Velkommen

Til våre gamle elever: velkommen tilbake etter sommerferien!
Til våre nye elever: Velkommen til Hellerud videre gående skole, og gratulerer med valg av skole!

Læring består av to parter; en som ønsker å lære bort og en som ønsker å lære. Her på Hellerud vil du møte topp motiverte lærere som ønsker å hjelpe deg gjennom dette skoleåret slik at du kan få best mulig utbytte av undervisningen.

Imidlertid kan ingen av oss trylle. Skal vi kunne hjelpe deg til å oppnå best mulig resultat er det fire krav du må oppfylle. Du må:

- Møte til undervisning
- Møte presist
- Møte interessert
- Møte forberedt

Ønsker du å beholde karakteren din fra 1P må du være forberedt på å jobbe hardt og seriøst med faget, men om du oppfyller dine krav er vi helt sikre på at vi sammen greier å nå målet ditt.

Forord til 10. utgave:

I denne boka vil du finne presentasjonsoppgaver, hvor du skal presentere dine løsninger enten skriftlig eller muntlig. Presentasjonene vil være en del av vurderingsgrunnlaget faglæreren din vil bruke når han eller hun skal sette standpunktkarakter.

Presentasjonsoppgavene gir deg anledning til å

- Være kreativ
- Vise hva du har lært
- Velge dine egne løsninger
- Argumentere for dine valg og løsninger

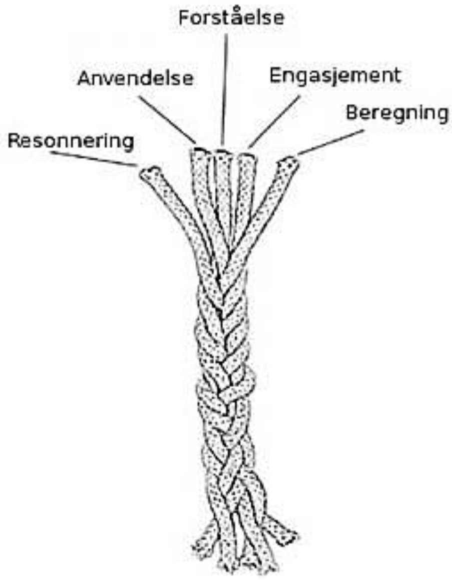
Husk at dine tanker og meninger er like viktige som alle andres!

Matematikkseksjonen ved Hellerud videregående skole
Juli 2022

Forsiden er laget av Zainab Naqvi, elev ved Hellerud vgs. Baksiden er laget av lærer Christian Gruehagen.

Trådmodellen – hva vil det si å være god i matematikk?

1. **Forståelse:** Forstå matematiske begreper, representasjoner, operasjoner og relasjoner



2. **Beregning:** Utføre prosedyrer som involverer tall, størrelser og figurer, effektivt, nøyaktig og fleksibelt

3. **Anvendelse:** Formulere problemer matematisk og utvikle strategier for å løse problemer ved å bruke passende begreper og prosedyrer

Figur 1: Å være god i matematikk består av fem sammenflettede tråder (oversatt utgave, hentet fra

4. **Resonnering:** Forklare og begrunne en løsning til et problem, eller utvide fra noe kjent til noe som ikke er kjent

5. **Engasjement:** Være motivert for å lære matematikk, se på matematikk som nyttig og verdifullt, og tro at innsats bidrar til økt læring i matematikk

(Kilde: http://www.matematikksenteret.no/content/4526/Hva-betyr-det-a-vare-god-i-matematikk)

Jo Boalers 7 bud

1. **Alle kan lære matematikk på høyeste nivå**
   - Det er ikke slik at noen er født med en «mattehjerne» - det handler om at alle kan lære hvis de vil gjøre jobben.
2. **Å gjøre feil er verdifull**
   - Feil gjør at hjernen din vokser. Det er bra å streve og gjøre feil.
3. **Å stille spørsmål er viktig**
   - Spør om det er noe du lurer på, og svar på andre sine spørsmål. Spør deg selv: er dette riktig?
4. **Matematikk handler om å være kreativ, og skal gi mening**
   - Finn mønstre og sammenhenger, og diskuter disse med andre.
5. **Matematikk er å se sammenhenger og å diskutere**
   - I matematikk kan det samme sies på ulike måter, for eksempel ord, bide, graf og funksjon. Finn sammenhengen mellom dem, og diskuter hvilken som passer best i de ulike situasjonene!
6. **Matematikk handler om å lære, ikke prestere**
   - Det tar tid å lære matematikk, og det handler om innsats.
7. **Det er viktigere å tenke grundig enn fort**
   - Det handler om å forstå noe godt, og det er ikke viktig å være rask

(fritt oversatt fra Jo Boalers «Positive Norms to Encourage in Math Class»)

INNHOLD

INNHOLD

Likninger og ulikheter

Målet for opplæringen er at eleven skal kunne:

- Utforske strategier for å løse likninger, likningssystem og ulikheter, og argumentere for tankemåtene sine

Å finne en ukjent størrelse

Å løse likninger går ut på å lære regneteknikker for å løse ukjente størrelser i et oppstilt regnestykke. I dette kapittelet skal du først få en trening i å formulere tankemåter i arbeid med relativt enkle oppgaver. Vi har forsøkt å gjøre oppgavene enkle ved å gi informasjon gjennom bruk av bilder. Deretter blir oppgavene vanskeligere, ved at informasjonen er gitt gjennom en tekst. Mot slutten av kapittelet skal du lære å regne teoretiske likninger. Underveis skal du løse likninger både ved hjelp av GeoGebra og CAS.

Informasjon gitt gjennom bilder

Oppgave 1

Hvor mye inneholder pengesekken?

+ 720 kr = 2 000 kr

Tenk deg at du skulle forklare tankemåten din til en som ikke har funnet løsningen. Hvordan ville du ha ordlagt deg? Skriv tankemåten din nedenfor:

Oppgave 2

Hvor mye inneholder pengesekken?

- 720 kr = 400 kr

Tenk deg at du skulle forklare tankemåten din til en som ikke har funnet løsningen. Hvordan ville du ha ordlagt deg?

Oppgave 3

Hvor mye inneholder pengesekken?

950 kr = 4 500 kr − 

Tenk deg at du skulle forklare tankemåten din til en som ikke har funnet løsningen. Hvordan ville du ha ordlagt deg? Skriv tankemåten din nedenfor:

Oppgave 4

Hvor mye inneholder pengesekken?

 + 2 000 kr = 4 500 kr

Tenk deg at du skulle forklare tankemåten din til en som ikke har funnet løsningen. Hvordan ville du ha ordlagt deg? Skriv tankemåten din nedenfor:

Oppgave 5

Hvor mye inneholder pengesekken?

 + 1 500 kr = 4 500 kr + 

Tenk deg at du skulle forklare tankemåten din til en som ikke har funnet løsningen. Hvordan ville du ha ordlagt deg? Skriv tankemåten din nedenfor:

Oppgave 6

Hvor mye inneholder pengesekken?

 + 1 500 kr = 4 500 kr – 

Tenk deg at du skulle forklare tankemåten din til en som ikke har funnet løsningen. Hvordan ville du ha ordlagt deg? Skriv tankemåten din nedenfor:

Informasjon gitt gjennom tekst

Oppgave 7

To familier drar med bil fra hver sin by. Avstanden mellom de to byene er 245 km. Når de møtes, leser sjåføren i den ene bilen av at de har kjørt 127 km. Sjåføren i den andre bilen har ikke sett på km-måleren. Hvor langt har bil 2 kjørt?

Tenk deg at du skulle forklare tankemåten din til en som ikke har funnet løsningen. Hvordan ville du ha ordlagt deg? Skriv tankemåten din nedenfor:

Oppgave 8

Et basseng skal fylles med 10 800 liter vann. Ut av hageslangen kommer det 12 liter i minuttet. Hvor lang tid tar det å fylle bassenget?

Tenk deg at du skulle forklare tankemåten din til en som ikke har funnet løsningen. Hvordan ville du ha ordlagt deg? Skriv tankemåten din nedenfor:

Oppgave 9

En skolebolle på tilbud koster 2,50 kroner mindre enn normal pris. Nå kan du kjøpe 7 skoleboller for 94,50 kroner. Hva er normal pris på en skolebolle?

Tenk deg at du skulle forklare tankemåten din til en som ikke har funnet løsningen. Hvordan ville du ha ordlagt deg? Skriv tankemåten din nedenfor:

Oppgave 10

Charlotte sitter barnevakt, og får 65 kr/time. I tillegg får hun 50 kroner ekstra dersom klokken er over midnatt. En kveld arbeidet hun til kl. 02.00 og tjente 490 kroner. Hvor mange timer satt Charlotte barnevakt denne kvelden?

Tenk deg at du skulle forklare tankemåten din til en som ikke har funnet løsningen. Hvordan ville du ha ordlagt deg? Skriv tankemåten din nedenfor:

Oppgave 11

Charlie leser 102 sider av en bok. Det er 4 sider færre enn $\frac{1}{3}$ av hele boka. Hvor mange sider er det i boka?

Tenk deg at du skulle forklare tankemåten din til en som ikke har funnet løsningen. Hvordan ville du ha ordlagt deg? Skriv tankemåten din nedenfor:

Matematisering av opplysninger

I neste del av kapittelet skal du lære å løse **likninger** ved hjelp av **CAS**, en funksjon i GeoGebra. **CAS** er et tillatt hjelpemiddel på tentamen og eksamen.

For å kunne benytte **CAS** som et hjelpemiddel, må du oversette en tekst- eller billedoppgave til en **likning** du kan skrive inn i **CAS**. Denne oversettelsen kaller vi **matematisering** av opplysninger.

En **likning** kan være et matematisk **uttrykk** med bokstaver der målet er å finne bokstavenes **verdier**. En l**ikning** kan også være en **formel** som viser at to matematiske **uttrykk** er like store. I dette kapittelet skal vi konsentrere oss om den første varianten.

Du kan selv velge hvilke bokstaver du ønsker å bruke når du lager en **likning**, men dersom du vil bruke **CAS** som et hjelpemiddel til å løse **likningen** kan det være lurt å bruke bokstavene x når det er en ukjent, x og y når det er to ukjente, og x, y og z når det er tre ukjente. Dersom du skal løse en likning i **GeoGebra**, må du bruke bokstavene x, y og z.

Tenk deg følgende situasjon:

En elev går med avisa, og har fast lønn på 430 kr per måned. I tillegg får eleven 8 kr per avis han selger. En måned fikk han utbetalt 974 kroner. Hvor mange aviser solgte eleven denne måneden?

Matematisk kan dette skrives på følgende måte:

$430\ kr + 8 \cdot antall\ solgte\ aviser = 974\ kr$

Det som skal regnes ut i denne situasjonen er antall solgte aviser, som vi derfor kaller x. Det er lurt å skrive dette på en oversiktlig måte, for eksempel slik:

$Antall\ solgte\ aviser = x$

Deretter kan vi lage en likning hvor x er det som skal regnes ut. I likninger bruker vi ikke benevning.

$430 + 8x = 974$

Oppgave 12

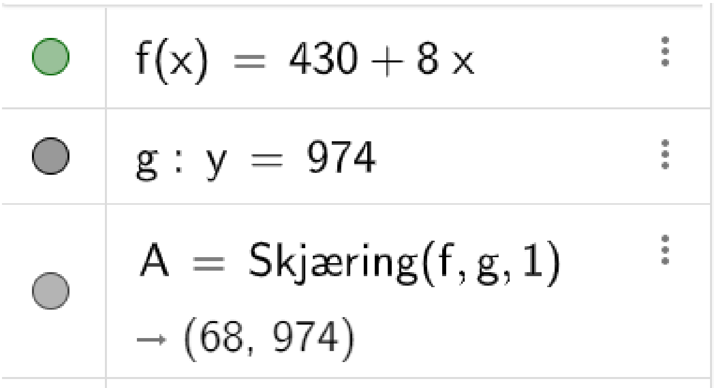
Velg to av billedoppgavene og to av tekstoppgavene. Lag **likninger** hvor du erstatter det som skal regnes ut med x. Husk å vise hvilke oppgaver du har valgt, og hva x erstatter.

Likninger i GeoGebra: grafisk løsning av likningen

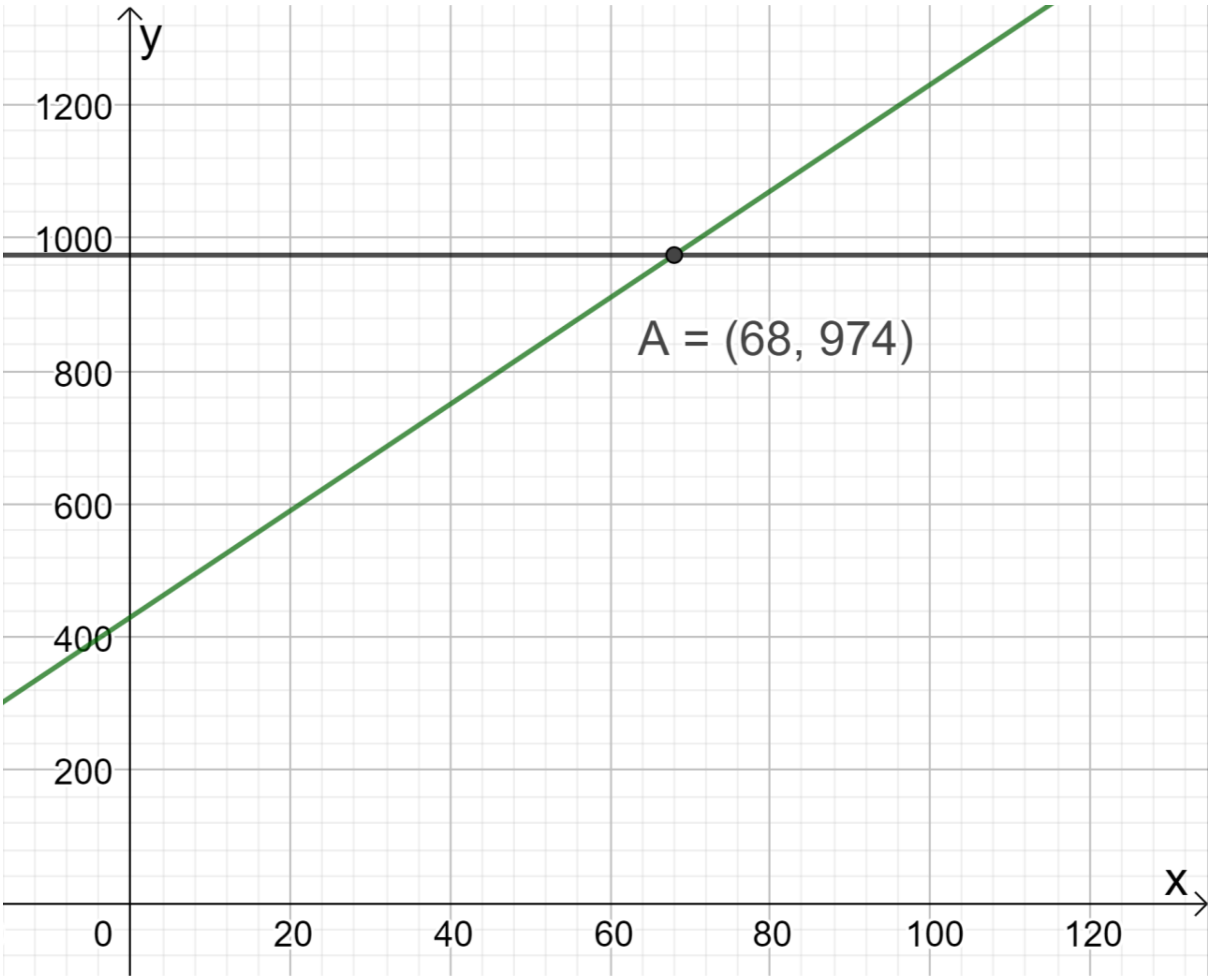
Dersom vi ønsker å løse en likning grafisk, kan dette gjøres ved hjelp av **GeoGebra**. For å gjøre dette må vi utføre operasjonene nedenfor:

Operasjon

1. Skriv venstre side av likhetstegnet i inntastingsfeltet.
2. Skriv $y =$ høyre side av likhetstegnet i inntastingsfeltet.
3. Finn skjæringspunktet mellom linjene, og les av x-verdien.



