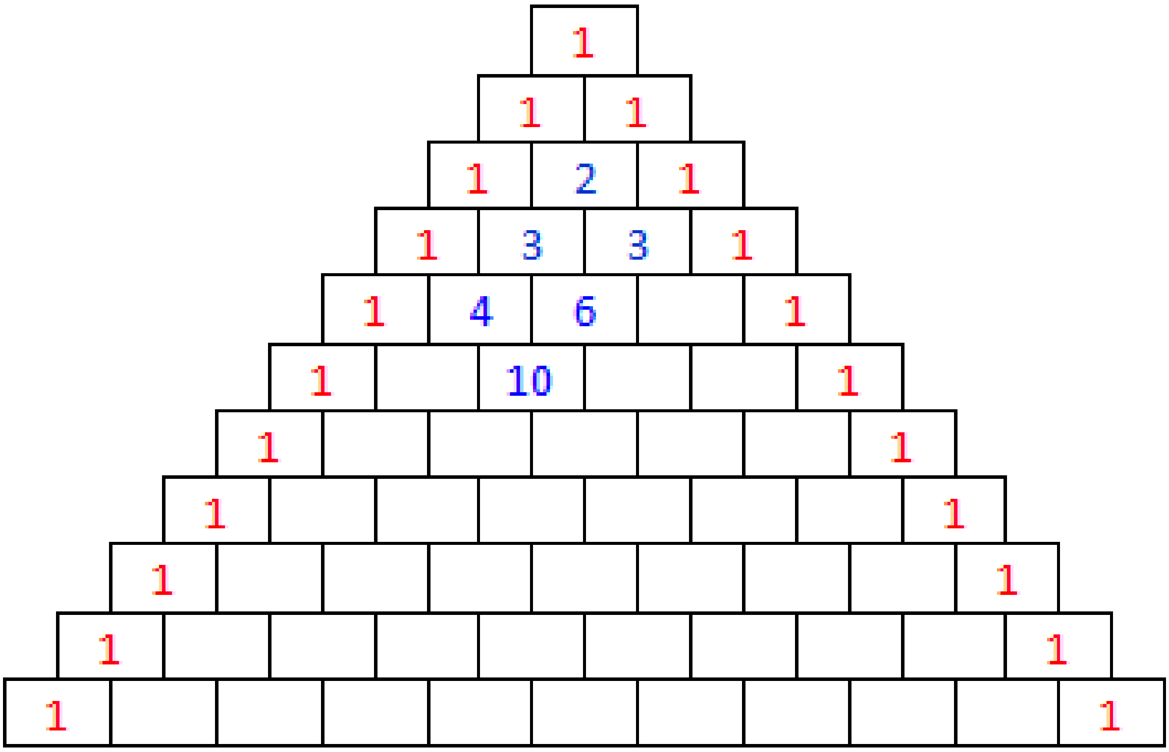
Figurtall



Målet for opplæringen er at eleven skal kunne:

- identifisere variable størrelser i ulike situasjoner og bruke dem til utforsking og generalisering

Å se etter mønster

Dersom vi skriver tall i en ordnet liste, kalles dette en **tallfølge,** og tallene i en **tallfølge** danner et bestemt **mønster**. Dersom vi forstår **mønsteret** i en **tallfølge** kan vi forutsi det både det neste tallet i **tallfølgen**, og et tall lengre ut i lista.

Tallfølger kan ofte **representeres geometrisk** ved at vi lager en **figur** til hvert av tallene i lista. Derfor bruker vi gjerne ordet **figurtall** om slike **tallfølger**.

Figurtall er en tallfølge som er representert geometrisk

Din oppgave er å finne **mønsteret** i slike **tallfølger**, og beskrive dette **mønsteret** ved gjennom en **formel**.

Hver **figur** i en **tallfølge** har et **figurnummer**. Den første **figuren** kalles **figur nummer 1**, som skrives $\mathbf{F_1}$**.** Den neste figuren kalles $\mathbf{F_s}$**.** Deretter følger $\mathbf{F_3}$ osv.

I **formler** som brukes til å beskrive **mønster** er det vanlig å benytte **variabelen** n, og ikke x som ble brukt i forrige kapittel. Derfor vil du se at vi bruker n når vi skal beskrive et ukjent **figurnummer**, som skrives $\mathbf{F_n}$.

Når du har funnet **mønsteret** i en **tallfølge**, kan du bli bedt om å finne

- Det neste tallet eller den neste **figuren** i **tallfølgen**
- Et tall eller en **figur** lengre ut i lista
- **Summen** av alle tall eller **figurer** i **tallfølgen** frem til et bestemt nummer i lista

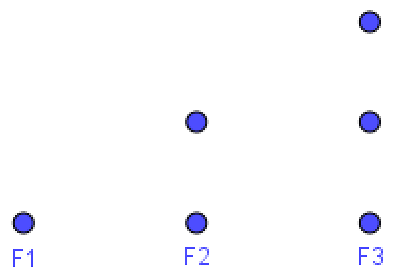
Å se etter **mønster** i **figurtall** har vi mennesker drevet med i hvert fall 2 500 år. Kilder kan fortelle oss at greske matematikere formet **figurene** i **figurtall** med steiner i sanden. Ordet *kalkulere* kommer fra det latinske ordet *calculus*, som betyr liten stein. Derfor finnes det en stor mengde ulike **mønstre**, og langt flere enn vi skal jobbe med i 1P. Du har kanskje hørt om Fibonaccis **tallfølge** eller Pascals trekant? Dersom du har interesse for å utforske **mønster** finnes det mye du kan søke opp.

I dette kapittelet presenterer vi de grunnleggende **mønstrene**; **lineær utvikling**, **kvadrattall**, **rektangeltall**, og **trekanttall**. Når du behersker disse **mønstrene** vil du kunne utforske **figurer** som er satt sammen av flere typer **mønster**.

