave 34

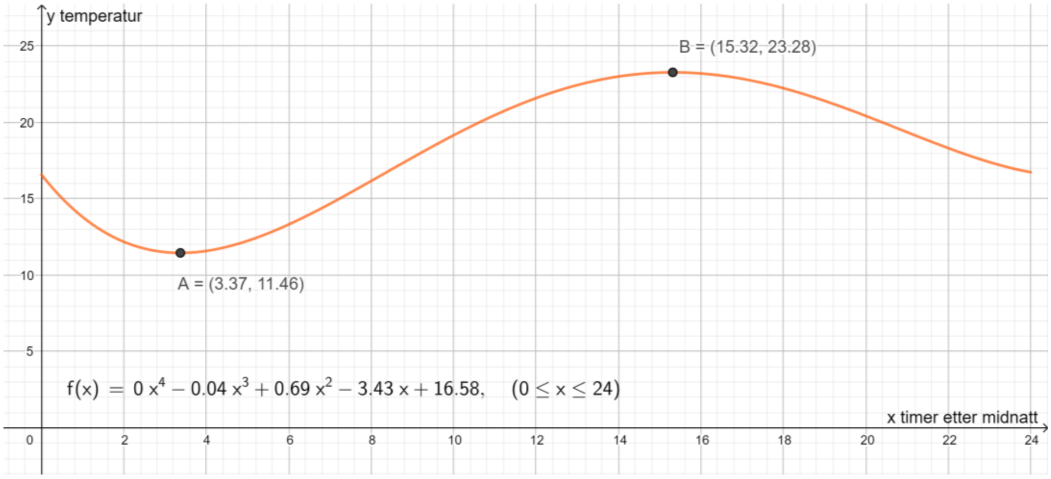
Ifølge Lars øker antall hoppekreps med 16 800 per dag.
Ifølge Lene øker antall hoppekreps med 49 % per dag.
Sammenlignet med antall hoppekreps 9. mai kan det kan virke som om utviklingen i antall hoppekreps bør beskrives lineært.



	A	B
1	0	10000
2	3	20000
3	4	30000
4	6	120000

Oppgave 35

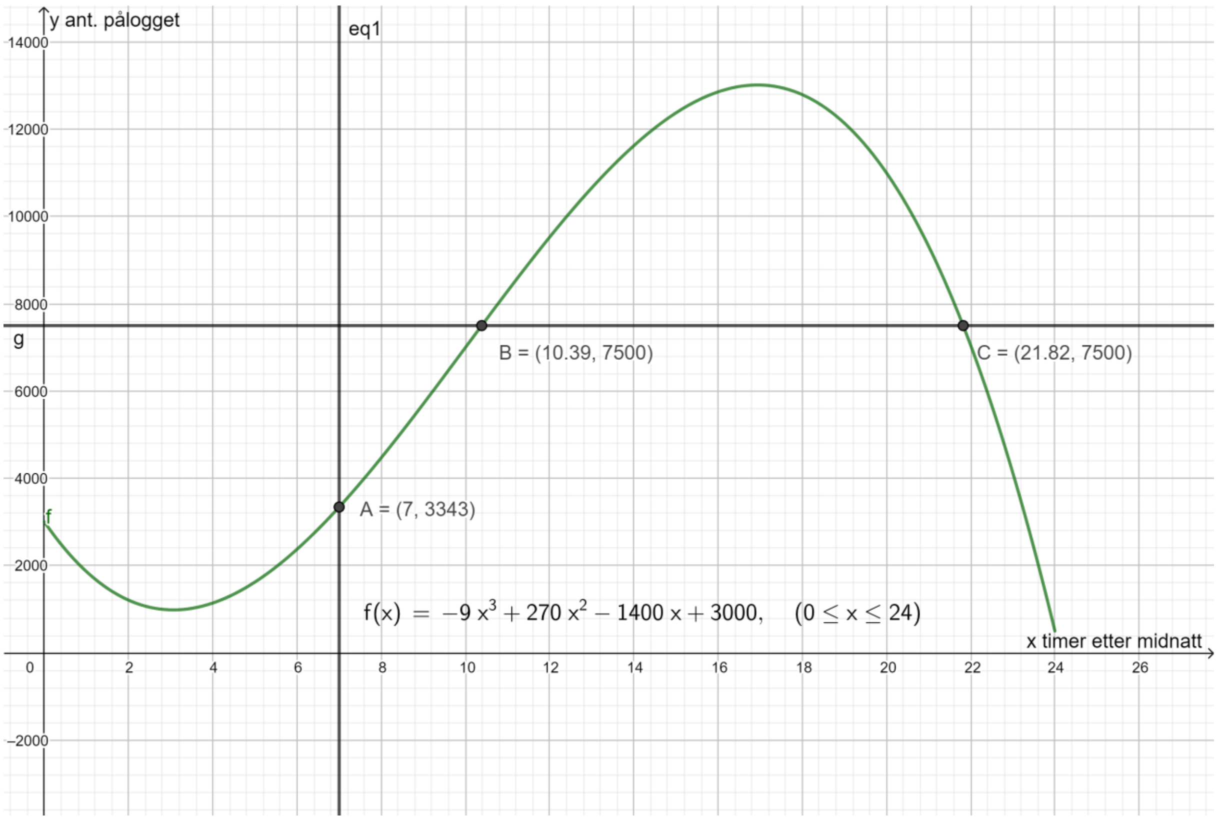
Vi valgte å bruke en polynommodell av 4. grad for å beskrive utviklingen i temperatur. Ifølge modellen vil høyeste temperatur være 23,3 ℃, og laveste temperatur vil være 11,5 ℃.