Det gir dette grafikkbildet:



Løsningen på likningen er x-verdien i skjæringspunktet. I dette tilfellet er $x = 68$ løsning på likningen.

Likninger i CAS (Computer Algebra System)

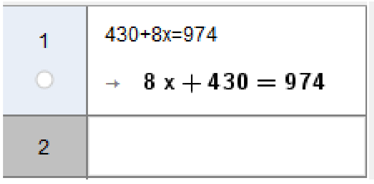
Som nevnt i delkapittelet «Matematisering» kan vi løse **likninger** ved hjelp av **CAS**, som du finner ved å åpne GeoGebra. I eksempelet nedenfor bruker vi **likningen** fra eksempelet på forrige side:

$430 + 8x = 974$.

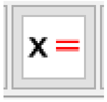
Hvordan kan vi bruke **CAS** til å finne verdien til x, som har erstattet antall solgte aviser?

Trykk «Oppsett», og velg CAS

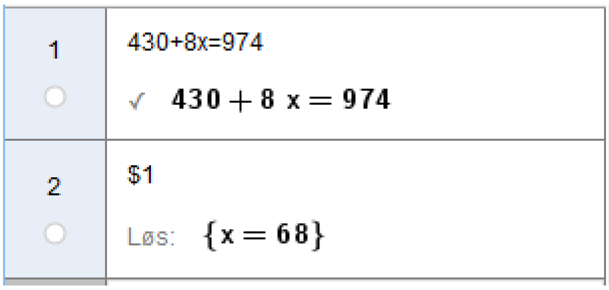
Skriv inn **likningen**, og trykk «Enter»



Velg «Løs»



CAS finner denne løsningen:



som betyr at eleven solgte 68 aviser denne måneden.

Oppgave 13

Bruk **CAS** og **GeoGebra** til å finne verdien til x i **likningene** du laget i oppgave 12. Hvilket hjelpemiddel liker du best?

Likninger uten digitale hjelpemidler

Formålet med å løse en likning er å finne den **verdien** for x som gjør at **uttrykket** på venstre side av **likhetstegnet** får lik **verdi** som **uttrykket** på høyre side av **likhetstegnet**.

Ved hjelp av metodene beskrevet nedenfor ønsker vi å fjerne alle x-ledd fra høyre side av **likhetstegnet**, og alle tall fra venstre side av **likhetstegnet**. Til slutt skal vi ende med et **uttrykk** på formen

$$x = et\ tall$$

hvor $tallet$ er løsningen på **likningen**.

Felles for alle metodene er at de brukes når vi ønsker å fjerne **verdier** fra **likningen**. Hvilke metoder du skal bruke avhenger av hvilke **verdier** vi ønsker å fjerne. Innenfor matematikk sier vi at vi har **omvendte operasjoner:**

- Addisjon og subtraksjon er **omvendte operasjoner**
- Multiplikasjon og divisjon er **omvendte operasjoner**
- Potenser og røtter er **omvendte operasjoner**

Ofte må du bruke flere metoder for å løse en oppgave. Metodene bør brukes i rekkefølgen vi har beskrevet nedenfor:

1. **Multiplikasjonsmetoden**
2. **Addisjons- og subtraksjonsmetoden**, også kalt **flytte/bytte-metoden**
3. **Divisjonsmetoden**
4. **Rotmetoden**

Multiplikasjonsmetoden

Vi kan fjerne en **nevner** fra en **likning** ved å multiplisere alle **ledd** i **likningen** med **nevneren**. Dersom **likningen** inneholder ulike **nevnere**, multipliserer vi med **minste felles nevner**.

Eksempel:

Vi ønsker å fjerne nevnerne fra likningene nedenfor ved å multiplisere alle ledd med minste felles nevner

$$\begin{aligned} \frac{x}{3} + 4 &= 6 \\ \frac{x}{3} \cdot 3 + 4 \cdot 3 &= 6 \cdot 3 \\ x + 12 &= 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{x} - 1 &= 8 \\ \frac{2}{x} \cdot x - 1 \cdot x &= 8 \cdot x \\ 2 - x &= 8x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{4} &= 3 - \frac{x}{6} \\ \frac{x}{4} \cdot 12 &= 3 \cdot 12 - \frac{x}{6} \cdot 12 \\ 3x &= 24 - 2x \end{aligned}$$

Spør læreren din dersom du trenger en forklaring på brøkregningen i noen av eksemplene ovenfor.

Addisjonsmetoden

Vi kan legge ønsket **verdi** til **likningen**, så lenge vi legger til den samme **verdien** på hver side av **likhetstegnet**.

Eksempel:

Vi ønsker å fjerne -3 i likningen nedenfor. Derfor legger vi til 3 på begge sider av likhetstegnet:

$$\begin{aligned} x-3 &= 8 \\ x-3+3 &= 8+3 \\ x &= 11 \end{aligned}$$

Vi ønsker å fjerne $-x$ i likningen nedenfor. Derfor legger vi til x på begge sider av likhetstegnet:

$$\begin{aligned} 2x &= -9-x \\ 2x+x &= -9x-x+x \\ 3x &= -9 \end{aligned}$$

Subtraksjonsmetoden

Vi kan trekke ønsket **verdi** fra **likningen**, så lenge vi trekker fra den samme **verdien** på hver side av **likhetstegnet**.

Eksempel:

Vi ønsker å fjerne 3 i likningen nedenfor. Derfor trekker vi fra 3 på begge sider av likhetstegnet:

$$\begin{aligned} -x+3 &= 8 \\ -x-3-3 &= 8-3 \\ -x &= 5 \end{aligned}$$

Vi ønsker å fjerne x i likningen nedenfor. Derfor trekker vi fra x på begge sider av likhetstegnet:

$$\begin{aligned} 2x &= 9+x \\ 2x-x &= 9x+x-x \\ x &= 9 \end{aligned}$$

Flytte/bytte-metoden

En snarvei på addisjons- og subtraksjonsmetoden kalles **flytte/bytte-metoden**. Ser du at det vi ønsker å fjerne fra den ene siden i likningene ender opp på motsatt side av likhetstegnet med motsatt fortegn? Vi sier at vi *flytter* det uønskete **leddet** til motsatt side av **likhetstegnet**, og *bytter* fortegn. Du må gjerne bruke denne snarveien, men det er viktig at du forstår hvorfor den kan brukes.

Eksempel:

$$\begin{aligned} x-3 &= 8 \\ x &= 8+3 \\ x &= 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x &= -9-x \\ 2x+x &= -9 \\ 3x &= -9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x+3 &= 8 \\ -x &= 8-3 \\ -x &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x &= 9+x \\ 2x-x &= 9 \\ x &= 9 \end{aligned}$$

Divisjonsmetoden

Vi kan fjerne en **faktor** fra en **likning** ved å dividere alle **ledd** i **likningen** med **faktoren**.

Eksempel:

Vi ønsker å fjerne faktoren 4 i likningen nedenfor. Derfor dividerer vi alle ledd med 4:

$$\begin{aligned} 4x &= 20 \\ \frac{4x}{4} &= \frac{20}{4} \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Vi ønsker å fjerne faktoren 2 i likningen nedenfor. Derfor dividerer vi alle ledd med 2:

$$\begin{aligned} 2x &= 17 \\ \frac{2x}{2} &= \frac{17}{2} \\ x &= 8{,}5 \text{ } eller \frac{17}{2} \end{aligned}$$

Dersom svaret ikke blir et helt tall må du selv avgjøre om du ønsker å svare med desimaltall eller med brøk. Desimaltall er ofte en avrunding, mens brøk er alltid nøyaktig. Dersom du velger å svare med brøk bør brøken forkortes.

Metoden brukes også dersom **faktoren** er **negativ**.

Eksempel:

Vi ønsker å fjerne faktoren -4 i likningen nedenfor. Derfor dividerer vi alle ledd med -4:

$$\begin{aligned} -4x &= -20 \\ \frac{-4x}{-4} &= \frac{-20}{-4} \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Vi ønsker å fjerne faktoren -1 i likningen nedenfor. Derfor dividerer vi alle ledd med -1:

$$\begin{aligned} -x &= 5 \\ \frac{-x}{-1} &= \frac{5}{-1} \\ x &= -5 \end{aligned}$$

Rotmetoden

Vi kan fjerne en **potens** fra en **likning** ved å finne den tilsvarende **roten**.

Eksempel:

Vi ønsker å fjerne potensen 2 i likningen nedenfor. Derfor finner vi kvadratroten til alle ledd:

$$\begin{aligned} x^2 &= 49 \\ \sqrt{x^2} &= \sqrt{49} \\ x &= \pm 7 \end{aligned}$$

Vi ønsker å fjerne potensen 3 i likningen nedenfor. Derfor finner vi tredjeroten til alle ledd:

$$\begin{aligned} x^3 &= 27 \\ \sqrt[3]{x^3} &= \sqrt[3]{27} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Partallsrøtter har alltid 2 svar, fordi løsningen kan være både positiv og negativ. Oddetallsrøtter har kun ett svar. Roten vil ha samme fortegn som verdien du finner roten til.

Eksempel:

$\sqrt[3]{64} = 4$

$\sqrt[3]{-64} = -4$

Eksempel på en likning hvor vi får bruk for alle metodene:

Løs likningen

$$\frac{5x^2}{3} + 2x - 3 \quad = \quad x^2 + 2x + 3$$

Løsning:

Venstre side		Høyre side	Regning	Metode
$\frac{5x^2}{3} + 2x - 3$	$=$	$x^2 + 2x + 3$	$\cdot 3$	Multiplikasjonsmetoden
$5x^2 + 6x - 9$	$=$	$3x^2 + 6x + 9$		Flytte/bytte-metoden
$5x^2 - 3x^2 + 6x - 6x$	$=$	$9 + 9$		Regner like ledd
$2x^2$	$=$	18	$:3$	Divisjonsmetoden
x^2	$=$	9	$\sqrt{\ }$	Rotmetoden
x	$=$	± 3		

Oppgave 14

Finn verdien til x

a) $4x - 5 = 2x + 3$
b) $7 + x = -3x - 1$
c) $2x - 8 = -3x + 2$
d) $-3x - 2 = -5x + 4$
e) $2x + 4 = 3x - 1$
f) $7x - 5 = -x + 11$
g) $8x + 3 = 4x + 13$
h) $11x + 3 = 8x - 1$

Oppgave 15

Finn verdien til x

a) $\frac{x}{2} + 3 = -2x + 8$
b) $\frac{x}{3} + 1 = x + 3$
c) $\frac{x}{2} + 3 = 2x + 12$
d) $\frac{x}{4} - 8 = -x + 3$
e) $\frac{x}{4} + 6 = -\frac{x}{4} + 3$
f) $\frac{x}{2} + \frac{1}{2} = -x + 2$
g) $\frac{x}{3} = -2x + 7$
h) $\frac{x}{3} + \frac{2}{3} = -x + \frac{1}{3}$

Oppgave 16

Jeg tenker på et tall. Jeg legger 4 til tallet, og dividerer summen på 2. Deretter multipliserer jeg svaret med 3 og trekker fra 1. Da får jeg 14.

Hvilket tall tenkte jeg på?

Klarer du å stille opp informasjonen som en likning?

Oppgave 17

Finn verdien til x

a) $\frac{x}{3} + \frac{1}{2} = -\frac{2x}{4} + 8$

b) $\frac{x}{3} + 2 + \frac{x}{2} = -\frac{2x}{6} + 9$

c) $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 5 + \frac{x}{6}$

d) $-\frac{x}{2} = 5 + \frac{x}{3}$

e) $-\frac{x}{4} - 2 = -3 + \frac{2x}{5}$

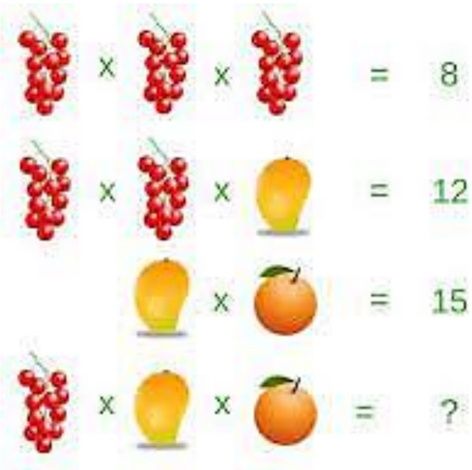
f) $\frac{x}{3} - 2 = -\frac{x}{5} - 1$

g) $\frac{3x}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{x}{6} + \frac{1}{3}$

h) $\frac{2x}{7} - \frac{2}{3} = -\frac{4x}{7} - \frac{1}{3}$

Oppgave 18

Hva blir svaret på likningen?