Naturlige tall – lineær utvikling

Oppgave 1

Tegn figurnummer 4 her:



Beskriv sammenhengen mellom figurnummer og antall prikker i figuren med ord:

a) Hvor mange prikker vil det være i F_n?
b) Hvor mange prikker vil det være i F_{10}?
c) Hvilket figurnummer kan du lage av 20 prikker?

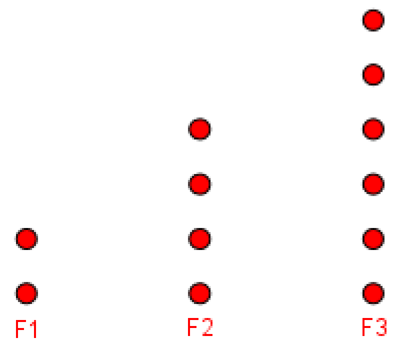
Tenk deg at du skal lage de 20 første figurene, og du ønsker å finne ut hvor mange prikker det blir til sammen.

d) Nedenfor har vi skrevet et program. Vil programmet finne ut hvor mange prikker det blir til sammen på de 20 første figurene? Hvis nei, hvilke endringer må gjøres?

```
Fn=0            #Fn betyr Figurnummer
prikker=0

for i in range(20):
  Fn=Fn+1
  prikker=prikker+(Fn)

print("Antall prikker til sammen:",prikker)
```

Oppgave 2

Tegn figurnummer 4 her:



Beskriv sammenhengen mellom figurnummer og antall prikker i figuren med ord:

a) Hvor mange prikker vil det være i F_n?
b) Hvor mange prikker vil det være i F_{20}?
c) Hvilket figurnummer kan du lage av 36 prikker?

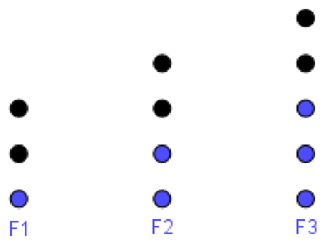
Tenk deg at du skal lage de 20 første figurene, og du ønsker å finne ut hvor mange prikker det blir til sammen.

d) Nedenfor har vi skrevet et program. Vil programmet finne ut hvor mange prikker det blir til sammen på de 20 første figurene? Hvis nei, hvilke endringer må gjøres?

```
Fn=0            #Fn betyr Figurnummer
prikker=0

for i in range(20):
   Fn=Fn+1
   prikker=(Fn*2)

print("Antall prikker til sammen:",prikker)
```

Oppgave 3

Tegn figurnummer 4 her:



Beskriv sammenhengen mellom figurnummer og antall prikker i figuren med ord:

a) Hvor mange prikker vil det være i F_n?
b) Hvor mange prikker vil det være i F_{15}?
c) Hvilket figurnummer kan du lage av 52 prikker?

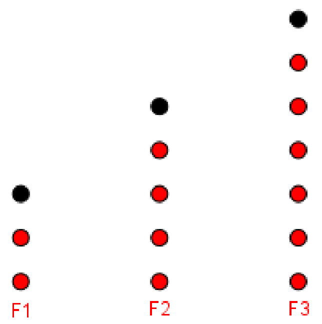
Tenk deg at du skal lage de 15 første figurene, og du ønsker å finne ut hvor mange prikker det blir til sammen.

d) Nedenfor har vi skrevet et program. Vil programmet finne ut hvor mange prikker det blir til sammen på de 15 første figurene? Hvis nei, hvilke endringer må gjøres?

```
Fn=0            #Fn betyr Figurnummer
prikker=0

for i in range(15):
  Fn=Fn+1
  prikker=prikker+(Fn+2)

print("Antall prikker til sammen:",prikker)
```

Oppgave 4

Tegn figurnummer 4 her:



Beskriv sammenhengen mellom figurnummer og antall prikker i figuren med ord:

a) Hvor mange prikker vil det være i F_n?
b) Hvor mange prikker vil det være i F_8?
c) Hvilket figurnummer kan du lage av 61 prikker?

Tenk deg at du skal lage de 15 første figurene, og du ønsker å finne ut hvor mange prikker det blir til sammen.

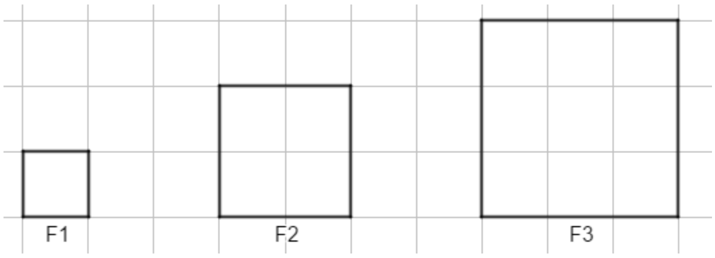
d) Nedenfor har vi skrevet et program. Vil programmet finne ut hvor mange prikker det blir til sammen på de 15 første figurene? Hvis nei, hvilke endringer må gjøres?

```
Fn=0            #Fn betyr Figurnummer
prikker=0

for i in range(20):
  Fn=Fn+1
  prikker=prikker+(Fn*2+1)

print("Antall prikker til sammen:",prikker)
```

Kvadrattall

Oppgave 5

Tegn figurnummer 4 her:



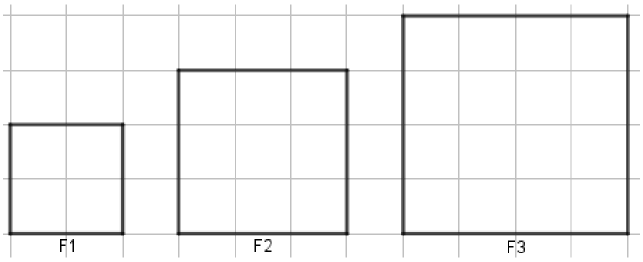
Beskriv sammenhengen mellom figurnummer og antall ruter i figuren med ord:

a) Hvor mange ruter vil det være i F_n?
b) Hvor mange ruter vil det være i F_{12}?
c) Hvilket figurnummer kan du lage av 81 ruter?
d) Tenk deg at du skal tegne de 15 første figurene. Hvor mange ruter vil det være til sammen i alle 15 figurene?