Oppgave 36

b) Kl. 07.00 var 3343 pålogget nettsiden.

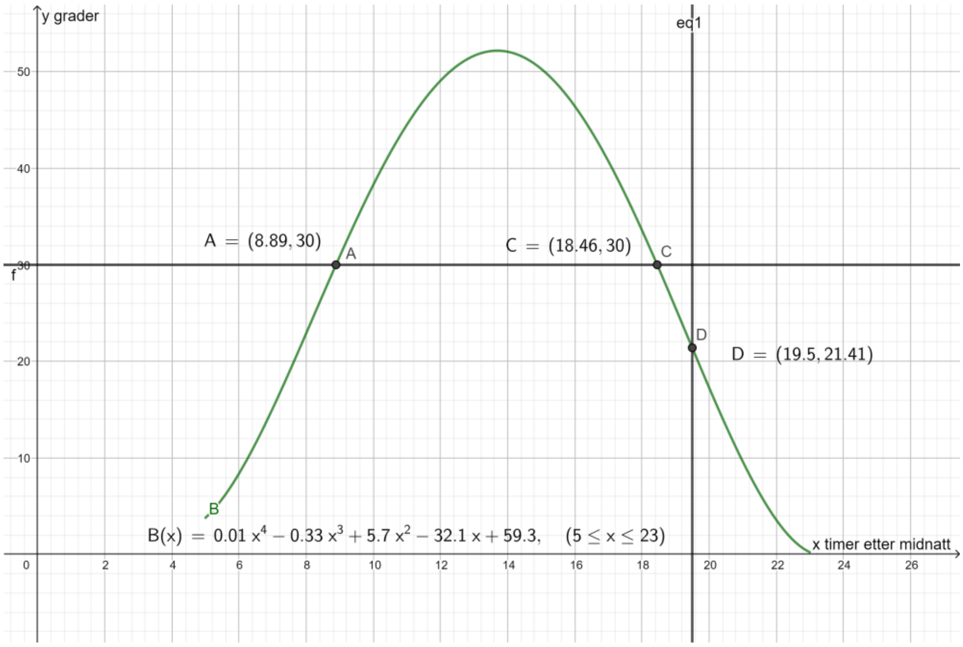
c) Det var mer enn 7500 pålogget nettsiden mellom 10.23 og 21.49 (husk at desimaltimer må gjøres om til timer og minutter).