Tenk deg at du skulle forklare tankemåten din til en som ikke har funnet løsningen. Hvordan ville du ha ordlagt deg?

Oppgave 19

Finn verdien til x

a) $2x^2 - 20 = 30$

b) $3x^2 - 100 = 47$

c) $5x^2 + 25 = 105$

d) $2x^3 + 8 = 24$

e) $2x^2 - x - 8 = -x + 10$

f) $2x^3 + 2x^2 - 175 = -x^3 + 2x^2 + 200$

g) $\frac{x^2}{2} - 15 = 17$

h) $2x^3 + 3x + 9 = 2x^3 + x - 3$

Ulikheter

Dersom vi ønsker å uttrykke at en størrelse er større eller mindre enn en annen størrelse, kan vi gjøre dette ved å bruke **ulikheter**.

For eksempel kan vi skrive at

$3 \cdot 4 > 3 \cdot 3$ eller at $3 \cdot 4 < 3 \cdot 5$

Den første **ulikheten** uttales «$3 \cdot 4$ er større enn $3 \cdot 3$», mens den andre uttales «$3 \cdot 4$ er mindre enn $3 \cdot 5$». Dette er to helt åpenbare **ulikheter**, og vi sier at de er **sanne**.

Vi kan også skrive at

$3x > 3 \cdot 3$ eller at $3x < 3 \cdot 5$

Den første **ulikheten** er **sann** så lenge vi velger x-verdier som gjør at $3x\ er\ større\ enn\ 9$. Den andre **ulikheten** er **sann** så lenge vi velger x-verdier som gjør at $3x\ er\ mindre\ enn\ 15$. Som du kanskje har funnet ut finnes det ikke kun en x-verdi som gjør **ulikhetene sanne**; det finnes faktisk uendelig mange x-verdier som gjør **ulikhetene sanne**!

Vi kan også ønske å uttrykke at en størrelse er større eller lik en annen størrelse. For eksempel må du være minst 18 år for å kjøre opp til førerkort. Matematisk kan dette skrives slik:

$$alder \geq 18\ år$$

Ulikheten uttales «alder er større eller lik 18 år», som er kravet for å kjøre opp til førerkort.

Det samme gjelder dersom en størrelse er mindre eller lik en annen størrelse. For eksempel kan det være plass til maksimalt 5 personer i en heis. Matematisk kan dette skrives slik:

$$antall\ personer\ i\ heisen \leq 5$$

Ulikheten uttales «antall personer i heisen er mindre eller lik 5».

Oppsummering

$x < 3$ betyr at x kan være alle tall som er lavere enn tre
$x \leq 3$ betyr at x kan være alle tall fra og med 3 og lavere

$x > 3$ betyr at x kan være alle tall som er høyere enn tre
$x \geq 3$ betyr at x kan være alle tall fra og med 3 og høyere

Ulikheter i CAS

Vi kan løse **ulikhetene** ved hjelp av **CAS**:

	Eksempel 1	Eksempel 2
Vi skriver ulikheten inn i **CAS**, og trykker «Løs»	1 3x>3*3 → $3x > 9$ 2 $1 Løs: $\{x > 3\}$	1 3x<3*5 → $15 > 3x$ 2 $1 Løs: $\{x < 5\}$
Ulikheten er **sann** dersom:	x er større enn 3	x er mindre enn 5

De fleste som reiser ofte med kollektivtransport velger å kjøpe 30-dagersbillett, men hvor mange reiser må man foreta for at det skal lønne seg å kjøpe 30-dagersbillett istedenfor enkeltbilletter?

For å betale for alle reiser de neste 30 dagene kan man enten betale en fast pris uavhengig av antall reiser, eller betale for hver tur. For at det skal lønne seg å kjøpe 30-dagersbillett må prisen for denne billetten være lavere enn den totale summen for enkeltbilletter. Dette kan skrives slik:

$pris\ for\ 30\text{-}dagersbillett < pris\ for\ enkeltbillett\ \cdot antall\ enkeltbilletter$

På ruter.no kan vi finne både prisen for 30-dagersbillet (398 kr) og for enkeltbilletter (19 kr). Det som imidlertid er ukjent, er hvor mange enkeltbilletter man kjøper de neste 30 dagene. Vi erstatter dette med x:

$Antall\ enkeltbilleter = x$ og får denne **ulikheten**: $398\ kr < 19x$ Vi ønsker å finne x, og skriver: $19x > 398$	1 19x>398 → $19x > 398$ 2 $1 Løs: $\left\{x > \frac{398}{19}\right\}$	Vi løser **ulikheten** i **CAS**, som forteller at $x > \frac{398}{19}$ Vi regner brøken med kalkulator, og får 20,95 som svar.

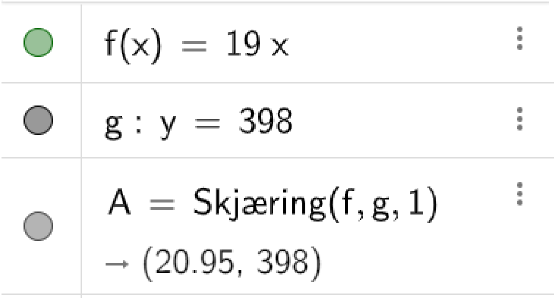
Man bør kjøpe 30-dagersbillett dersom man foretar *mer* enn 20 reiser i løpet av perioden.

Ulikheter i GeoGebra: grafisk løsning av ulikheter

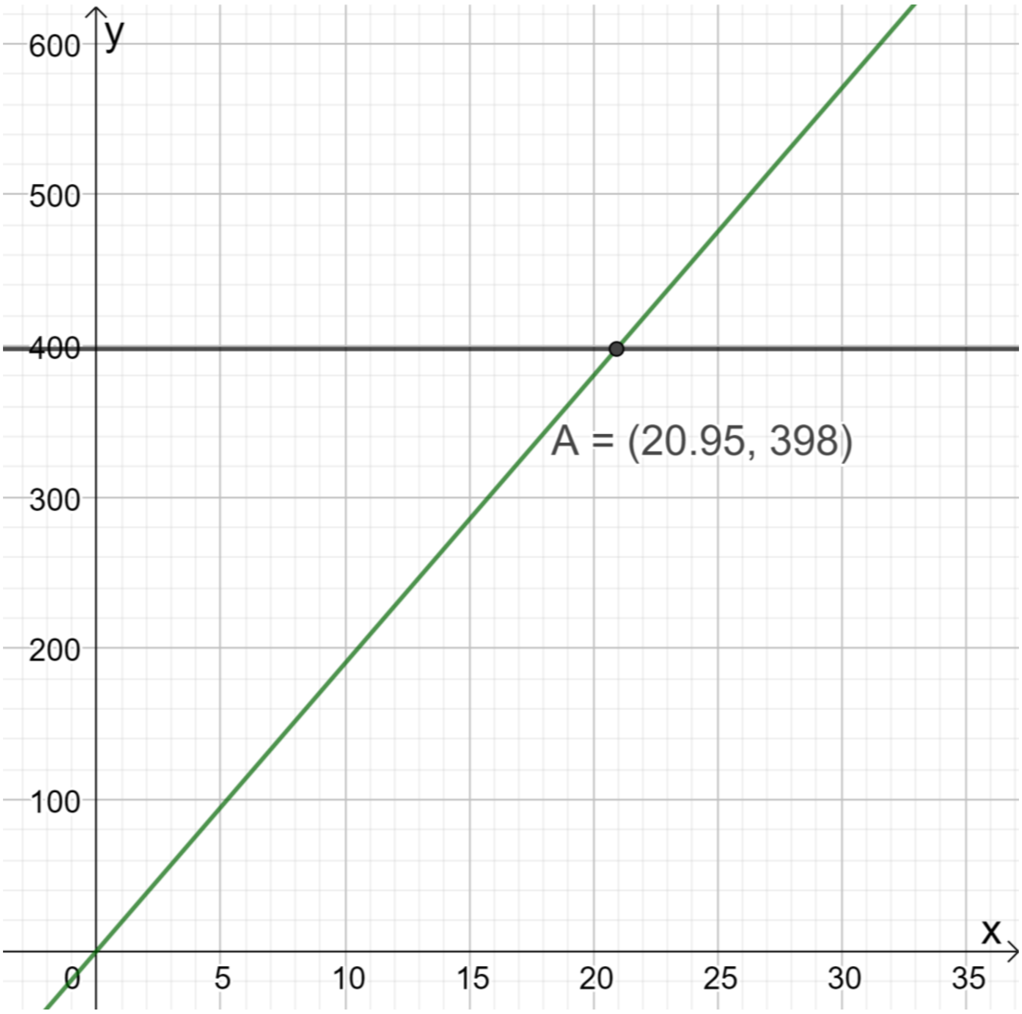
På samme måte som ved likninger, kan ulikheter løses grafisk ved hjelp av **GeoGebra.** For å gjøre dette må vi utføre operasjonene nedenfor:

Operasjon

1. Skriv venstre side av ulikheten i inntastingsfeltet.
2. Skriv $y =$ høyre side av ulikheten i inntastingsfeltet.
3. Finn skjæringspunktet mellom linjene, og les av x-verdien.



Det gir dette skjermbildet:



Løsningen på ulikheten finner vi ved å tolke x-verdien i skjæringspunktet. Her er $x = 20{,}95$, som betyr at man bør kjøpe 30-dagersbillett dersom man foretar *mer* enn 20 reiser i løpet av perioden.

Oppgave 20

Når Jonas blir 18 år er faren hans *mer* enn dobbelt så gammel som ham.

Bruk opplysningene ovenfor til å sette opp en ulikhet. Hva kan du si om alderen til faren til Jonas?

Oppgave 21

Ved skolestart i 2020 begynte 650 elever på Hellerud vgs. Ved skolestart 2021 hadde skolens elevtall økt til over 700.

Bruk opplysningene ovenfor til å sette opp en ulikhet. Hva kan du si om hvor mange flere elever som begynte på Hellerud i 2021 sammenlignet med 2020.

Oppgave 22

En bedrift ønsker å arrangere juleavslutning for sine ansatte, og henter inn tilbud fra ulike arrangører. Bedriften er usikker på hvor mange av de ansatte som ønsker å være med på juleavslutningen.

Nedenfor finner du de to beste tilbudene:

	Tilbud 1	Tilbud 2
Leie av lokalet	10 0000 kr	17 000 kr
Pris per deltaker (x)	800 kr	500 kr

Bruk opplysningene ovenfor til å sette opp en ulikhet. Hvor mange av de ansatte må bli med på avslutningen for at hvert av tilbudene skal være det billigste?

Oppgave 23

Hellerud vgs. ønsker å reise på togtur med elevene på vg2, og de kontakter VY for å få tilbud. Reiseselskapet presenterer to ulike tilbud.

Tilbud 1	Tilbud 2
Fast pris på 8 000 kr for alle reisende	115 kr per reisende

a) Sett opp en ulikhet som kan brukes til å avgjøre hvilket av tilbudene skolen burde velge for at turen skal bli så billig som mulig for skolen, og si noe om hva skolen bør velge.

Anta at elevene skal betale for turen selv

b) Sett opp en ulikhet som kan brukes til å avgjøre hvilket av tilbudene skolen burde velge for at turen skal bli så billig som mulig for hver enkelt elev, og si noe om hva skolen burde velge.

Oppgave 24

Firmaet «Reiselyst» leier ut leiligheter til kunder i utlandet. Kunder som ønsker å leie en leilighet må betale en fast pris per år. I tillegg må de betale for hvert døgn de bruker leiligheten. Kundene kan velge mellom to ulike leieavtaler:

Avtale 1	**Avtale 2**
Fast pris per år: 22 000 kroner	Fast pris per år: 28 000 kroner
Pris per døgn: 1200 kroner	Pris per døgn: 600 kroner

Sett opp en ulikhet som kan brukes til å avgjøre hvilket av tilbudene en kunde burde velge for at leia skal bli lavest mulig, og si noe om hva kundene burde velge.

Oppgave 25

Wenche har en bil, hvor bensintanken rommer 50 liter.

Wenche har to betalingskort som hun kan bruke til å kjøpe drivstoff, og begge betalingskortene gir henne en rabatt når hun bruker dem.

Det ene kortet gir 4 % rabatt på kjøpesummen.

Det andre kortet gir 1 % rabatt på kjøpesummen og i tillegg 50 øre rabatt per liter drivstoff.

Sett opp en ulikhet som kan brukes til å avgjøre hvilket av betalingskortene hun bør bruke avhengig av prisen per liter bensin, og si noe om hva hun burde velge.

Hint: du kan selv velge hvor mange liter Wenche fyller. Skillet mellom kortene går uansett ved den samme prisen per liter bensin.

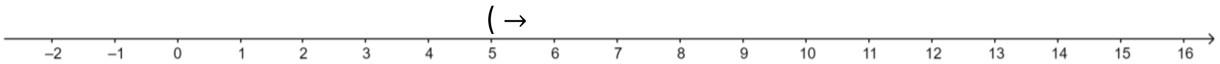
Ulikheter uten digitale hjelpemidler

Når vi skal løse ulikheter bruker vi de samme metodene som beskrevet under delkapittelet «**Likninger uten digitale hjelpemidler**».

Det er imidlertid viktig å være klar over følgende:

Dersom $x > 5$, så vil $-x < -5$.

Hvorfor? Se på tallinjene nedenfor.

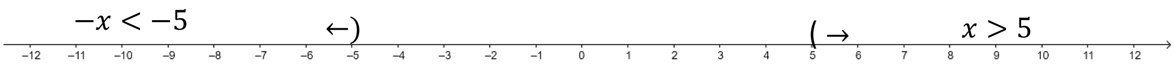


$x > 5$ betyr at x kan være alle tall til høyre for 5 på tallinja

Velg et hvilket som helst tall til høyre for 5 på tallinja, for eksempel 7.
Vi erstatter x med 7 i ulikheten, og skrive at
$7 > 5$

Hva skjer dersom vi forandrer fortegnet til begge tallene i ulikheten? Da får vi tallene -7 og -5, og vi må nå skrive at
$-7 < -5$

Dette vil gjelde uansett hvilket tall vi velger. Vi kan vise dette på tallinjen:



Effekten av dette er at dersom vi endrer fortegnet til x ved å multiplisere eller dividere med et negativt tall, må vi snu ulikhetstegnet. Se eksempelet på nedenfor.