En mer eller en mindre; (n+1) eller (n-1)

I noen oppgaver har vi behov for å uttrykke 1 mer eller 1 mindre enn figurnummert når vi skal beskrive en figurutvikling. Matematisk skrives dette som (n+1) eller (n-1). Dette vil vi få bruk for når vi skal regne rektangeltall, trekanttall eller dersom det er en forskyvning slik som i oppgave 6 og 7.

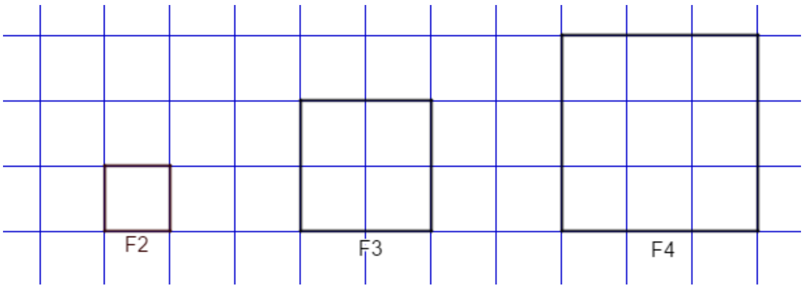
Oppgave 6



Beskriv sammenhengen mellom figurnummer og antall ruter i figuren med ord:

a) Hvor mange ruter vil det være i F_n?
b) Hvor mange ruter vil det være i F_9?
c) Hvilket figurnummer kan du lage av 81 ruter?
d) Hvor mange ruter vil det være til sammen i de 30 første figurene?

Oppgave 7



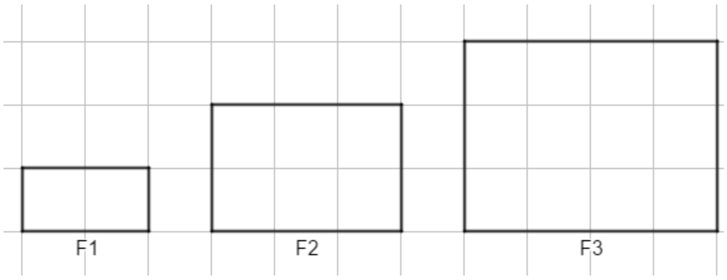
Beskriv sammenhengen mellom figurnummer og antall ruter i figuren med ord:

a) Hvor mange ruter vil det være i F_n?
b) Hvor mange ruter vil det være i F_7?
c) Hvor mange ruter vil det være i F_1?
d) Hvilket figurnummer er det største du kan lage av 140 ruter?
e) Hvor mange ruter vil det være til sammen i de 25 første figurene?

Rektangeltall

Oppgave 8

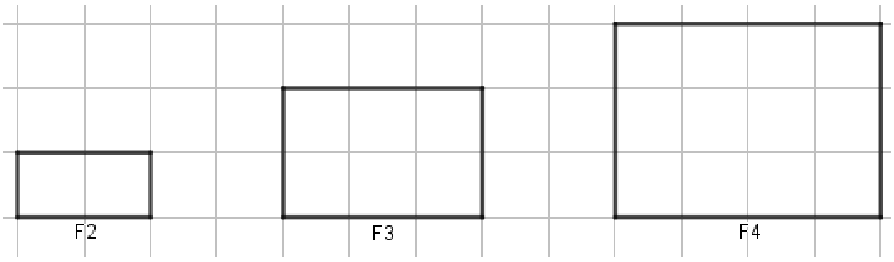
Tegn figurnummer 4 her:



Beskriv sammenhengen mellom figurnummer og antall ruter i figuren med ord:

a) Hvor mange ruter vil det være i F_n?
b) Hvor mange ruter vil det være i F_{100}?
c) Hvilket figurnummer kan du lage av 420 ruter?
d) Hvor mange ruter vil det være til sammen i de 100 første figurene?

Oppgave 9



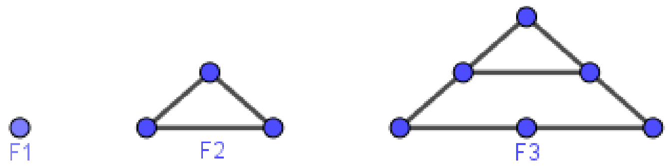
Beskriv sammenhengen mellom figurnummer og antall ruter i figuren med ord:

a) Hvor mange ruter vil det være i F_n?
b) Hvor mange ruter vil det være i F_{10}?
c) Hvilket figurnummer er det største du kan lage av 200 ruter?
d) Hvor mange ruter vil det være til sammen i de 25 første figurene?

Trekanttall

Oppgave 10

Tegn figurnummer 4 her:



Beskriv sammenhengen mellom figurnummer og antall prikker i figuren med ord:

a) Hvor mange prikker vil det være i F_n?
b) Hvor mange prikker vil det være i F_{50}?
c) Hvilket figurnummer kan du lage av 325 prikker?