Oppgave 37

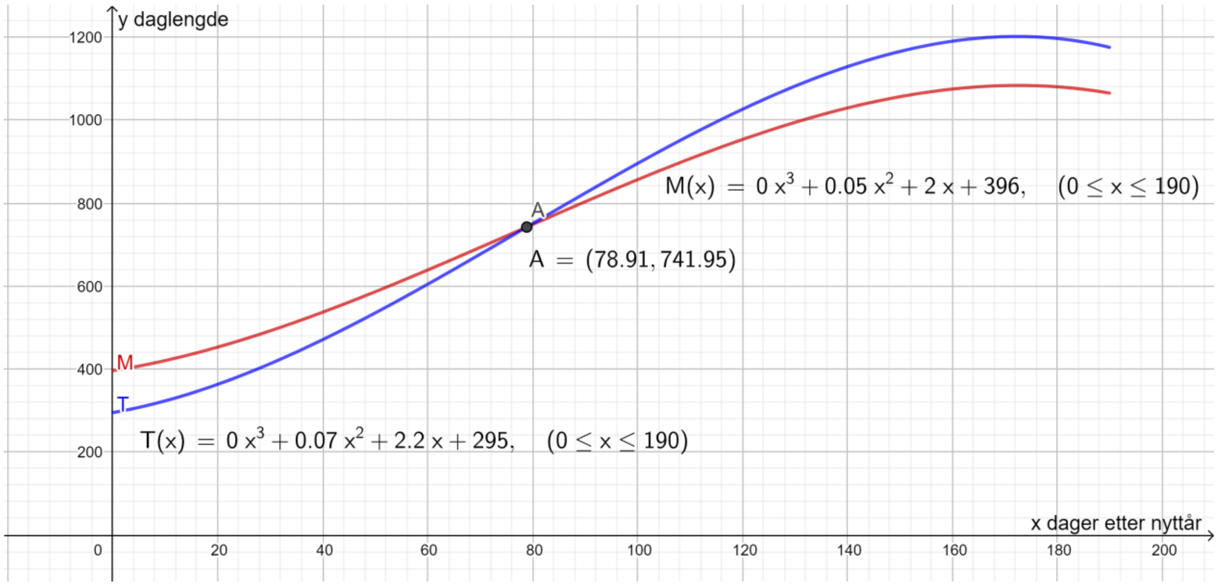
b) Solen sto høyere enn 30 grader over horisonten mellom kl. 8.53 og 18.27 (husk at desimaltimer må gjøres om til timer og minutter).

c) Kl. 19.30 sto solen omtrent 21 grader over horisonten.



Oppgave 38

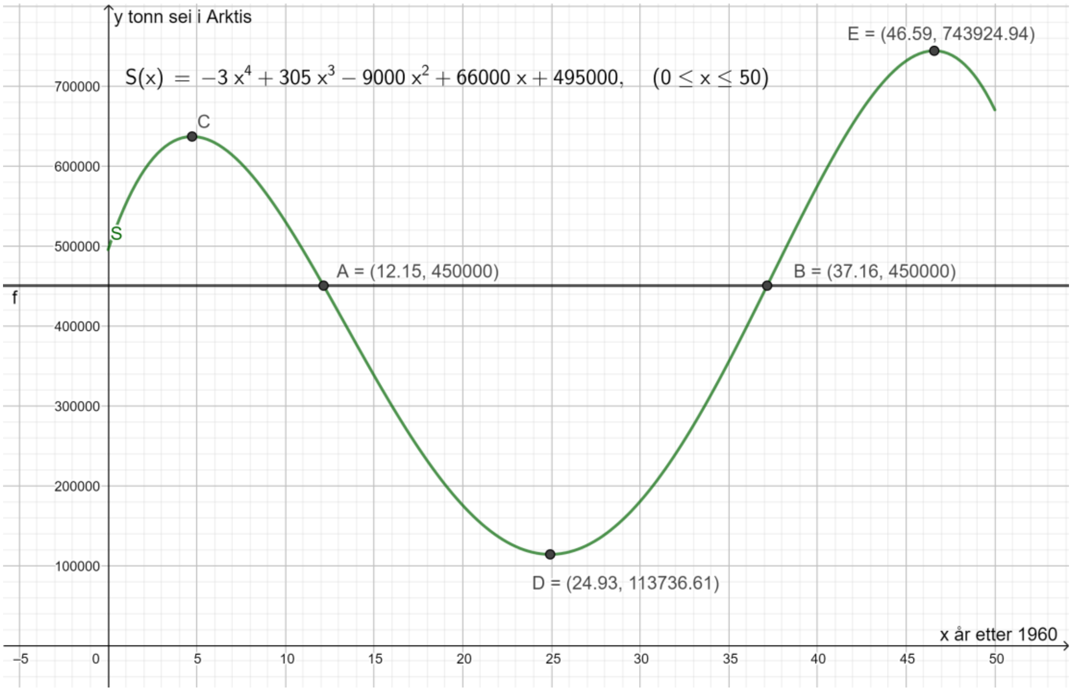
b) Etter 79 dager var daglengden lik i Mandal og Trondheim. Det betyr at daglengden var lengre i Mandal enn i Trondheim de første 78 dagene.