Eksempel på en ulikhet hvor vi må snu ulikhetstegnet:

Løs ulikheten

$$2x + 4 \leq 4x + 10$$

Løsning:

Venstre side		Høyre side	Regning	Metode
$2x + 4$	$\leq$	$4x + 10$	$-4 - 4x$	Flytte/bytte-metoden
$2x - 4x$	$\leq$	$10 - 4$		Regner like ledd
$-2x$	$\leq$	6	$:(-2)$	Divisjonsmetoden
x	$\geq$	-3		

Oppgave 26

Løs ulikhetene

a) $3x + 2 > 8$

b) $-2x + 5 \geq x - 1$

c) $x - 3 < -3x - 1$

d) $2(x - 1) \geq 3(x - 6)$

e) $2x - 5 \geq 4x + 1$

f) $2(x - 3) < 2 + 3(x - 1)$

g) $\frac{2}{3} - \frac{5}{2}x \leq \frac{1}{3} - x$

h) $\frac{5}{3}x - \frac{1}{4} > -\frac{7}{4} + \frac{8}{3}x$

Oppgave 27

Velg noen av oppgavene ovenfor, og løs dem ved hjelp av CAS og GeoGebra.

Oppgave 28

Et taxi-selskap beregner pris for en kjøretur ved hjelp av følgende formel:

$$pris = 15\ kr\ per\ km + 90\ kr\ i\ startpris$$

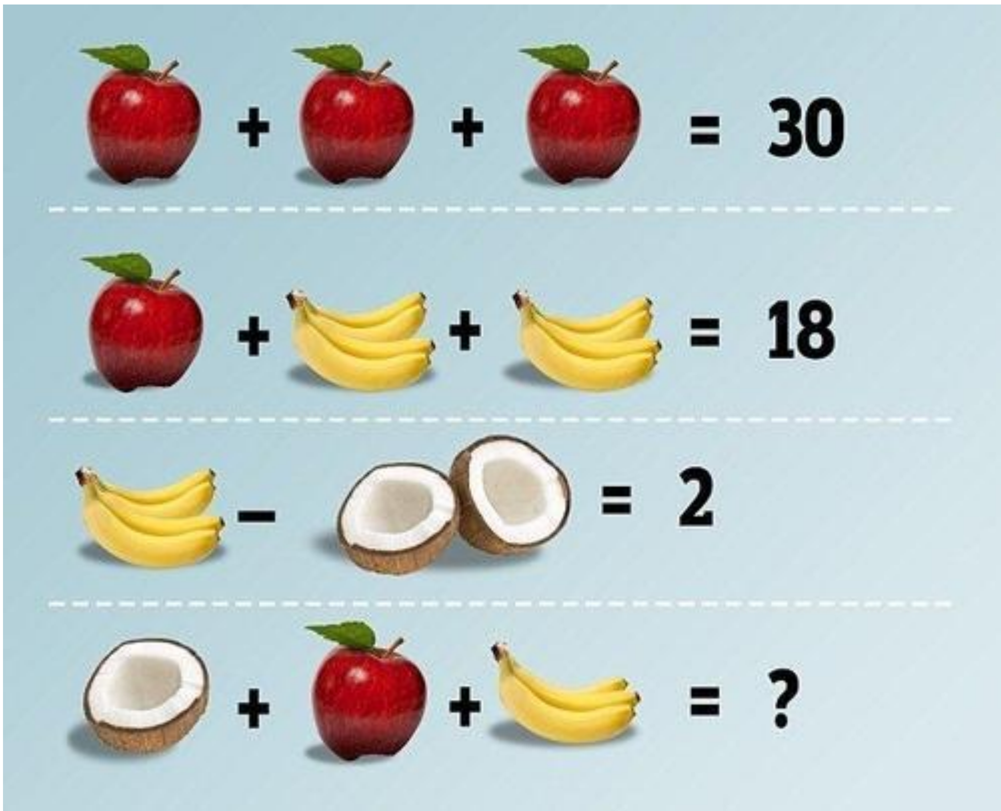
a) Hvor lang kan turen være dersom kunden skal betale mindre enn 211 kroner?
b) Hvor lang må turen være dersom kunden skal betale minst 345 kroner?

Likninger med flere ukjente

På abcnyheter.no kan vi finne en artikkel med denne innledningen:

Mattenøtten ser enkel ut, men får Facebook til å koke

Elisabeth Bergskaug /ABC Nyheter
18. feb. 2016 14:46 – Oppdatert 18. feb. 2016 14:46



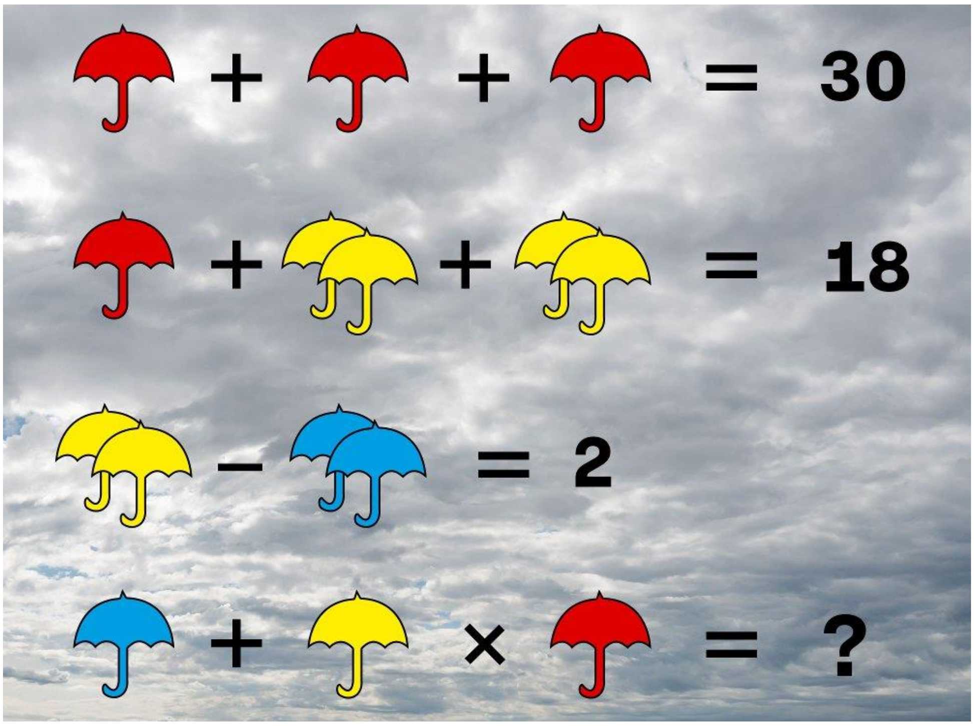
Blir svaret på likningen 14, 15 eller 16? Debatten raser på Facebook. Hva tror du?

Hva mener du er riktig løsning på likningen?

Hvorfor blir det diskusjon rundt svaret på likningen?

Oppgave 29

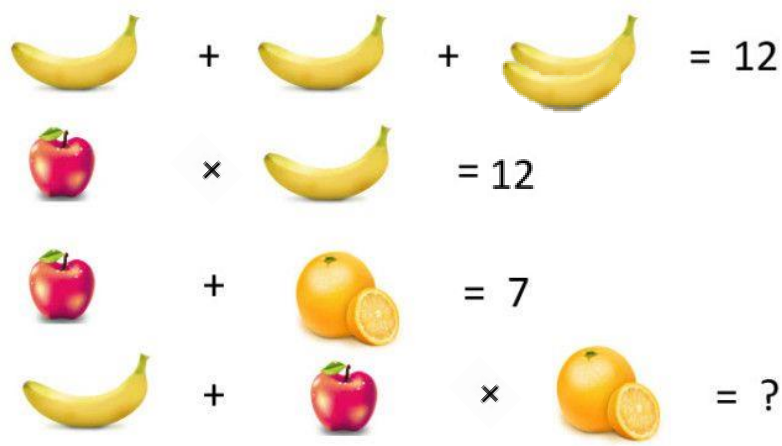
Hva blir svaret på likningen?



Tenk deg at du skulle forklare tankemåten din til en som ikke har funnet løsningen. Hvordan ville du ha ordlagt deg?

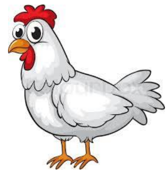
Oppgave 30

Hva blir svaret på likningen?



Tenk deg at du skulle forklare tankemåten din til en som ikke har funnet løsningen. Hvordan ville du ha ordlagt deg?

Oppgave 31

En bondegård har 45 dyr som enten er sauer eller høner.
Dyrene har til sammen 108 bein.
Hvor mange høner og hvor mange sauer er det på gården?
Tenk deg at du skulle forklare tankemåten din til en som ikke har funnet løsningen. Hvordan ville du ha ordlagt deg?

Oppgave 32

På en hamburgerrestaurant kjøper en familie 4 hamburgere og 5 brus, og betaler til sammen 470 kroner.
En annen familie kjøpte 3 hamburgere og to brus, og betalte 321 kroner.
Hvor mye kostet en hamburger?
Tenk deg at du skulle forklare tankemåten din til en som ikke har funnet løsningen. Hvordan ville du ha ordlagt deg?

Oppgave 33

Henrik og Jakob fører treningsdagbok. Etter en uke har Henrik jogget 42 km, mens Jakob har registrert 104 km. I ukene etter løper Henrik 5 km hver dag, mens Jakob roer ned og løper 3 km per dag.
Hvor langt har de jogget den dagen de har løpt like langt?
Tenk deg at du skulle forklare tankemåten din til en som ikke har funnet løsningen. Hvordan ville du ha ordlagt deg?

Oppgave 34

En avisselger har fått inn 590 kr i tikroninger og tjuekroninger. Selgeren har fått 13 flere tikroninger enn tjuekroninger.
Hvor mange tikroninger og hvor mange tjuekroninger har selgeren fått inn?
Tenk deg at du skulle forklare tankemåten din til en som ikke har funnet løsningen. Hvordan ville du ha ordlagt deg?

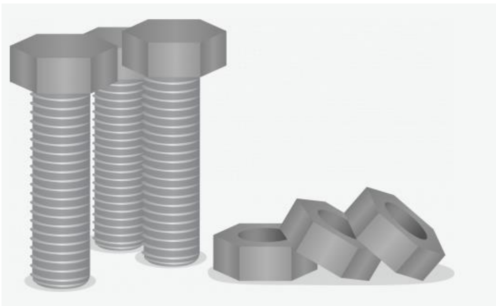
Oppgave 35

I et lokaloppgjør i fotball ble det solgt 246 billetter totalt. Billettprisen for voksne var kr. 70, mens barnebilletten kostet 35 kroner. Billettinntektene ble til sammen 12 425 kroner. Hvor mange voksne og barn hadde kjøpt billett?

Tenk deg at du skulle forklare tankemåten din til en som ikke har funnet løsningen. Hvordan ville du ha ordlagt deg?

Oppgave 36

En jernvarehandel selger poser med skruer og muttere.



Det viser seg at en pose med to skruer og to muttere veier 39,0 gram, mens en annen pose med en skrue og tre muttere veier 28,9 gram.

Hvor mye veier en skrue og hvor mye veier en mutter?

Tenk deg at du skulle forklare tankemåten din til en som ikke har funnet løsningen. Hvordan ville du ha ordlagt deg?

Oppgave 37

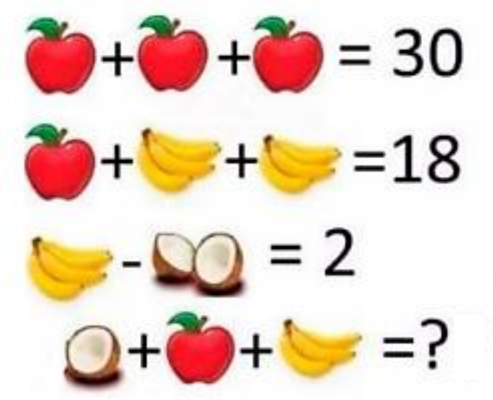
En kaffegrossist har kjøpt inn to typer kaffe; hverdagskaffe og selskapskaffe.

Hvis han blander en del hverdagskaffe med tre deler selskapskaffe, blir prisen 45 kr per kg. Hvis han blander to deler hverdagskaffe med tre deler selskapskaffe, blir prisen 42 kr per kg. Hva er kiloprisen på hverdagskaffe og selskapskaffe i ublandet tilstand?

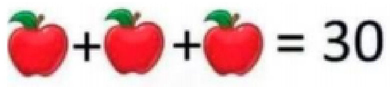
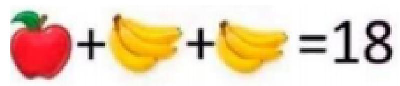
Tenk deg at du skulle forklare tankemåten din til en som ikke har funnet løsningen. Hvordan ville du ha ordlagt deg?

Matematisering av opplysninger

Du har tidligere lært at du kan løse **likninger** ved hjelp av **CAS** dersom du **matematiserer** opplysningene som er gitt i oppgaven.
Da vi løste **likninger** med èn ukjent, valgte vi å la x representere det ukjente. I eksempelet nedenfor skal vi løse en **likning** med tre ukjente. Vi velger derfor å erstatte de ukjente med bokstavene x, y og z.
Hva er svaret på **likningen** nedenfor?



Denne oppgaven kan ha flere løsningsmetoder, alt ettersom hvordan vi tolker informasjonen som er gitt. Derfor er det viktig å være tydelig på hva x, y og z representerer:
$Eple = x$
$Tre\ bananer = y$
$Halv\ kokosnøtt = z$

Informasjon	Matematisering	Løsning i CAS
	$3x = 30$	1: 3x=30 → $3x = 30$
	$x + y + y = 18$	2: x+y+y=18 → $x + 2y = 18$
	$y - 2z = 2$	3: y-2z=2 → $y - 2z = 2$
	$z + x + y = ?$	4: {\$1, \$2, \$3} Løs: $\{\{x = 10, y = 4, z = 1\}\}$

Marker alle radene med opplysninger, i dette tilfellet radene 1 til 3. Trykk deretter på «Løs».
Når vi har funnet **verdien** til alle ukjente, kan vi løse oppgaven:
$z + x + y = 1 + 10 + 4 = 15$
Til diskusjon:
Ville vi fått et annet svar dersom vi valgte at $y = en\ banan$, eller at $z = 2\ kokosnøtter$? Gjør en ny matematisering med disse representasjonene, og regn ut svaret på oppgaven.