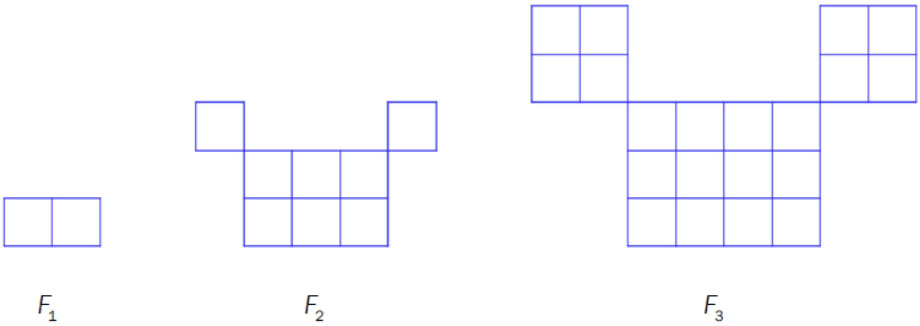
Tenk deg at du skal lage de 15 første figurene, og du ønsker å finne ut hvor mange prikker det blir til sammen.

d) Nedenfor har vi skrevet et program. Vil programmet finne ut hvor mange prikker det blir til sammen på de 15 første figurene? Hvis nei, hvilke endringer må gjøres?

	A	B
1	Figurnummer	Antall prikker
2	1	=A2*(A2+1)/2
3	2	=A3*(A3+1)/2
4	3	=A4*(A4+1)/2
5	4	=A5*(A5+1)/2
6	5	=A6*(A6+1)/2
7	6	=A7*(A7+1)/2
8	7	=A8*(A8+1)/2
9	8	=A9*(A9+1)/2
10	9	=A10*(A10+1)/2
11	10	=A11*(A11+1)/2
12	11	=A12*(A12+1)/2
13	12	=A13*(A13+1)/2
14	13	=A14*(A14+1)/2
15	14	=A15*(A15+1)/2
16	15	=A16*(A16+1)/2
17	Til sammen:	=SUMMER(B2:B16)

Sammensatte figurer

Oppgave 11

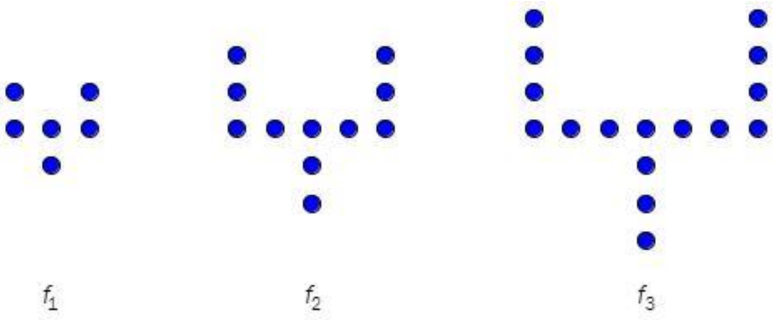


Snorre lager figurer av kvadriske klosser etter et fast mønster.

Ovenfor ser du figur F_1 , F_2 og F_3 .

Hvor mange klosser må han bruke for å bygge de 10 første figurene?

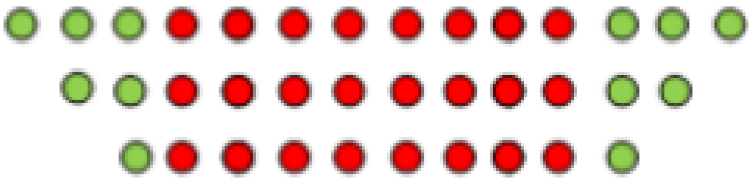
Oppgave 12



Siri lager figurer av runde perler. Figurene ovenfor har hun kalt f_1, f_2 og f_3 .

Hvor mange perler må hun bruke for å lage de 50 første figurene?

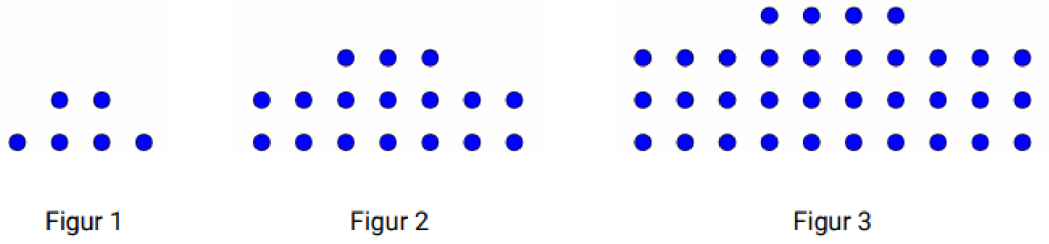
Oppgave 13
I en teatersal der det 580 plasser. På første stolrad er det 10 plasser. På andre stolrad er det 12 plasser, og på tredje stolrad er det 14 plasser. Se figuren nedenfor.



Slik fortsetter det å øke med to plasser for hver stolrad bakover i salen.

Hvor mange stolrader er det i salen?

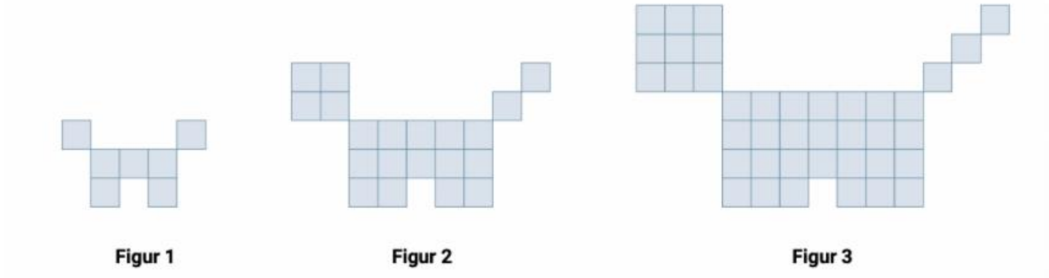
Oppgave 14



Ovenfor ser du tre figurer. Figurene er satt sammen av små sirkler. Dina vil fortsette å tegne figurer etter samme mønster.

Hvor mange små sirkler er det til sammen i de 100 første figurene?

En eksamensoppgave



Ovenfor ser du tre figurer. Figurene er satt sammen av små kvadrater. Tenk deg at du skal fortsette å lage figurer etter samme mønster.