Oppgave 39

b) Seibestanden var lavere enn 450 000 tonn i 25 år, fra 1972 til 1997.

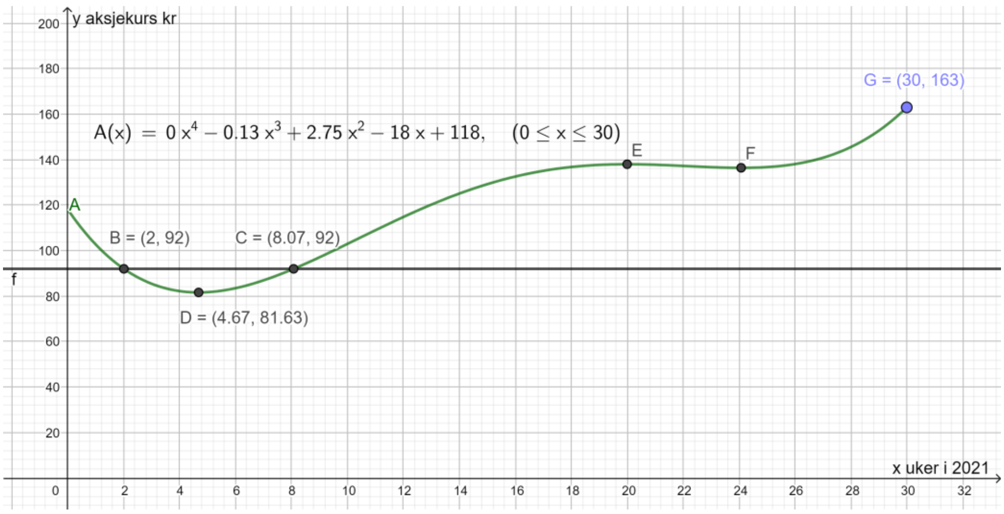
c) Sebestanden var på sitt laveste i 1985 (ca. 114 000 tonn), og på sitt høyeste i 2006 (omtrent 744 000 tonn).



Oppgave 40

b) Aksjekursen var høyere enn 92 kroner de første to ukene, og deretter fra uke 8 til uke 30. Til sammen blir dette 24 uker.

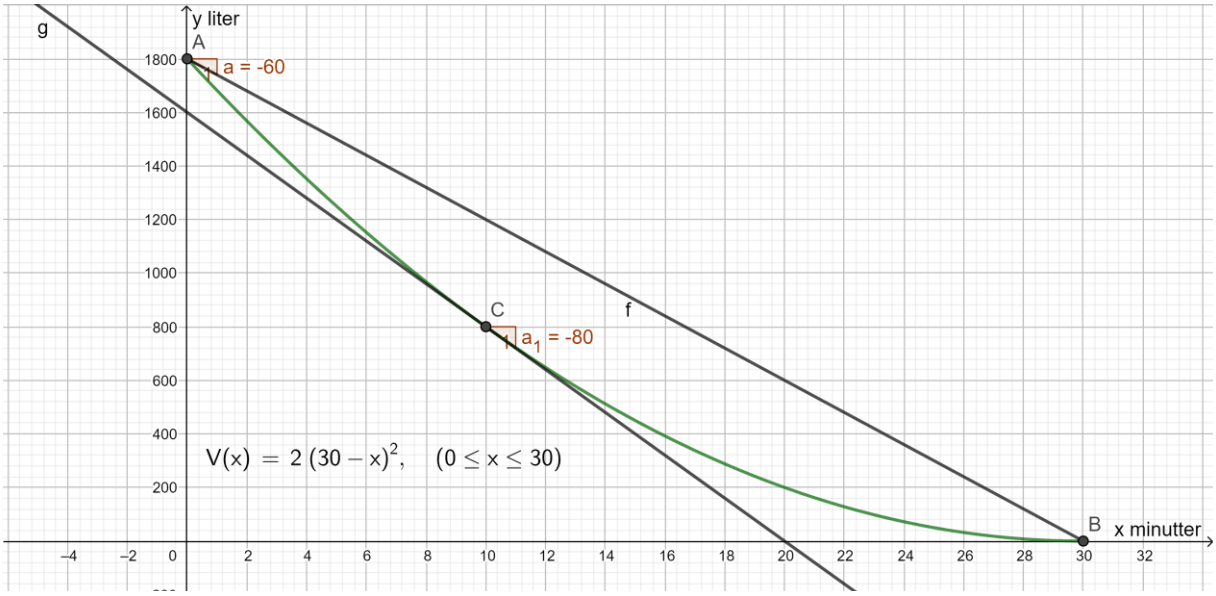
c) Verdimengden til A er fra 81,63 til 163.