Grafisk løsning – to ukjente

Vi kan også løse likninger med to ukjente ved hjelp av GeoGebra. Dersom informasjonen kommer i form av tekst må vi først **matematisere** opplysningene uttrykt ved x og y. Deretter skriver vi inn opplysningene i GeoGebra, som lager to grafer for oss. Løsningen finner vi ved å tolke skjæringspunktet mellom de to grafene.

Eksempel:

En kiosk selger pølser til 30 kroner og is til 20 kroner. En ettermiddag solgte kiosken 85 produkter, og hadde en inntekt på 2 150 kroner.

Utfra disse opplysningene kan vi bruke funksjonsverktøyet i GeoGebra til å finne ut hvor mange pølser og hvor mange is kiosken solgte i løpet av ettermiddagen. Først må vi tydeliggjøre hva x og y skal representere. Deretter må vi **matematisere** opplysningene:

$Antall\ solgte\ pølser = x$
$Antall\ solgte\ is = y$

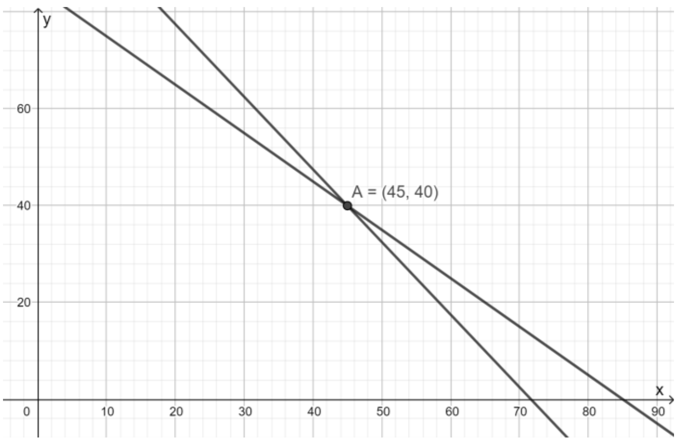
Opplysning I: $x + y = 85$
Opplysning II: $30x + 20y = 2150$

Vi skriver opplysningene inn i GeoGebra:

eq1 : $x + y = 85$

eq2 : $30\,x + 20\,y = 2150$

og får dette skjermbildet:



Skjæringspunkt A forteller oss at antall solgte pølser (x) er 45, mens antall solgte is (y) er 40.

Oppgave 38

Velg minst tre av oppgavene 31 - 37. Matematiser opplysningene, og løs likningssettene digitalt. Prøv både CAS og funksjonsverktøyet i GeoGebra.

Likningssett uten digitale hjelpemidler

Formålet med å løse en likning er å finne den **verdien** for x og den verdien for y som løser begge likningene i likningssettet. På de neste sidene viser vi tre ulike metoder vi kan bruke for å løse likningssett; **innsettingsmetoden**, **addisjonsmetoden**, og **grafisk løsning**. Det er lurt å lære alle metodene, slik at du kan bruke den metoden som passer best når du skal løse et likningssett.

Eksempel:

Løs likningssettet

I: $3x - y = 0$

II: $\mathrm{x - y = 4}$

Legg merke til at vi bruker romertallet I og II for å nummerere **betingelsene**. Dersom du bruker tallene 1 og 2 skjer det fort at disse tallene blandes inn i oppgaven.

Innsettingsmetoden

Denne metoden går ut på å finne et uttrykk for enten x eller y i en av **betingelsene**, og deretter sette dette uttrykket inn for den valgte **variabelen** (x eller y) i den andre **betingelsen**. Vi vil nå ha en likning med kun én ukjent.

Ved å bruke likningsreglene fra delkapittelet «Likninger uten digitale hjelpemidler» vil vi da kunne regne verdien til den andre variabelen, som vi kan sette inn i en av de opprinnelige **betingelsene**. Dette gjør at vi kan regne verdien av den første **variabelen**.

Løs likningssettet ved hjelp av innsettingsmetoden

I: $3x - y = 0$

II: $\mathrm{x - y = 4}$

Løsning:

Bet.	Regning	Forklaring
I:	$3x - y = 0$	Skriver opp begge betingelsene, og nummererer
II:	$\mathrm{x - y = 4}$	dem ved hjelp av romertall
II:	$\mathrm{x = 4 + y}$	Finner et uttrykk for x i betingelse II
I:	$\mathrm{3(4 + y) - y = 0}$	Erstatter x med uttrykket i betingelse I, og løser
	$12 + 3y - y = 0$	likningen med hensyn på y.
	$2y = -12$	
	$y = -6$	Finner at $y = -6$
II:	$x - (-6) = 4$	Erstatter y med (-6) i en av de opprinnelige
	$x + 6 = 4$	betingelsene, og løser likningen med hensyn på x
	$x = 4 - 6$	
	$x = -2$	Finner at $x = -2$

Addisjonsmetoden
Denne metoden går også ut på å finne et uttrykk for enten x eller y i en av **betingelsene**, men på en annen måte enn ved **innsettingsmetoden**. Vi bruker **addisjonsmetoden** når vi på en enkel måte kan forandre en av **betingelsene**, for så legge sammen **betingelsene**. Vi vil nå ha en likning med kun én ukjent.
Ved å bruke likningsreglene fra delkapittelet «Likninger uten digitale hjelpemidler» vil vi da kunne regne verdien til den andre variabelen, som vi kan sette inn i en av de opprinnelige **betingelsene**. Dette gjør at vi kan regne verdien av den første **variabelen**.

Løs likningssettet ved hjelp av addisjonsmetoden:

I: $3x - y = 0$
II: $x - y = 4$

Løsning:

Bet.	Regning		Forklaring
I:	$3x - y = 0$		
II:	$x - y = 4$	$\cdot(-1)$	Multipliserer alle ledd med (-1)
I:	$3x - y = 0$		Legger sammen betingelsene
II:	$\underline{-x + y = -4}$		
	$2x = -4$		Løser likningen med hensyn på x
	$x = -2$		Finner at $x = -2$
II:	$(-2) - y = 4$		Erstatter x med (-2) i en av de opprinnelige betingelsene, og løser likningen med hensyn på y
	$-y = 4 + 2$		
	$-y = 6$		
	$y = -6$		Finner at $y = -6$

Oppgave 39

Løs likningssettene nedenfor. Velg den metoden du syns passer best.

a)	b)	c)	d)
$3x + y = 18$	$2x + y = 10$	$x + y = 1$	$5y - x = 4$
$x + 2y = 11$	$-3x + 2y = -1$	$2y - x = 2$	$x + 4y = 5$

Oppgave 40

Løs likningssettene nedenfor. Velg den metoden du syns passer best.

a)	b)	c)	d)
$\frac{1}{2}x + y = 3$	$-2x - y = 3$	$-x + \frac{1}{2}y = 10$	$-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y = 5$
$-5x - 3y = -2$	$\frac{1}{2}x - y = -\frac{7}{2}$	$2x - 5y = 4$	$\frac{3}{2}x - \frac{5}{2}y = -4$

En eksamensoppgave (del 1)

Løs likningen

$$(x-3)(x+1)x=0$$

En eksamensoppgave (del 2)

Begrunn hvorfor $x^2 > x^3$ når $x < 0$

En eksamensoppgave (del 2)

Fredrik og Cecilie har fått i oppgave å løse ulikheten $x^2 \leq 3x$

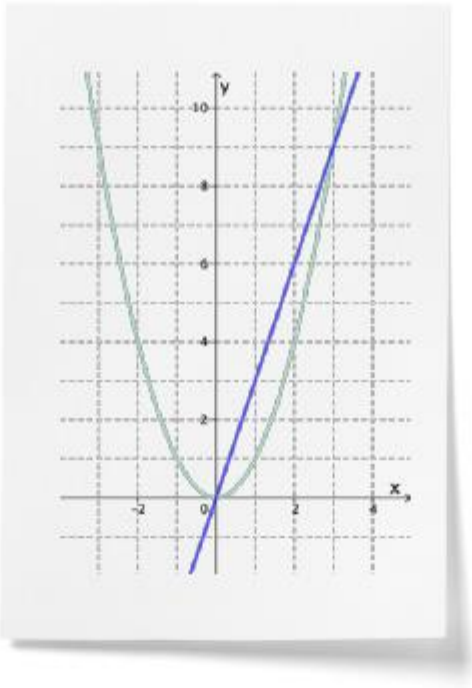
Fredrik har levert denne besvarelsen.

$$x^2 \leq 3x$$

$$\frac{x^2}{x} \leq \frac{3x}{x}$$

$$\underline{x \leq 3}$$

Cecilie har levert denne besvarelsen.



Vurder begge besvarelsene.

Å uttrykke en størrelse ved hjelp av en annen

I noen situasjoner er opplysningene gitt på en slik måte at en **størrelse** beskrives i forhold til en annen **størrelse**. Vi kan få vite at en bror er et bestemt antall år eldre eller yngre enn søsteren sin, at det er dobbelt så mange innbyggere i ett land i forhold til et annet land, eller at inntekten til en husstand er halvparten av inntekten til en annen husstand.
I slike tilfeller kan det være lurt å først velge hvem eller hva vi ønsker skal erstattes av x. Deretter uttrykker vi de andre ukjente i forhold til x. Nedenfor finner du noen eksempler på dette.

Eksempel 1: en bror er 3 år eldre enn sin søster.

> Vi kan *enten* skrive
> $Søsterens\ alder = x$
> $Brorens\ alder = (x + 3)$
>
> *eller* vi kan skrive
> $brorens\ alder = x$
> $søsterens\ alder = (x - 3)$

Eksempel 2: det bor omtrent dobbelt så mange innbyggere i Sverige som i Norge.

> Vi kan *enten* skrive
> $innbyggertall\ Norge = x$
> $innbyggertall\ Sverige = 2x$
>
> *eller* vi kan skrive
> $innbyggertall\ Sverige = x$
> $innbyggertall\ Norge = \frac{x}{2}$

Felles for begge eksemplene er at vi mangler minst en opplysning for å regne ut verdien til x. I situasjoner med to ukjente *må* vi ha minst to opplysninger.

I eksempel 1 kunne vi fått vite alderen til broren eller søsteren, mens vi i eksempel 2 kunne fått vite innbyggertallet i Norge eller Sverige. Imidlertid får vi som regel en annen opplysning; hvor mye de er til sammen.

Eksempel 1: til sammen er søsknene 27 år. Hvor gammel er hver av dem?

Eksempel 2: til sammen bor det 15 millioner mennesker i Norge og Sverige. Hvor mange mennesker bor det i hvert av landene?

På neste side viser vi hvordan vi kan **matematisere** disse opplysningene, og hvordan vi kan bruke **CAS** til å finne svaret på spørsmålet.

	Eksempel 1	Eksempel 2
Opplysning 2:	Til sammen er søsknene 27 år	Til sammen bor det 15 millioner mennesker i Norge og Sverige
Matematisering:	$søster + bror = 27 \text{ år}$ $x + (x + 3) = 27$	$Norge + Sverige = 15\ millioner$ $x + 2x = 15\,000\,000$
Utregning i CAS:	1: x + (x+3)=27 → $2x + 3 = 27$ 2: $1 Løs: $\{x = 12\}$	1: x+2x=15000000 → $3x = 15000000$ 2: $1 Løs: $\{x = 5000000\}$
Løsning	$Søsterens\ alder = x = 12 \text{ år}$ $Brorens\ alder = (x + 3) = 15 \text{ år}$	$Innb.Norge = x = 5\,000\,000$ $Innb.Sverige = 2x = 10\,000\,000$

Oppgave 41

Erik og Petter var på fisketur. Erik fikk dobbelt så mange fisk som Petter. Til sammen fikk de 51 fisker.

Hvor mange fisker fikk hver av dem?

Oppgave 42

På vg2 er det 142 elever. Det er 14 flere jenter enn gutter på trinnet.

Hvor mange elever er det av hvert kjønn på vg2?

Oppgave 43

Lise har 4 ganger så mye penger i banken som lillebroren sin. Til sammen har de 7 500 kr i banken.

Hvor mye har hver av dem på kontoen sin?

Oppgave 44

Bestefaren til Endre er akkurat 6 ganger så gammel som Endre. Til sammen er de 63 år.

Hvor gammel er Endre, og hvor gammel er bestefar?

Oppgave 45

Tre musikkinteresserte brødre samler på gitarer. Til sammen har de 25 gitarer. Den eldste har 3 ganger så mange gitarer som den yngste. Den mellomste har 5 flere gitarer enn den yngste.

Hvor mange gitarer har hver av brødrene?

Oppgave 46

En familie på fire er til sammen 80 år. Far er eldst, og mor er tre år yngre. Den eldste av barna er $\frac{1}{3}$ av alderen til mor, og den yngste er 7 år.

Finn alderen til hvert av familiemedlemmene.

Oppgave 47

Tre barn, Alf, Line og Kari var på blåbærtur i skogen. De hadde hvert sitt spann til å plukke bærene i. I løpet av 6 timer plukket de i alt 17 liter blåbær.

Alf plukket halvparten av det Line plukket. Kari plukket 2 liter mer enn det Line gjorde.

Hvor mange liter blåbær plukket hver av barna?

Oppgave 48

Person A, B og C har tippet sammen, og skal dele premien i forhold til innsatsen hver av personene har betalt.

Person A skal ha halvparten av det person B skal ha. Person C skal ha 3000 kr mindre enn det person B skal ha. Premien var på 46 300 kr.

Regn ut hvor mye hver av personene skal ha av premien.

Oppgave 49

3 russ kjøpte russebil sammen.

Person B betalte en femdel av kjøpesummen. Person A betalte en fjerdedel av kjøpesummen, og person C betalte 13 000 kr.

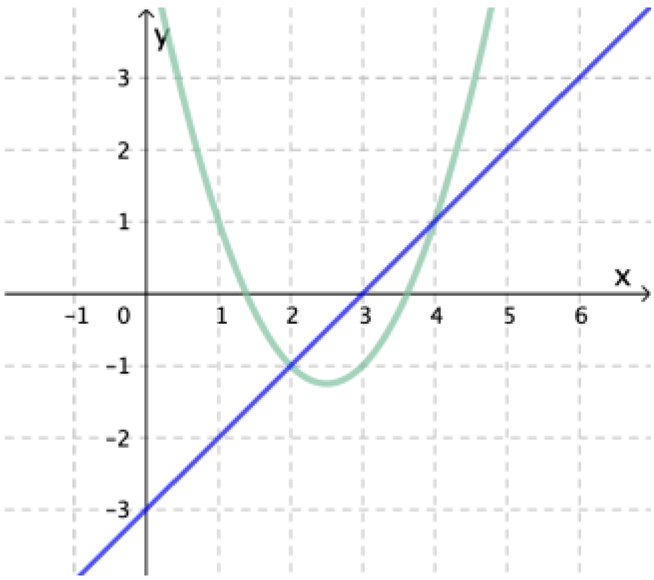
Hvor mye kostet russebilen, og hvor mye betalte person A og person B?