Hvor mange små kvadrater trenger du totalt for å lage de 100 første figurene?

En eksamensoppgave

Figur 1

Figur 2

Marius og Maria arbeider i en dagligvarebutikk. De skal stable bokser med erter.

Marius stabler boksene som vist i figur 1. I figur 1 har han laget et tårn med fire etasjer.

a) Hvor mange bokser trenger Marius for å lage et tårn med 20 etasjer, dersom han stabler bokser på denne måten?

Marius har 400 bokser.

b) Hvor mange etasjer vil det være i det største tårnet han kan lage?

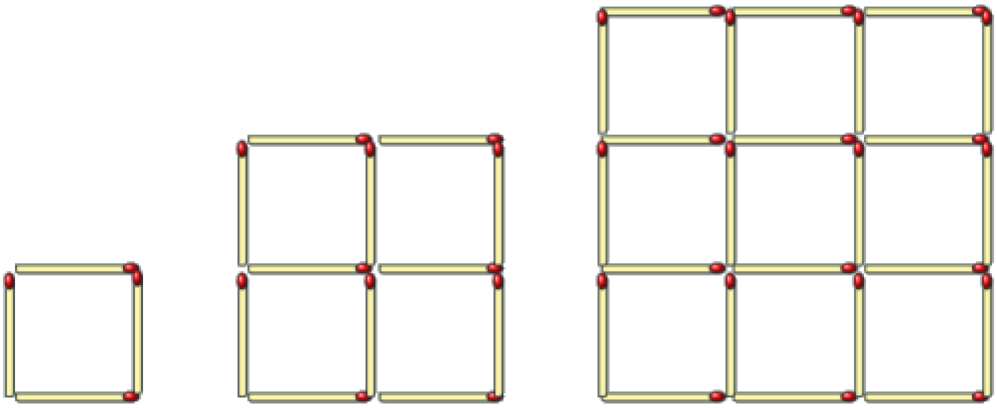
Maria vil stable bokser som vist i figur 2. I figur 2 har hun et tårn med tre etasjer.

c) Hvor mange bokser trenger Maria for å lage et tårn med 20 etasjer, dersom hun stabler bokser på denne måten?

Maria har 4 000 bokser.

d) Hvor mange etasjer vil det være i det største tårnet hun kan lage?

En eksamensoppgave



Figur 1 Figur 2 Figur 3

De tre figurene er laget av fyrstikker.

Figur 1 består av ett lite kvadrat, figur 2 består av fire små kvadrater, og figur 3 består av ni små kvadrater.

Tenk deg at du har 10 000 fyrstikker.

Du skal lage de tre figurene, og så fortsette å lage figurer etter samme mønster, èn i hver størrelse.

a) Hvor mange figurer kan du lage?
b) Hvor mange fyrstikker vil du ha igjen når du har laget den siste figuren?

Løsningsforslag

Oppgave	Svar	Oppgave	Svar
1	a) F_n= *n* antall prikker b) F_{10}= 10 prikker c) 20 prikker = F_{20} d) Ja, programmet vil fungere.	**7**	a) F_n= $(n-1)^2$ ant. ruter b) F_7= 36 ruter c) F_1= 0 ruter d) 121 ruter = F_{12} e) 4 900 ruter
2	a) F_n= 2*n* antall prikker b) F_{20}= 40 prikker c) 36 prikker = F_{36} d) Nei. Det må endres til: prikker=prikker+(Fn*2)	**8**	a) F_n= $n \cdot (n+1)$ ant. ruter = $(n^2 + n)$ ant. ruter b) F_{100}= 10100 ruter c) 420 ruter = F_{20} d) 328 352 ruter
3	a) F_n= *n*+2 ant. prikker b) F_{15}= 17 prikker c) 52 prikker = F_{25} d) Ja, programmet vil fungere	**9**	a) F_n= $n \cdot (n-1)$ ant. ruter = $(n^2 - n)$ ant. ruter b) F_{10}= 90 ruter c) F_1= 0 ruter d) 182 ruter = F_{14} e) 5 200 ruter
4	a) F_n= 2*n*+1 ant. prikker b) F_8= 17 prikker c) 61 prikker = F_{30} d) Nei. Range må endres til 15	**10**	a) F_n= $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ ant. prikker $=\frac{n^2+n}{2}$ b) F_{50}= 1275 prikker c) 325 prikker = F_{25} d) Ja, programmet vil fungere.
5	a) F_n= n^2 antall ruter b) F_{12}= 144 ruter c) 81 ruter = F_9 d) 1240 ruter		
6	a) F_n= $(n+1)^2$ ant. ruter b) F_9= 100 ruter c) 81 ruter = F_8 d) 10 415 ruter		

Oppgave 11

Finner formelen ved hjelp av regresjon:

$$y = 3x^2 - 3x + 2$$

	A	B
1	Oppgave 11	
2	Figur nr	Antall klosser
3	1	2
4	2	8
5	3	20
6	4	38
7	5	62
8	6	92
9	7	128
10	8	170
11	9	218
12	10	272
13	Sum	1010

	A	B
1	Oppgave 11	
2	Figur nr	Antall klosser
3	1	=3*A3^2-3*A3+2
4	2	=3*A4^2-3*A4+2
5	3	=3*A5^2-3*A5+2
6	4	=3*A6^2-3*A6+2
7	5	=3*A7^2-3*A7+2
8	6	=3*A8^2-3*A8+2
9	7	=3*A9^2-3*A9+2
10	8	=3*A10^2-3*A10+2
11	9	=3*A11^2-3*A11+2
12	10	=3*A12^2-3*A12+2
13	Sum	=SUMMER(B3:B12)

Oppgave 12

Finner først formelen ved hjelp av regresjon

$$y = 5x + 1$$

	A	B
1	Oppgave 12	
2	Figur nr	Antall perler
3	1	6
4	2	11
5	3	16
6	4	21
7	5	26
45	43	216
46	44	221
47	45	226
48	46	231
49	47	236
50	48	241
51	49	246
52	50	251
53	Sum	6425

	A	B
1	Oppgave 12	
2	Figur nr	Antall perler
3	1	=5*A3+1
4	2	=5*A4+1
5	3	=5*A5+1
6	4	=5*A6+1
7	5	=5*A7+1
45	43	=5*A45+1
46	44	=5*A46+1
47	45	=5*A47+1
48	46	=5*A48+1
49	47	=5*A49+1
50	48	=5*A50+1
51	49	=5*A51+1
52	50	=5*A52+1
53	Sum	=SUMMER(B3:B52)

Radene 8 – 44 er skjult for å spare plass.