Oppgave 41

b) Det renner i gjennomsnitt ut 60 liter vann per minutt fra Kari åpner krana, til badestampen er tom.

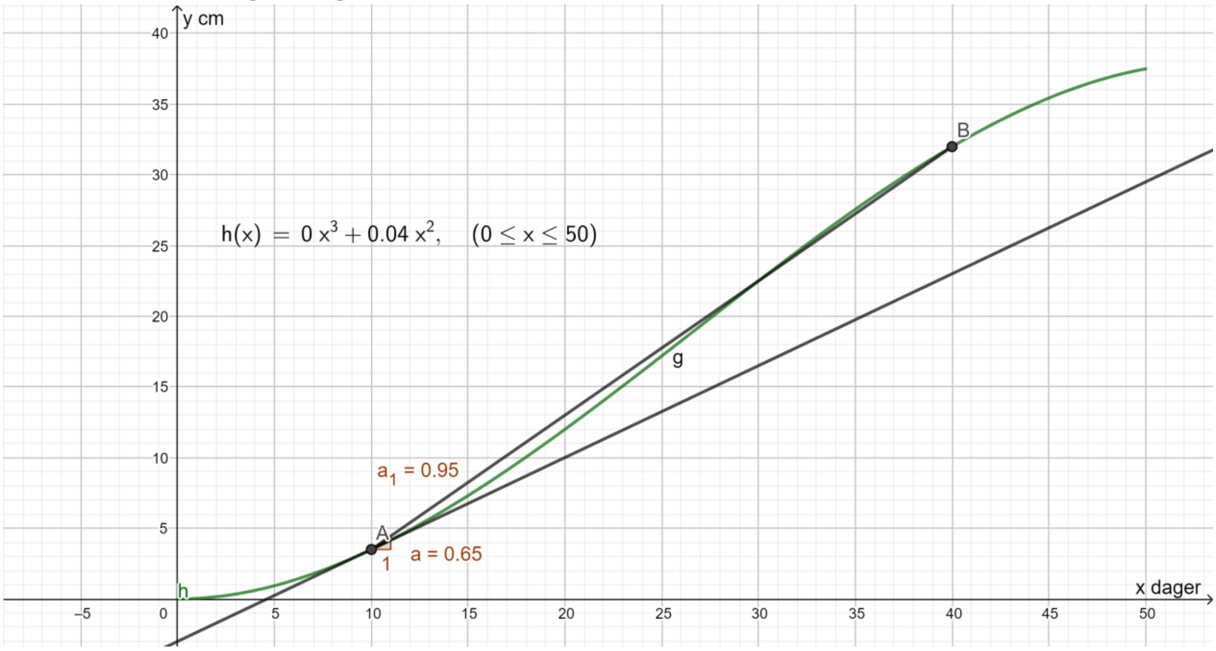
c) Den momentane vekstfarten til V når $x = 10$ er − 80. Det betyr at i det tiende minutt renner vannet ut med en hastighet tilsvarende 80 liter per minutt.