En eksamensoppgave

I koordinatsystemet nedenfor ser du grafene til en andregradsfunksjon f og en lineær funksjon g. Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^2 - 5x + 5$$

Bruk grafene til å sette opp en ulikhet som har løsningen $2 < x < 4$.
Husk å begrunne svaret.



Løsningsforslag

Oppgave	Svar	Oppgave	Svar
1	1 280 kr	**20**	$Fars\ alder > 2 \cdot 18$ Faren til Jonas er mer enn 36 år når Jonas blir 18 år.
2	1 120 kr		
3	3 350 kr		
4	1 250 kr	**21**	$650 + x > 700$ $x > 50$
5	3 000 kr		
6	1 000 kr	**22**	$10\,000 + 800x > 15\,000 + 500x$ Tilbud 1 er billigst opp til 23 deltakere. Ved flere enn 23 deltakere vil tilbud 2 være billigst.
7	118 km		
8	900 min = 15 timer		
9	16 kr		
10	6 timer	**23**	a) $115x > 8\,000$. Det må være flere enn 53 reisende for at skolen skal velge tilbud 1 b) $\frac{8\,000}{x} > 115$. Også her går skillet på 53 reisende. Det må være flere enn 53 reisende for at tilbud 1 skal være billigst.
11	318 sider		
14	a) $x = 4$ b) $x = \frac{3}{2}$ c) $x = 2$ d) $x = 3$ e) $x = 5$ f) $x = 2$ g) $x = \frac{5}{2}$ h) $x = -\frac{2}{3}$		
15	a) $x = 2$ b) $x = -\frac{5}{2}$ c) $x = -6$ d) $x = 7$ e) $x = -6$ f) $x = 1$ g) $x = 3$ h) $x = -\frac{1}{4}$	**24**	$22\,000 + 1\,200x \geq 28\,000 + 600x$ Tilbudene er like gode etter 10 døgn. Ved færre døgn er tilbud 1 best, og ved flere døgn er tilbud 2 best.
16	$\frac{x+4}{2} \cdot 3 - 1 = 14$ $x = 6$		
17	a) $x = 9$ b) $x = 6$ c) $x = -\frac{5}{2}$ d) $x = -10$ e) $x = \frac{20}{13}$ f) $x = \frac{15}{8}$	**25**	Vi velger at hun fyller 30 l bensin: $30x \cdot 0{,}96 \leq 30x \cdot 0{,}99 - 0{,}5 \cdot 30$

	g) $x = \frac{7}{8}$ h) $x = \frac{7}{6}$		$x \geq 16{,}67$ Dersom bensinprisen er lavere enn 16,67 kr bør Wenche bruke kort nr. 1. Ved høyere bensinpris bør hun bruke kort nr. 2.
18	$? = 30$		
19	a) $x = \pm 5$ b) $x = \pm 7$ c) $x = \pm 4$ d) $x = 2$ e) $x = \pm 3$ f) $x = 5$ g) $x = \pm 8$ h) $x = -5$		
26	a) $x > 2$ b) $x \leq \frac{4}{3}$ c) $x < \frac{1}{2}$ d) $x \leq 16$ e) $x \leq -3$ f) $x > -5$ g) $x \geq \frac{2}{9}$ h) $x < \frac{3}{2}$	**40**	a) $x = -2,\ y = 4$ b) $x = -\frac{13}{5},\ y = \frac{11}{5}$ c) $x = -13,\ y = -6$ d) $x = \frac{13}{2},\ y = \frac{11}{2}$
28	a) $Turen < 7{,}4\ km$ b) $Turen > 17\ km$	**41**	Petter fikk 17 fisk, Erik fikk 34 fisk
29	21	**42**	64 gutter, 78 jenter
30	15	**43**	Lillebror: 1 500 kr, Lise: 6 000 kr
31	9 sauer og 36 høner	**44**	Endre: 9 år, bestefar: 54 år
32	Hamburger: 95 kr, brus: 18 kr.	**45**	Yngste: 4 gitarer, mellomste: 9 gitarer eldste: 12 gitarer
33	36 dager		
34	11 tikroninger og 24 tjuekroninger	**46**	Yngste barn: 7 år, eldste barn: 10 år mor: 30 år, far: 33 år
35	137 barnebilletter og 109 voksenbilletter		
36	Skrue: 14,8 g, mutter: 4,7 g	**47**	Line: 6 l, Alf: 3 l, Kari: 8 l
37	Hverdagskaffe: 30 kr/kg Selskapskaffe: 50 kr/kg	**48**	A: 9 800 kr, B: 19 600 kr, C: 16 600 kr
39	a) $x = 5,\ y = 3$ b) $x = 3,\ y = 4$ c) $x = 0,\ y = 1$ b) $x = 1,\ y = 1$	**49**	Bilen kostet 20 000 kr. Person A betalte 5 000 kr, person B betalte 4 000 kr.

Eksamensoppgave side 35

For å løse oppgaven enklest mulig må vi betrakte hver av parentesene som et tall. For eksempel betyr parentesen $(x-3)$ et tall som er 3 lavere enn x. Dette betyr at likningen består av 3 tall som multiplisert med hverandre skal gi 0 som svar, og det vil kun skje dersom minst ett av tallene er 0.

For at $(x-3)$ skal være 0 må x ha verdien 3.
For at $(x+1)$ skal være 0 må x ha verdien -1.
I tillegg vil også $x=0$ gjøre at svaret blir 0.

Likningen har 3 løsninger: $3, (-1)\ og\ 0$.

Eksamensoppgave side 135

x^2 vil alltid ha positiv verdi, mens verdien til x^3 vil ha samme fortegn som x.Dersom x har negativ verdi vil x^3 også ha negativ verdi.

Dersom x har negativ verdi vil x^2 ha positiv verdi, mens x^3 vil ha negativ verdi.

Derfor vil x^2 være større enn x^3 når x er mindre enn 0.

Eksamensoppgave side 35

For at ulikheten skal være sann må x ligge i intervallet $[0{,}3]$, altså fra og med 0 og til og med 3.

Fredrik har kun funnet en del av løsningen. Han har kun funnet at x må være mindre eller lik 3. Dersom x har negativ verdi vil ulikheten ikke være sann. Dette fordi x^2 alltid vil være positiv, mens $3x$ vil ha samme fortegn som x. Dette betyr at x^2 vil være større enn $3x$ når x er negativ.

Cecilie har riktig start på løsningen ved å skrive inn de to uttrykkene på hver side av ulikhetstegnet. Hun har imidlertid ikke funnet skjæringspunktene mellom de to uttrykkene, og har derfor ikke besvart oppgaven.

Eksamensoppgave side 39

I området $2 < x < 4$, er funksjonsverdiene til andregradsfunksjonen f, mindre enn funksjonsverdiene til den lineære funksjonen g.

Ulikheten som har denne løsningen kan uttrykkes på flere måter:

$f(x) < g(x)$

$x^2 - 5x + 5 < x - 3$

$x^2 - 6x + 8 < 0$

$(x-2)(x-4) < 0$

Prosent

Målet for opplæringen er at eleven skal kunne:

- Forklare og bruke prosent og prosentpoeng til modellering av praktiske situasjoner med digitale verktøy
- Analysere og presentere funn i datasett fra lokalsamfunn og media

Hva er prosent?

Ordet **prosent** har latinsk opprinnelse, og er satt sammen av ordene **pro** (av) og **cent** (hundre). **Prosent** betyr derfor «av hundre», men det kan også leses som «hundredel».

Finne prosenten

Prosent er nyttig å bruke både når vi ønsker å beskrive hvor mye en **del** utgjør av en **helhet**, og når vi ønsker å sammenligne **andeler** av **helheter** med ulik størrelse.

Vi regner ut **prosenten** med følgende regnemetode:

$$\boldsymbol{prosenten} = \frac{verdien\ av\ \boldsymbol{delen}}{verdien\ av\ \boldsymbol{helheten}} \cdot 100\ \%$$

Vi bruker **prosent** når vi ønsker å beskrive:

- hvor mye strøm vi har på telefonen
- hvor mye prisen på klær er redusert når butikkene har salg
- hvor stor andel del av Oslos befolkning som bor i Groruddalen
- hvor stor oppslutning partiene får ved Stortingsvalget
- hvor stor del av verdens verdier Norge eier gjennom Oljefondet

og i mange andre situasjoner.

Tenk deg følgende eksempel. En lærer ønsker å undersøke hvilken ungdomsskole elevene i klassen kommer fra, og lager denne oversikten:

Ungdomsskole	**Antall**	**Andel**	
		(Forholdstall)	**(Forholdstall $\cdot$ 100 %)**
Haugerud	8	$\frac{8}{30} = 0{,}27$	$0{,}27 \cdot 100\ \% = 27\ \%$
Lindeberg	7	$\frac{7}{30} = 0{,}23$	$0{,}23 \cdot 100\ \% = 23\ \%$
Granstangen	10	$\frac{10}{30} = 0{,}33$	$0{,}33 \cdot 100\ \% = 33\ \%$
Andre	5	$\frac{5}{30} = 0{,}17$	$0{,}17 \cdot 100\ \% = 17\ \%$
Sum	**30**	$\frac{\mathbf{30}}{\mathbf{30}} = \mathbf{1{,}0}$	$1{,}0 \cdot 100\ \% = 100\ \%$

Oppgave 1

Gjør tilsvarende undersøkelse for klassen din.

Hvordan er fordelingen i klassen din sammenlignet med hele skolen?

Oppgave 2

Som du ser i eksempelet på forrige side, kan vi beskrive en **andel** på tre ulike måter:

BRØK <-> DESIMAL <-> PROSENT

I oppgavene nedenfor får du trening i å regne mellom disse ulike representasjonsmåtene.

Fyll ut tabellen. Klarer du noen av oppgavene uten kalkulator?

Brøk	Desimal	Prosent		Brøk	Desimal	Prosent
$\frac{28}{100}$				$\frac{37}{56}$		
	0,48			$\frac{85}{127}$		
	0,61			$\frac{21}{18}$		
	0,7				0,8	
$\frac{5}{100}$					0,9	
		37 %				7 %
		8 %				113 %

Kan du lage en regel på hvordan du regner mellom **desimaltall** og **prosenttall**?

Oppgave 3

I en klasse er det 13 gutter og 15 jenter.

a) Hvor mange prosent av elevene i klassen er jenter?
b) Hvor mange prosent av elevene i klassen er gutter?

Oppgave 4

I mange butikker finner du følgende tilbud:

Kjøp 4

Betal for 3!

Hvor mange prosent får du i rabatt dersom du benytter deg av dette tilbudet?

Oppgave 5

I mange butikker finner du følgende tilbud:

Kjøp 3

Betal for 2!

Hvor mange prosent får du i rabatt dersom du benytter deg av dette tilbudet?

Oppgave 6

Meny har følgende priser på rundstykker:

Antall:	Pris:
1	10 kr
2	20 kr
3	25 kr

a) Hvor mange prosent rabatt får du på det tredje rundstykket?
b) Hvor mange prosent rabatt får du til sammen dersom du kjøper 3 rundstykker?

Oppgave 7

Det er vanlig å dele de politiske partiene i 3 hovedbolker: venstresiden, sentrum og høyresiden.

I et valgdistrikt fordelte stemmene seg slik:

- $\frac{3}{7}$ av stemmene gikk til partier på venstresiden
- En andel på $0{,}2$ av stemmene gikk til partier i sentrum
- Resten av stemmene gikk til partier på høyresiden

Hvor mange prosent av stemmene gikk til partier på høyresiden?

En eksamensoppgave

I en eske ligger det røde, grønne og gule kuler.

$\frac{3}{5}$ av kulene er røde, og $\frac{1}{10}$ av kulene er grønne.

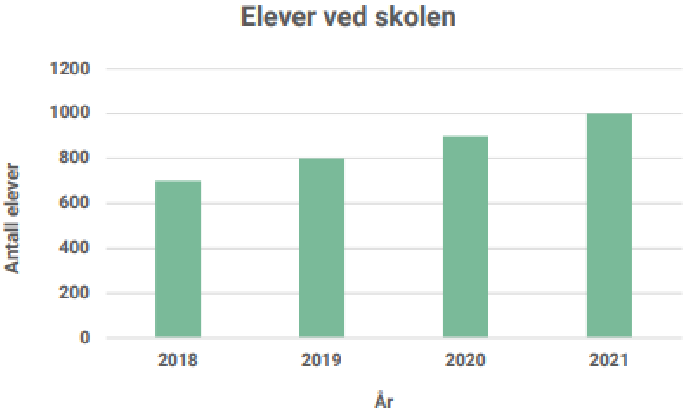
Hvor mange prosent av kulene er gule?

En eksamensoppgave

En gullring er stemplet med 585.
Det betyr at 585 tusendeler av ringen er gull.

Hvor mange prosent av ringen er gull?

En eksamensoppgave



Diagrammet viser antall elever ved en videregående skole de fire siste årene.

Når var det størst prosentvis økning i antall elever fra et år til det neste?

En eksamensoppgave

En flaske dusjsåpe koster det samme i fire butikker.

De fire butikkene bestemmer seg for å sette ned prisen.
Dette gjør de på hver sin måte. Se nedenfor.

Butikk A

Tilbud
dusjsåpe

Ta 3 flasker, og betal for 2 av dem.

Butikk B

Tilbud
dusjsåpe

30 % rabatt

Butikk C

Tilbud
dusjsåpe

Betal full pris for én flaske,
og få 75 % rabatt på den neste.