Oppgave 13

Finner formelen ved hjelp av regresjon:

$$y = 2x + 8$$

	A	B	C
1	Oppgave 13		
2	Rad nummer	Antall stoler per rad	Sum stoler
3	1	10	10
4	2	12	22
5	3	14	36
6	4	16	52
7	5	18	70
8	6	20	90
9	7	22	112
10	8	24	136
11	9	26	162
12	10	28	190
13	11	30	220
14	12	32	252
15	13	34	286
16	14	36	322
17	15	38	360
18	16	40	400
19	17	42	442
20	18	44	486
21	19	46	532
22	20	48	580

	A	B	C
1	Oppgave 13		
2	Rad nummer	Antall stoler per rad	Sum stoler
3	1	=2*A3+8	=B3
4	2	=2*A4+8	=C3+B4
5	3	=2*A5+8	=C4+B5
6	4	=2*A6+8	=C5+B6
7	5	=2*A7+8	=C6+B7
8	6	=2*A8+8	=C7+B8
9	7	=2*A9+8	=C8+B9
10	8	=2*A10+8	=C9+B10
11	9	=2*A11+8	=C10+B11
12	10	=2*A12+8	=C11+B12
13	11	=2*A13+8	=C12+B13
14	12	=2*A14+8	=C13+B14
15	13	=2*A15+8	=C14+B15
16	14	=2*A16+8	=C15+B16
17	15	=2*A17+8	=C16+B17
18	16	=2*A18+8	=C17+B18
19	17	=2*A19+8	=C18+B19
20	18	=2*A20+8	=C19+B20
21	19	=2*A21+8	=C20+B21
22	20	=2*A22+8	=C21+B22

20 rader gir til sammen 580 sitteplasser

Oppgave 14

Finner formelen ved hjelp av regresjon:

$$y = 3x^2 + 2x + 1$$

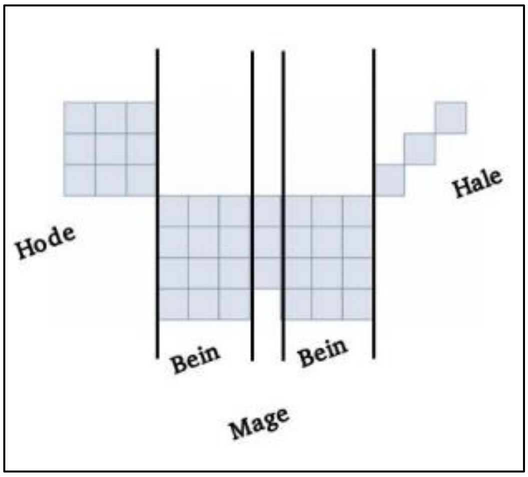
	A	B
1	Oppgave 14	
2	Figur nr	Antall sirkler
3	1	6
4	2	17
5	3	34
6	4	57
7	5	86
8	6	121
96	94	26697
97	95	27266
98	96	27841
99	97	28422
100	98	29009
101	99	29602
102	100	30201
103	Sum	1025250

	A	B
1	Oppgave 14	
2	Figur nr	Antall sirkler
3	1	=3*A3^2+2*A3+1
4	2	=3*A4^2+2*A4+1
5	3	=3*A5^2+2*A5+1
6	4	=3*A6^2+2*A6+1
7	5	=3*A7^2+2*A7+1
8	6	=3*A8^2+2*A8+1
96	94	=3*A96^2+2*A96+1
97	95	=3*A97^2+2*A97+1
98	96	=3*A98^2+2*A98+1
99	97	=3*A99^2+2*A99+1
100	98	=3*A100^2+2*A100+1
101	99	=3*A101^2+2*A101+1
102	100	=3*A102^2+2*A102+1
103	Sum	=SUMMER(B3:B102)

Radene 9 – 95 er skjult for å spare plass

Eksamensoppgave side 170

	A	B	C	D	E	F
1	Figur	Hode	Hale	Mage	Bein	Hund
2	1	1	1	1	2	7
3	2	4	2	2	6	20
4	3	9	3	3	12	39
5	4	16	4	4	20	64
6	5	25	5	5	30	95
7	6	36	6	6	42	132
8	7	49	7	7	56	175
9	8	64	8	8	72	224
10	9	81	9	9	90	279
11	10	100	10	10	110	340
12	11	121	11	11	132	407
13	12	144	12	12	156	480
14	13	169	13	13	182	559
15	14	196	14	14	210	644
16	15	225	15	15	240	735
17	16	256	16	16	272	832
18	17	289	17	17	306	935
19	18	324	18	18	342	1044
20	19	361	19	19	380	1159
81	80	6400	80	80	6480	19520
82	81	6561	81	81	6642	20007
83	82	6724	82	82	6806	20500
84	83	6889	83	83	6972	20999
85	84	7056	84	84	7140	21504
86	85	7225	85	85	7310	22015
87	86	7396	86	86	7482	22532
88	87	7569	87	87	7656	23055
89	88	7744	88	88	7832	23584
90	89	7921	89	89	8010	24119
91	90	8100	90	90	8190	24660
92	91	8281	91	91	8372	25207
93	92	8464	92	92	8556	25760
94	93	8649	93	93	8742	26319
95	94	8836	94	94	8930	26884
96	95	9025	95	95	9120	27455
97	96	9216	96	96	9312	28032
98	97	9409	97	97	9506	28615
99	98	9604	98	98	9702	29204
100	99	9801	99	99	9900	29799
101	100	10000	100	100	10100	30400
102						
103					SUM	1035250