Oppgave 42

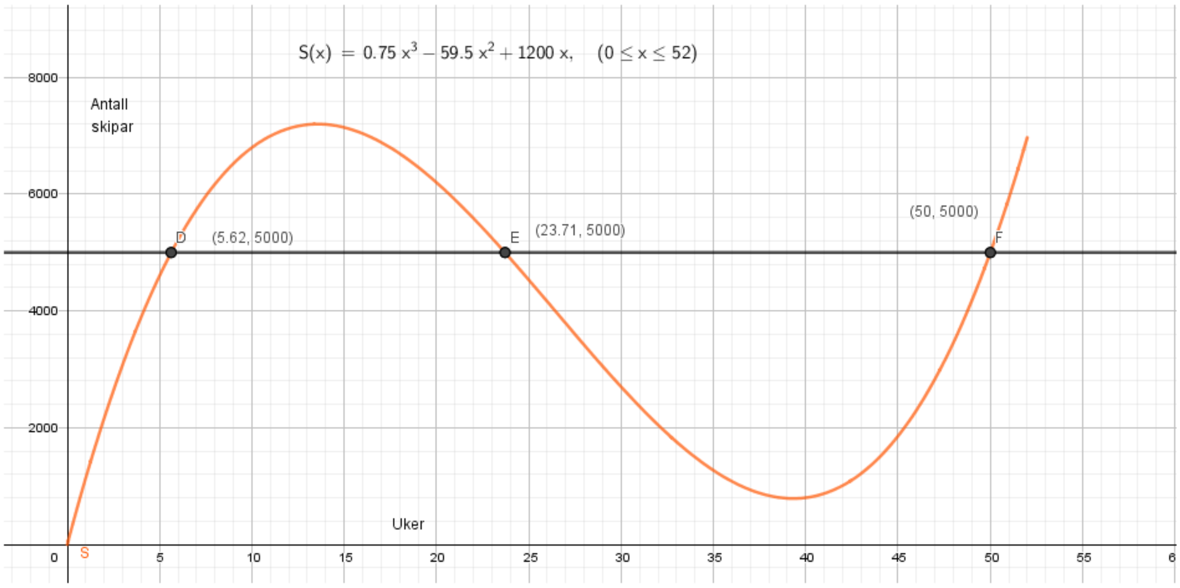
b) Den momentane vekstfarten til $h(10)$ er 0,65. Det betyr at i dag 10 vokser planten med en hastighet på 0,65 cm per dag.

c) Stigningstallet til den rette linja som går gjennom punktene $(10, h(10))$ og $(40, h(40))$ er 0,95. Det betyr at planten vokser i gjennomsnitt 0,95 cm per dag mellom dag 10 og 40.



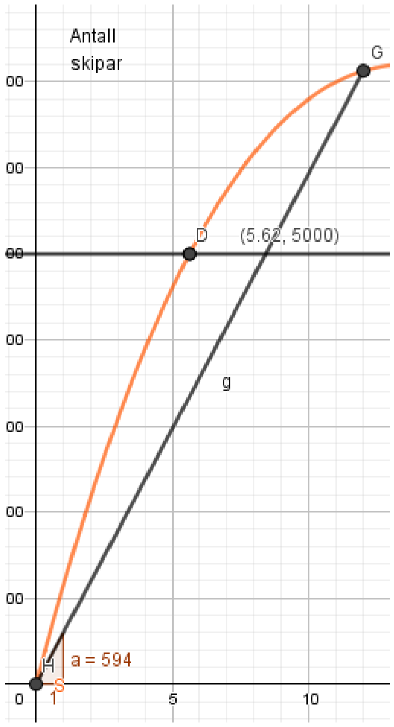
Eksamensoppgave side 139

a)



Tegner grafen til funksjonen S i Geogebra. Lager linja y=5000 og finner skjæringspunktene mellom linja og grafen til S. Ser at butikken kan selge mer enn 5000 par ski fra uke 5.6 til uke 23.7 (litt over 18 uker), og fra uke 50 til 52 (2 uker). Det vil si at butikken kan selge mer enn 5000 par ski i ca. 20 uker, ifølge modellen.

b)



Stigningstallet er 594, det betyr at i årets første 12 uker øker skisalget i gjennomsnitt med ca. 600 par i uken.