Butikk D

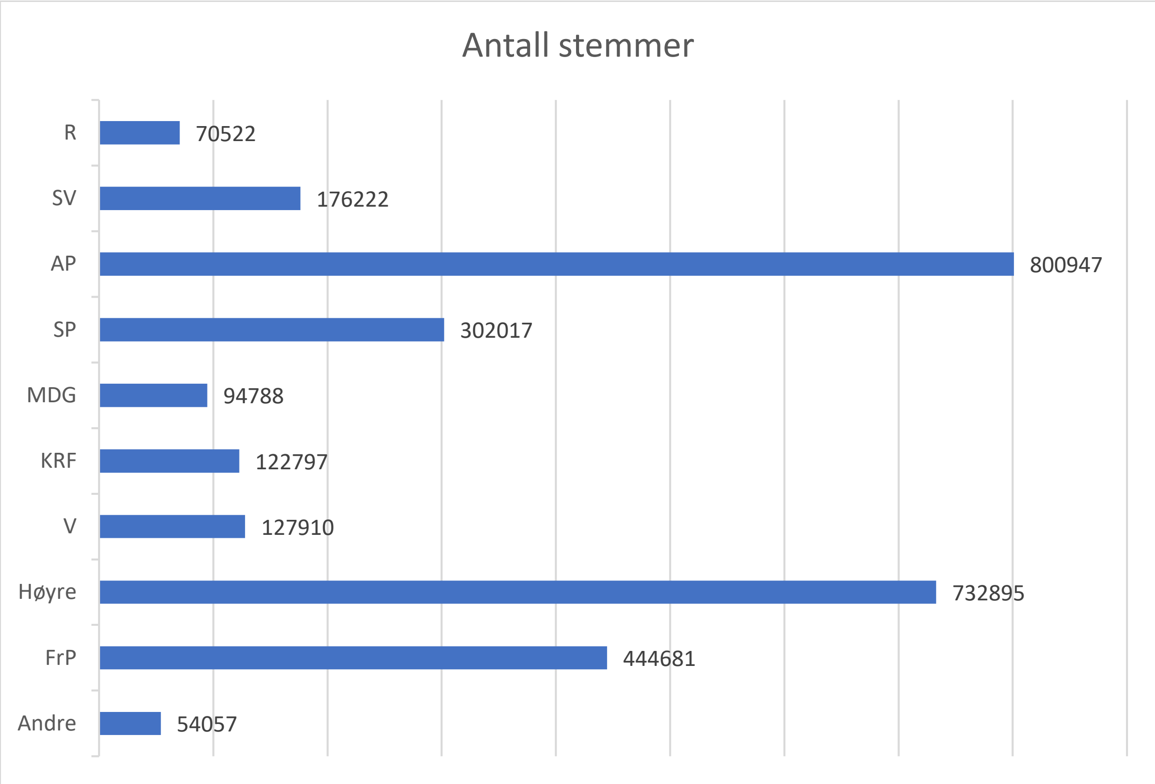
Tilbud
dusjsåpe

Betal full pris for 3 flasker,
og få i tillegg 2 gratis.

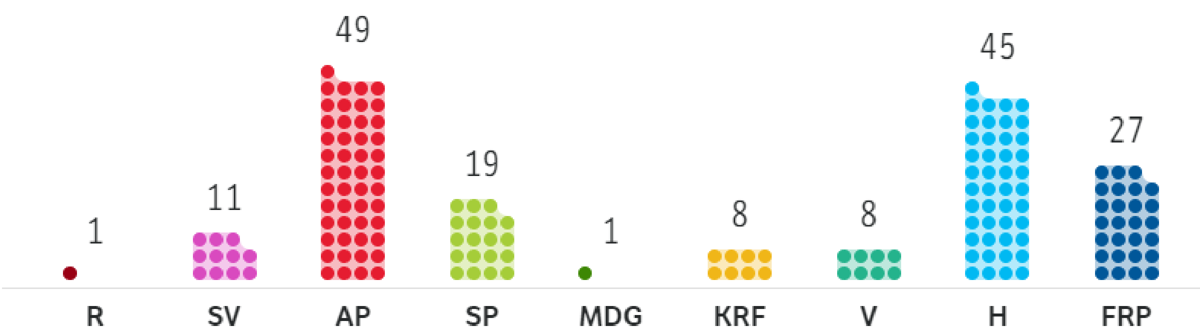
Gjør beregninger, og sett opp en oversikt hvor du sorterer tilbudene etter hvor gode de er.

Presentasjonsoppgave

Ved Stortingsvalget i 2017 ble det totalt avgitt 2 926 836 stemmer. Nedenfor finner du resultatet for partiene som oppnådde minst 1 representant på Stortinget (en slik representant kalles en mandat).



Fordelingen av mandater på Stortinget ble slik:



Bruk resultatene ovenfor til å si noe om valgresultatet.

Bruke prosenten

Dersom vi vet hvor stor **prosent** en **del** er av en **helhet**, kan vi regne verdien til **delen** ved hjelp av følgende **regnemetode**:

$$\boldsymbol{Verdien\ til\ helheten \cdot prosenten = verdien\ til\ delen}$$

I oppgave 2 trente du på å gjøre **prosent** om til **desimaltall**. Dersom vi bruker **desimaltallet** i utregningen istedenfor **prosenten**, bruker vi ordet **prosentfaktor** om **desimaltallet**. Da får vi følgende **regnemetode**:

$$\boldsymbol{Verdien\ til\ helheten \cdot prosentfaktoren = verdien\ til\ delen}$$

I starten av skoleåret 2022/2023 vil 720 elever begynne på Hellerud vgs. **Andelen** av Helleruds elever som kommer fra Granstangen er omtrent 18 %.

Ved hjelp av **formlene** ovenfor kan vi regne ut hvor mange av Helleruds elever som kommer fra Granstangen.

Prosenten
$Antall\ elever\ fra\ Granstangen = 720\ elever \cdot 18\ \% = 129{,}6\ elever \approx 130\ elever$

Prosentfaktoren
$Antall\ elever\ fra\ Granstangen = 720\ elever \cdot 0{,}18 = 129{,}6\ elever \approx 130\ elever$

Du velger selv hvilken metode du ønsker å bruke. Det er imidlertid greit å vite hvilke metoder du kan bruke på de ulike digitale hjelpemidlene:

Digitale hjelpemidler	Prosentfaktoren	Prosenten
ExCel	✓	✓
GeoGebra	✓	✓
CAS	✓	✓
Kalkulator	✓	Ikke alle

Oppgave 8

Regn oppgavene nedenfor ved hjelp av kalkulator. Du velger selv om du ønsker å bruke **prosenten** eller **prosentfaktoren**, men prøv gjerne begge metodene.

a) 35 % av 400	b) 28 % av 1 200	c) 40 % av 35 600
d) 8 % av 92 400	e) 6,4 % av 7 600	f) 0,8 % av 159 200

Oppgave 9

Espen sparer 12 % av lønna si for å bruke på en lengre reise. Han han 15 000 kr i månedslønn.

Hvor mye sparer han hver måned?

Oppgave 10

Mari får 25 % ekstra i timelønn når hun arbeider etter kl. 16 på hverdager, og 75 % ekstra i timelønn når hun arbeider på lørdager. Hennes ordinære timelønn er 160 kr.

a) Hvor høyt er tillegget hennes etter kl. 16 på hverdager?
b) Hvor høyt er tillegget hennes på lørdager?

Oppgave 11

Et eiendomsfirma tar 5 % av salgsprisen ved salg av en bolig. Av dette får eiendomsmegleren 4% i lønn.

Hvor mye får eiendomsmegleren i lønn dersom hen selger en bolig til 2 000 000 kr?

Oppgave 12

En klesbutikk ville selge unna beholdningen av sommerkolleksjonen, og alle varene skal selges med 30 % rabatt.

	A	B	C
1	Vare	Pris	Rabatt
2	Ankelsokker	kr 59	
3	Bluse	kr 99	
4	Caps	kr 149	
5	Kort kjole	kr 199	
6	Lang kjole	kr 299	
7	Linskjorte	kr 249	
8	Pique-skjorte	kr 299	
9	Sandaler	kr 269	
10	Shorts	kr 399	
11	Skjørt	kr 159	
12	Solbriller	kr 499	
13	Solkrem	kr 169	
14	T-skjorte	kr 99	
15	Vannflaske	kr 149	

Lag et regneark som vist til ovenfor som kan brukes til å regne rabatten på hver enkelt vare. I de grønne rutene skal du skrive formler.

En eksamensoppgave

Angelica har laget blåbærsaft. Saften inneholder 10 % sukker. Angelica synes saften er sur og vil lage en ny saftblanding med 50 % mer sukker.

Hvor mange prosent sukker vil den nye saftblandingen inneholde?

Oppgave 13

En klesbutikk ville selge unna beholdningen av sommerkolleksjonen, og alle varene skal selges med 30 % rabatt.

	A	B		C
1	Rabatt		30 %	
2	Vare	Pris		Rabatt
3	Ankelsokker	kr	59	
4	Bluse	kr	99	
5	Caps	kr	149	
6	Kort kjole	kr	199	
7	Lang kjole	kr	299	
8	Linskjorte	kr	249	
9	Pique-skjorte	kr	299	
10	Sandaler	kr	269	
11	Shorts	kr	399	
12	Skjørt	kr	159	
13	Solbriller	kr	499	
14	Solkrem	kr	169	
15	T-skjorte	kr	99	
16	Vannflaske	kr	149	

Lag et regneark som vist til venstre som kan brukes til å regne rabatten på hver enkelt vare.

I rute C3 skal du skrive en formel som kan kopieres helt ned til rute C16.

En eksamensoppgave

For å reise til flyplassen kan Herman ta flybussen eller bybanen.
Flybussen koster 100 kroner, og bybanen koster 40 kroner.

a) Hvor mange prosent billigere er bybanen sammenlignet med flybussen?

b) Hvor mange prosent dyrere er flybussen sammenlignet med bybanen?

En eksamensoppgave

	A	B	C	D	E	F
1	**Lunsj på nett**					
2				Rabatt ved kjøp av flere enn fire retter		10 %
3	**Kunde**			Levering ved kortere avstander enn 8 km		kr 70,00
4				Levering ved avstand som er 8 km eller lengre		kr 150,00
5						
6	**Lunsj**					
7		Antall porsjoner	Pris per porsjon	Totalt		
8	Dagens pasta		kr 100,00			
9	Dagens suppe		kr 80,00			
10	Dagens bagett		kr 110,00			
11						
12	Sum					
13						
14						
15			Rabatt (kroner)			
16						
17	**Levering**					
18						
19	Antall km			Pris for levering		
20						
21						
22	Å betale totalt					

«Lunsj på nett» er et firma som lager og leverer ferdige lunsjretter.

Kundene kan velge mellom tre retter:

- Dagens pasta koster 100 kroner
- Dagen suppe koster 80 kroner
- Dagens bagett koster 110 kroner

«Lunsj på nett» gir 10 % rabatt til kunder som bestiller flere enn fire lunsjretter.

Levering koster 70 kroner for avstander som er kortere enn 8 km.
For lengre avstander er prisen 150 kroner

Lag et regneark som «Lunsj på nett» kan bruke for å registrere en bestilling.
Når bestillingen er registrert, skal regnearket beregne hvor mye kunden skal betale.

I de hvite cellene skal «Lunsj på nett» registrere opplysninger når de tar imot en bestilling. I de grønne cellene skal du lage formler.

Sammenligne prosenter – prosentpoeng

Hvilken av disse påstandene er riktige, og hva må forandres i den gale påstanden for at den skal bli riktig?

☐	60 % er 20 % mer enn 40 %
☐	60 % er 50 % mer enn 40 %

Den riktige påstanden er påstand nummer to; 60 % er 50 % mer enn 40 %.

For at den første påstanden skal være riktig, må den skrives slik:
60 % er 20 **prosentpoeng** mer enn 40 %.

Dersom vi ønsker å beskrive **forskjellen** mellom to **prosenter**, bruker vi begrepet **prosentpoeng**.

Prosentpoeng = den ene **prosenten** – den andre **prosenten**

En familie med el-bil skal på kjøretur. Ved oppstart viser måleren at batteriet er 80 % fulladet. Etter en times kjøring har batterinivået sunket til 60 %. Dette betyr at batterinivået har sunket med:

- $80 - 60 = 20$ **prosentpoeng**.
- $\frac{20}{80} = 0{,}25 = 25$ **prosent**

Oppgave 14

Batterinivået på en telefon var på 36 %. Etter en stund hadde nivået sunket til 28 %.

Beskriv nedgangen både i **prosentpoeng** og **prosent**.

Oppgave 15

Ved Stortingsvalget 2017 oppnådde MDG en oppslutning på 3,2 %. Det er viktig for et parti å komme over sperregrensa på 4 %.

a) Med hvor mange **prosentpoeng** må oppslutningen til MDG øke for å oppnå dette?
b) Med hvor mange **prosent** må oppslutningen til MDG øke for å oppnå dette?

En eksamensoppgave

Renta på et lån steg fra 2,0 % til 2,2 %.

a) Hvor mange prosentpoeng steg renta med?
b) Hvor mange prosent steg renta med?

Presentasjonsoppgave

I regnearket nedenfor finner du informasjon om resultatet ved Stortingsvalget i 2013 og i 2017.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	År	Stemmeberettigede	Antall avgitte stemmer	Valgdeltakelse %				
2	2013	3641994	2848903					
3	2017	3762746	2926836					
4								
5								
6		2013		2017		Endring fra 2013 til 2017		
7	Parti	Andel	Antall stemmer	Andel	Antall stemmer	Antall stemmer	Prosentpoeng	Prosent
8	R	1,1 %		2,4 %				
9	SV	4,1 %		6,0 %				
10	AP	30,8 %		27,4 %				
11	SP	5,5 %		10,3 %				
12	MDG	2,8 %		3,2 %				
13	KRF	5,6 %		4,2 %				
14	V	5,2 %		4,4 %				
15	Høyre	26,8 %		25,0 %				
16	FrP	16,3 %		15,2 %				
17	Andre	1,8 %		1,9 %				
18	Sum							

Lag et regneark som vist ovenfor. I de grønne rutene skal du lage formler.

Bruk regnearket til å finne:

- Antall stemmer hvert parti oppnådde ved hvert av valgene.
- Hvert partis **prosentvise** oppslutning ved hvert av valgene.
- Valgdeltakelse i **prosent**
- Endringen i valgresultatene i 2013 og 2017 for alle partiene. Endringen skal vises både i antall stemmer, **prosentpoeng** og **prosent.**

Lag en presentasjon med fokus på endringene mellom Stortingsvalget i 2013 og 2017. I presentasjonen bør du ha med:

- Kommentarer om interessante funn
- Diagrammer som viser både resultat og endringer

Eksponentiell utvikling: $y = a \cdot b^x$

Dersom y **endres** *fra* et startpunkt *med* en fast **prosent** for hver gang x øker med 1, sier vi at **utviklingen** er **eksponentiell**. Både startpunktet og den faste prosenten har en praktisk betydning, og du vil bli bedt om å kommentere begge.

For å kunne forstå **eksponentielle modeller**, må du først arbeide med **vekstfaktor**.