Under er formlene jeg har brukt:

	A	B	C	D	E	F
1	Figur	Hode	Hale	Mage	Bein	Hund
2	1	=A2*A2	=A2	=A2	=A2*(A2+1)	=B2+C2+D2+2*E2
3	2	=A3*A3	=A3	=A3	=A3*(A3+1)	=B3+C3+D3+2*E3
4	3	=A4*A4	=A4	=A4	=A4*(A4+1)	=B4+C4+D4+2*E4
5	4	=A5*A5	=A5	=A5	=A5*(A5+1)	=B5+C5+D5+2*E5
6	5	=A6*A6	=A6	=A6	=A6*(A6+1)	=B6+C6+D6+2*E6
7	6	=A7*A7	=A7	=A7	=A7*(A7+1)	=B7+C7+D7+2*E7
8	7	=A8*A8	=A8	=A8	=A8*(A8+1)	=B8+C8+D8+2*E8
9	8	=A9*A9	=A9	=A9	=A9*(A9+1)	=B9+C9+D9+2*E9
10	9	=A10*A10	=A10	=A10	=A10*(A10+1)	=B10+C10+D10+2*E10
100	99	=A100*A100	=A100	=A100	=A100*(A100+1)	=B100+C100+D100+2*E100
101	100	=A101*A101	=A101	=A101	=A101*(A101+1)	=B101+C101+D101+2*E101
102						
103					SUM	=SUMMER(F2:F101)

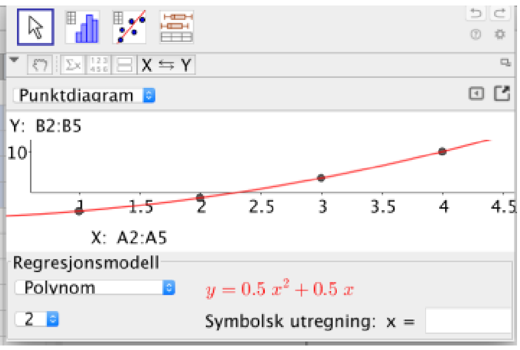
Jeg trenger 1 035 250 kvadrater for å lage de 100 første hundene.

Eksamensoppgave side 171

a) Bruker regresjonsanalyse i GeoGebra til å bestemme et uttrykk for antall bokser i et tårn med *x* etasjer.

Regneark

	A	B
1	Antall etasjer	Antall bokser
2	1	1
3	2	3
4	3	6
5	4	10
6		
7		
8		
9		
10		



Ser at antall bokser i et tårn med *x* etasjer er $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$.

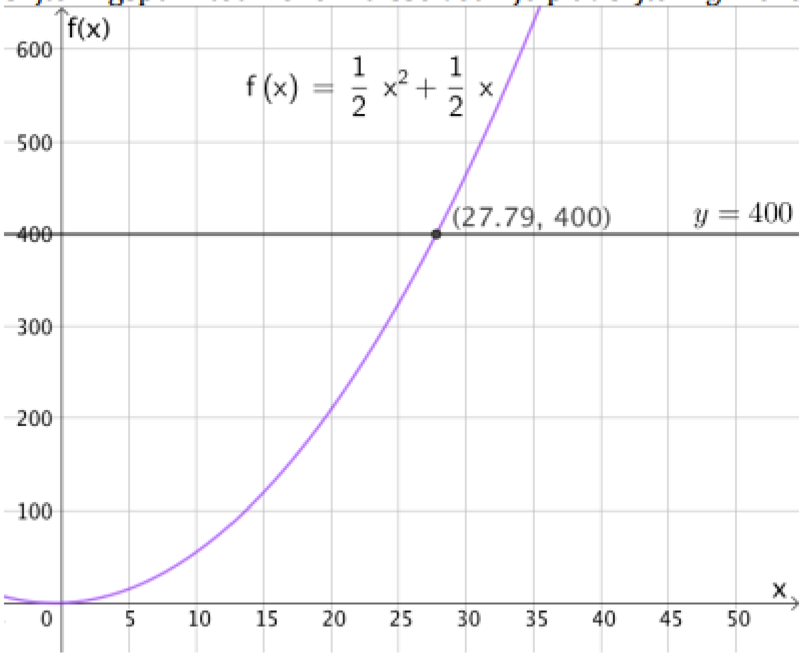
Finner antall bokser i et tårn med 20 etasjer:

$y = 0.5\,x^2 + 0.5\,x$

Symbolsk utregning: x = 20 y = 210

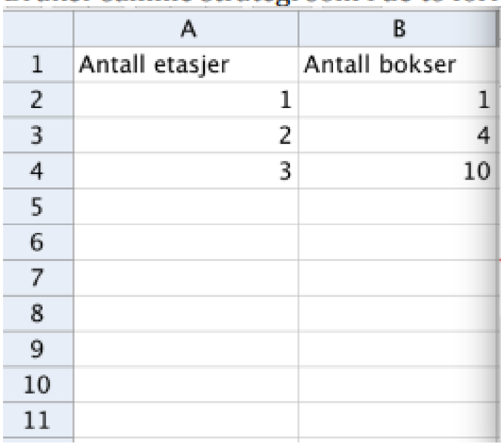
Marius trenger 210 bokser for å lage et tårn med 20 etasjer.

b) Tegner grafen til $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$ sammen med linja $y=400$ og bestemmer skjæringspunktet mellom disse ved hjelp av *skjæring mellom to objekt.*