Eksamensoppgave side 139

a) $V(0) = (10 - 0{,}1 \cdot 0^2)^3$

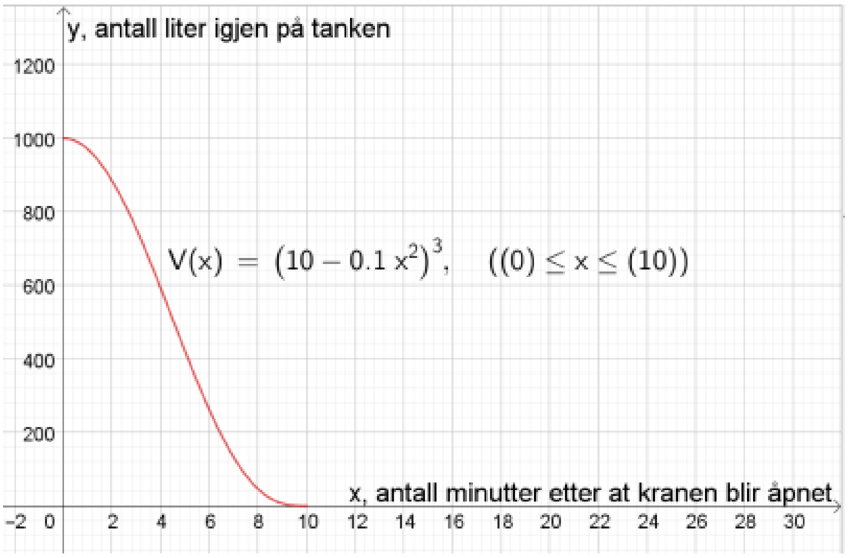
$V(0) = (10 - 0)^3$

$V(0) = 10^3$

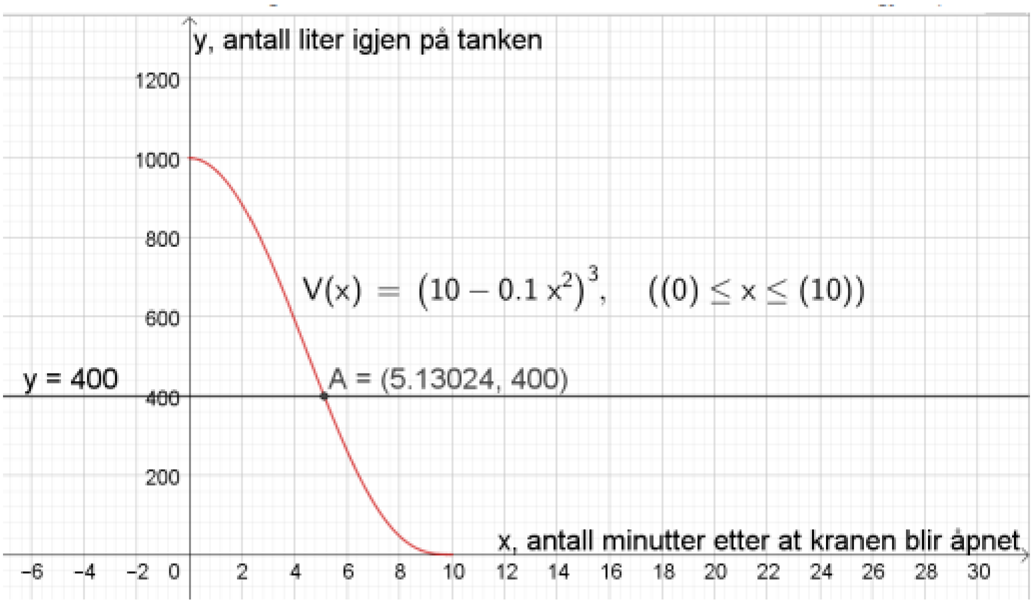
$V(0) = 1000$

Dette forteller oss at tanken rommer 1000 liter vann (antall liter igjen i tanken etter 0 minutter).

b)



c) Skriver inn y=400, velger «skjæring mellom to objekt» og markerer grafen og linjen. Får punktet A (se bildet under). Dette betyr at det tar 5,13 minutter før det er 400 liter igjen på tanken. Altså omtrent 5 minutter og 8 sekunder fra kranen åpnes til det er 400 liter igjen på tanken.