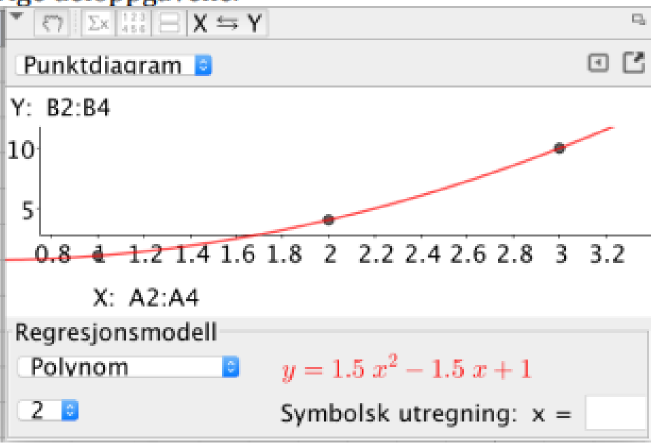


Det største tårnet Marius kan lage er et tårn med 27 etasjer.

c) Bruker samme strategi som i de to forrige deloppgavene.



	A	B
1	Antall etasjer	Antall bokser
2	1	1
3	2	4
4	3	10
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		



I et tårn med *x* etasjer vil det være $\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x+1$ bokser.

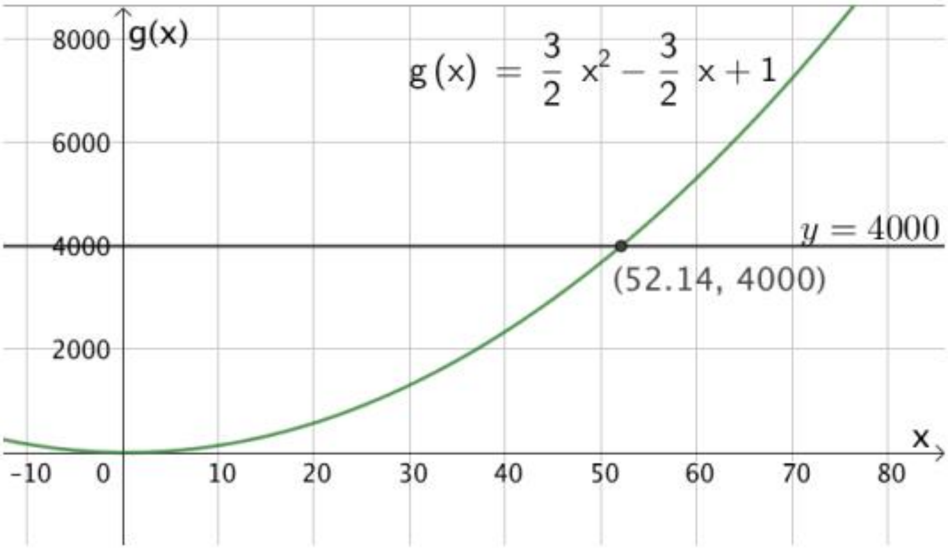
Finner antall bokser i et tårn med 20 etasjer:

$y = 1.5\ x^2 - 1.5\ x + 1$

Symbolsk utregning: x = 20 y = 571

Maria trenger 571 bokser om hun skal stable et tårn med 20 etasjer.

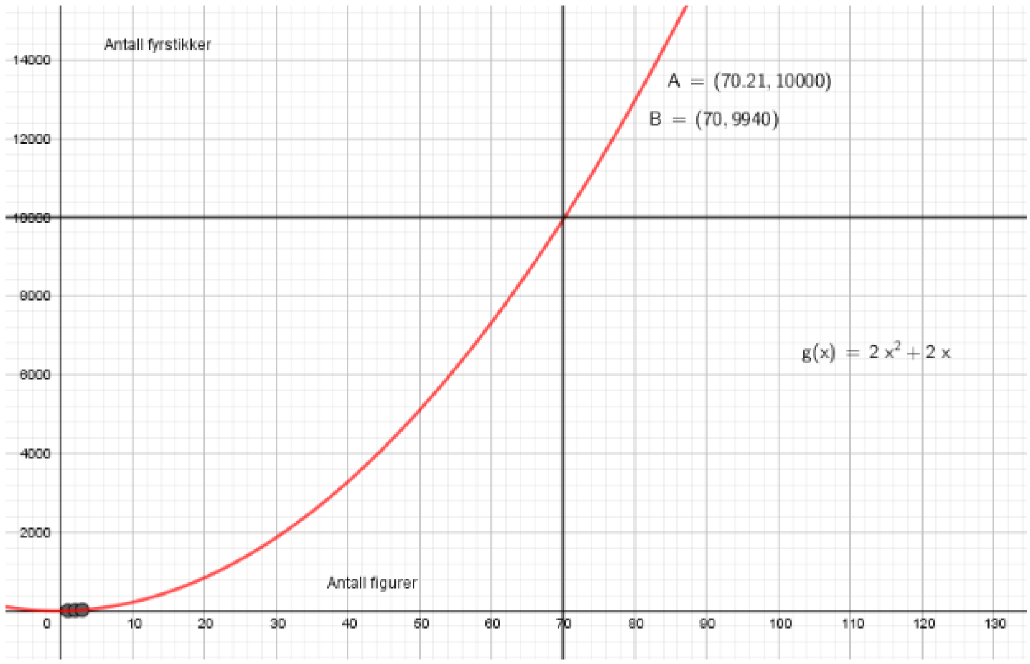
d) Tegner grafen til $g(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x+1$ sammen med linja $y=4000$ og finner skjæringspunktet mellom disse ved hjelp av *skjæring mellom to objekt.*



Det største tårnet Maria kan lage vil ha 52 etasjer.

Eksamensoppgave side 172

a)



Bruker regresjon, finner et funksjonsuttrykk og ser at man kan lage 70 figurer.

b)

Man får 60 fyrstikker tilovers.