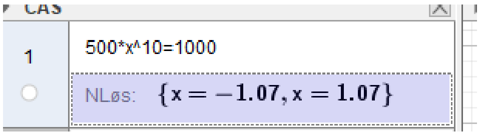
Eksamensoppgave side 140

a)

Dersom en bestand bestående av 500 dyr dobler seg lineært på 10 år ser funksjonen slik ut: L(x) = 50 x + 500

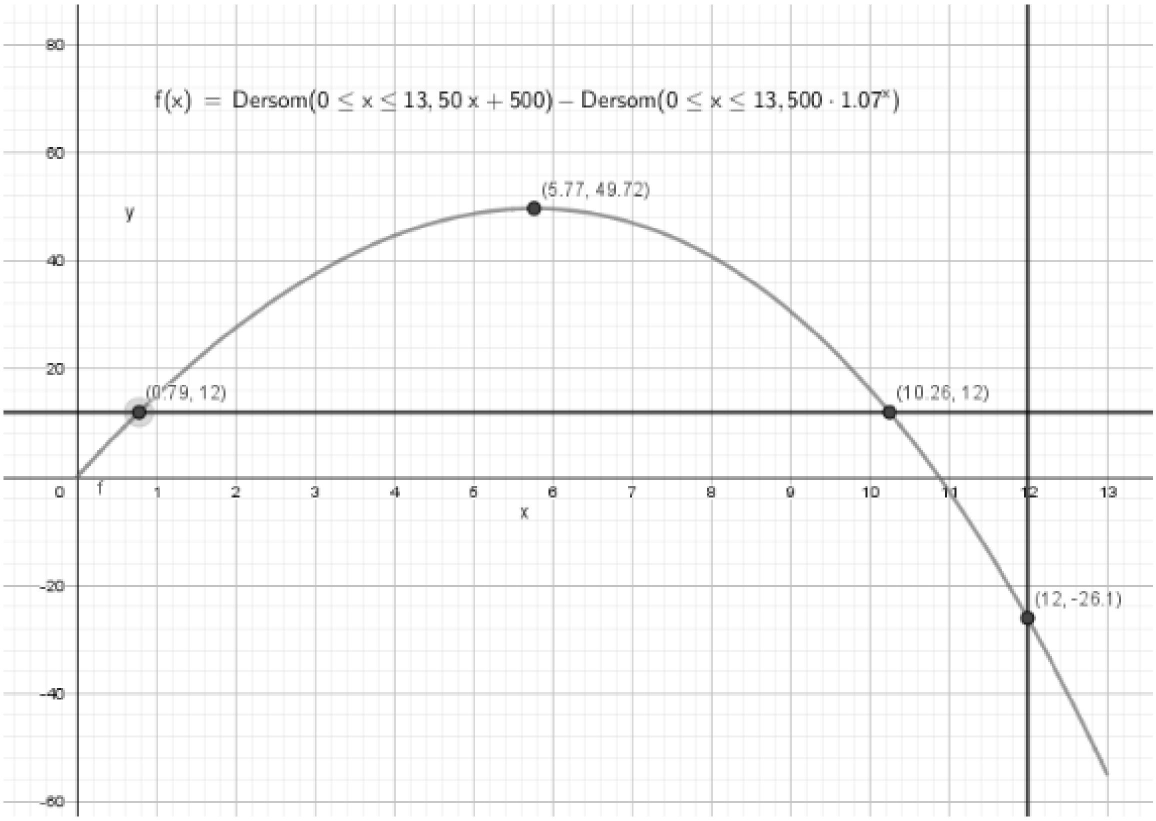
b)

Dersom bestanden øker eksponentielt får vi:



$E(x) = 500 \cdot 1,07^x$

c)



d)

Grafen til f viser forskjellen i estimat mellom den lineære modellen og den eksponentielle, under de gitte forutsetninger. Den største forskjellen er på ca. 50 dyr, etter ca 6 år. Den praktiske tolkningen av y= 12 er ved hvilke tidspunkt den lineære modellen estimerer 12 dyr mer enn den eksponentielle. For x = 12 får vi en funksjonsverdi nær - 26. Det må tolkes som at den eksponentielle funksjonen nå har det høyeste estimatet, og etter 12 år viser den eksponentielle funksjonen ca. 26 dyr mer enn den lineære funksjonen.

Begge funksjonene, L og E skulle doble seg på 10 år. Fra figuren i c ser man at det tar nesten 11 år før E dobler seg. Det skyldes at jeg burde tatt med en desimal til i uttrykket for vekstfaktoren.