Prosentvis endring – vekstfaktor

Det er vanlig at prisen på de fleste varer og tjenester øker for hvert år. Siden varer og tjenester med høy pris vil øke med et høyere kronebeløp enn varer og tjenester med lav pris, er det vanlig å beskrive prisveksten med et **prosenttall**.

Vi anser den **opprinnelige** prisen på hver enkelt vare til å være 100 %. I 2021 er den antatte prisveksten på 2,6 %. Det betyr at i gjennomsnitt blir alle varer og tjenester 2,6 % dyrere enn de var ved inngangen til 2021.

Dette betyr at ved utgangen av 2021 har prisen på varer og tjenester steget til 102,6 % i forhold til prisen ved inngangen til 2021. Dette kaller vi **ny verdi i prosent**.

Endringen i prosent kan også være negativ. Som en følge av koronapandemien sank antall pasienter med døgnopphold på norske sykehus med 7 % i 2020, ifølge SSB.

Vi anser det **opprinnelige** antall pasienter med døgnopphold til å være 100 %. Med en nedgang på 7 %, vil **ny verdi i prosent** være 93 %. Det betyr at antall pasienter med døgnopphold i 2020 var 93 % i forhold til antall pasienter med døgnopphold i 2019.

Finne vekstfaktoren

$$100\ \% \pm \boldsymbol{endring\ i}\ \% = \boldsymbol{ny\ verdi\ i}\ \%$$

I forrige kapittel lærte du å gjøre **prosenttallet** om til et **desimaltall**. Det er dette **desimaltallet** vi kaller **vekstfaktor**

$$\frac{\boldsymbol{ny\ verdi\ i}\ \%}{100\ \%} = \boldsymbol{vekstfaktor}$$

Oppgave 16

Fyll ut tabellen nedenfor. Ta utgangspunkt i at **opprinnelig verdi** er 100 %.

-7 %	=	93 %	=	0,93		=		=	0,978
+ 7 %	=	107 %	=	1,07	+ 0,4 %	=		=	
- 7,5 %	=		=		- 17,5 %	=		=	
+ 12,3%	=		=			=	300 %	=	
+ 20 %	=		=			=		=	3,5
- 10 %	=		=		- 100 %	=		=	
	=		=	0,87	- 1,2 %	=		=	
	=	140 %	=			=		=	1,007
+ 100 %	=		=			=	100,2 %	=	
	=	70 %	=		- 25 %	=		=	

Oppgave 17

Beskriv sammenhengen mellom vekstfaktor og prosentvis endring med dine egne ord:

Bruke vekstfaktoren

Dersom vi får opplyst **startverdi** og **endringen i prosent**, kan vi regne **ny verdi** ved hjelp av følgende **regnemetode**:

$$\boldsymbol{Startverdi \cdot ny\ verdi\ i\ \% = ny\ verdi}$$

I oppgave 13 trente du på å gjøre **prosent** om til **desimaltall**. Dersom vi bruker **desimaltallet** i utregningen istedenfor **prosenten**, bruker vi ordet **vekstfaktor** om **desimaltallet**. Da får vi følgende **regnemetode**:

$$\boldsymbol{Startverdi \cdot vekstfaktor = ny\ verdi}$$

Anta at en vare i 2020 kostet 143 kroner, og at prisen steg med 2,6 % i løpet av 2021. For å finne prisen i 2021 kan vi enten multiplisere med **ny verdi i prosent**:

$Pris\ 2021 = 143kr \cdot 102{,}6\ \% \approx 147\ kr$

eller ved å multiplisere med **vekstfaktoren**:

$Pris\ 2021 = 143kr \cdot 1{,}026 \approx 147\ kr$

I 2019 ble det registrert omtrent 750 000 pasienter med døgnopphold på norske sykehus. I 2020 var dette antallet 7 % lavere. For å finne antall pasienter med døgnopphold i 2021 kan vi enten multiplisere med **ny verdi i prosent**:

$Antall\ pasienter\ med\ døgnopphold\ 2020 = 750\ 000 \cdot 93\ \% = 697\ 500$

eller ved å multiplisere med **vekstfaktoren**:

$Antall\ pasienter\ med\ døgnopphold\ 2020 = 750\ 000 \cdot 0{,}93 = 697\ 500$

Du velger selv hvilken metode du ønsker å bruke. Det er imidlertid greit å vite hvilke metoder du kan bruke på de ulike digitale hjelpemidlene:

Digitale hjelpemidler	**Vekstfaktoren**	**Ny verdi i %**
ExCel	✓	✓
GeoGebra	✓	✓
CAS	✓	✓
Kalkulator	✓	Ikke alle

Løs noen av oppgavene nedenfor ved hjelp av ExCel og CAS.

Oppgave 18

I 2018 ble en leilighet kjøpt for 2 450 000 kr. I 2021 hadde verdien av leiligheten steget med 15 %. Hvor høy er verdien av leiligheten i 2021?

Oppgave 19

Nypris på en moped var 12 000 kr. Etter ett år hadde verdien sunket med 20 %. Hva var verdien på mopeden etter ett år?

Oppgave 20

Hanne har en timelønn på 160 kr. Hun blir lovet en lønnsøkning på 4,3 %. Hva blir den nye timelønna hennes?

Oppgave 21

Prisen på en aksje var 68 kr. Dagen etter hadde verdien sunket med 2,8 %. Hva ble den nye verdien på denne aksjen?

Oppgave 22

En familie kjøpte en leilighet i 2008 for 1,8 millioner kroner. De antar at leilighetens verdi har steget med 150 % frem til i dag. Hvor høy er verdien på leiligheten dersom familien har rett?

Oppgave 23

a) I januar 2019 kjøpte en person akser for et visst beløp. Verdien på aksjene kunne i juni beregnes utfra regnestykket 15 000 · 1,05. Hva forteller tallene 15 000 og 1,05?
b) Høsten 2020 startet et visst antall elever på VG1. Antall elever som fullførte året kan beregnes utfra regnestykket 140 · 0,875. Hva forteller tallene 140 og 0,875?

Flere prosentvise endringer

Vi må forvente at prisen på varer og tjenester fortsetter å øke i årene som kommer. For hver prisstigning må vi multiplisere den nye prisen med **vekstfaktoren.** Selv om **endringen i prosent** er lik for hvert år, vil prisstigningen i kroner bli høyere for hvert år.

Anta at varen som kostet 147 kroner i 2021 øker med 2,6 % hvert år de neste 4 årene. For hver prisendring må vi multiplisere med **vekstfaktoren**, noe som gir dette regnestykket:

$$Pris\ etter\ 4\ endringer = 147\ kr\ \cdot \underbrace{1{,}026 \cdot 1{,}026 \cdot 1{,}026 \cdot 1{,}026}_{\text{Dette kan forenkles ved hjelp av potens}} \approx 163\ kr$$

Vi får dermed:

$$Pris\ etter\ 4\ endringer = 147\ kr\ \cdot 1{,}026^4 \approx 163\ kr$$

Anta at antall pasienter med døgnopphold ved norske sykehus fortsetter å synke med 7 % hvert år i de neste tre årene. Vi kan dermed regne ut at

$$Antall\ pasienter\ med\ døgnopphold = 697\,500\ \cdot 0{,}93^3 = 561\,039$$

Vi kan regne ut **ny verdi** etter den siste **prosentvise endringen** ved hjelp av følgende **regnemetode**:

$$\boldsymbol{Startverdi\ \cdot vekstfaktor^x = ny\ verdi}$$
$$\boldsymbol{der\ x\ ertattes\ av\ antall\ endringer}$$

Du legger kanskje merke til at vi kun har vist utregning ved hjelp av **vekstfaktoren**, og ikke ved hjelp av **ny verdi i prosent**? Grunnen ser du her:

<table>
<tr><th>Digitale hjelpemidler</th><th>Vekstfaktoren</th><th>Ny verdi i %</th><td rowspan="5">Kalkulator lar deg ikke bruke prosenttall ved potensregning</td></tr>
<tr><td>ExCel</td><td>✓</td><td>✓</td></tr>
<tr><td>GeoGebra</td><td>✓</td><td>✓</td></tr>
<tr><td>CAS</td><td>✓</td><td>✓</td></tr>
<tr><td>Kalkulator</td><td>✓</td><td>✗</td></tr>
</table>

Løs noen av oppgavene nedenfor ved hjelp av ExCel og CAS.

Oppgave 24
Hvis vi setter 10 000 kr i banken 1. januar, vil vi etter ett år få *renter* av pengene slik at beløpet på kontoen øker. Renten er en bergenes prosentvis av det beløpet vi har på kontoen.

Hvor mye vil vi ha på kontoen etter 5 år dersom renta er på 3 % per år?

Oppgave 25
En bærbar PC koster 9800 kr som ny. Vi regner med at verdien minker med 25 % i året. Hvor mye er PC-en verdt etter 4 år?

Oppgave 26
Anta at en aksje, som i dag er verdt 118 kr, stiger med 2 % hver dag den neste uka. Hvor høy er verdien på aksjen etter en uke (7 dager)?

Oppgave 27
Knut kjøper en bil, og han vet at bilens verdi synker en viss prosentandel hvert år. Han ser for seg å beholde bilen i noen år, og han lager følgende regnestykke for å beregne hvor mye han kan selge bilen for:

$$Salgspris = 320\,000 \cdot 0{,}85^4$$

Hvor mye kjøpte Knut bilen for, hvor mange prosent antar Knut at verdien synker hvert år, og hvor mange år tenker Knut å beholde bilen før han selger den?

Hvor mye regner Knut å selge bilen for?

En eksamensoppgave

En bakterie formerer seg ved todeling (dobling) hvert 20. minutt.

Det vil si at om det i starten er én bakterie, vil det etter 20 minutter være 2 bakterier, etter 40 minutter være 4 bakterier osv.

Hvor mange bakterier vil det være etter 12 timer?

En eksamensoppgave

Verdifallet utgjør bilens største kostnad, særlig det første året, enten bilen er kjøpt ny eller brukt.

Verdifallet utgjør bilen største kostnad. Verdifallet er i de aller fleste tilfellene størst det første året. For en nybil kan du forvente 20 prosent første året. Deretter om lag 14 prosent av bruktprisen fra det andre året, synkende til 10 prosent det sjette året. Og fra det sjette året 10 prosent årlig.

Teksten ovenfor er hentet fra smartepenger.no.

Mathilde kjøpte en ny bil. Bilen kostet 390 000 kroner.

Mathilde vil lage en oversikt som viser bilens verdifall i prosent de første seks årene. Hvert år vil hun sammenligne bilens verdi med verdien året før. I tillegg vil hun hvert år sammenlikne bilens verdi med verdien da den var ny.

Hun har brukt tallene fra smartepenger.no, og satt opp et regneark som vist nedenfor.

	A	B	C
1	**Verdifall i prosent**		
2	**År**	**Sammenliknet med verdien året før**	**Sammenliknet med verdien som ny**
3	1	20 %	20 %
4	2	14 %	31 %
5	3	13 %	
6	4	12 %	
7	5	11 %	
8	6	10 %	

a) Vis hvordan Mathilde kan ha kommet frem til 31 % i celle C4.

b) Lag regnearket og legg inn formler for å regne ut verdier i de grønne cellene.

Mathilde vil også ha en oversikt som viser verdifallet i kroner for bilen hun kjøpte. Hvert år skal oversikten vise verdifallet fra året før. I tillegg skal den for hvert år vise verdifallet i kroner fra da bilen var ny.

c) Utvid regnearket fra oppgave b) slik at du også får med en slik oversikt.

En eksamensoppgave

Synne og Thea prøver å løse denne oppgaven.

> Verdien av en båt har avtatt med 4 % hvert år de 8 siste årene.
>
> I dag er båtens verdi 45 000 kroner.
>
> Hva var båtens verdi for 8 år siden?

Kommenter det Synne og Thea sier, og forklar dem hvordan de kan løse oppgaven.

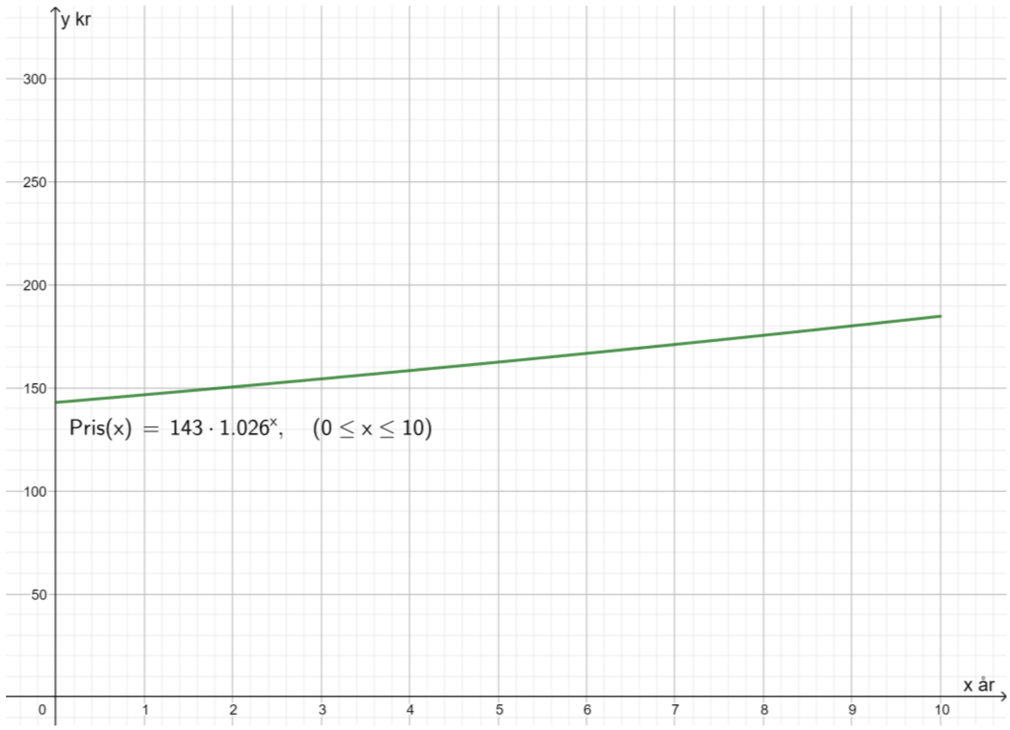
Ukjent antall endringer – eksponentiell utvikling

På de forrige sidene har vi sett på hvordan vi regner **ny verdi** etter et bestemt antall **prosentvise endringer**. Dersom vi ønsker å lage en **regnemetode** som gir oss mulighet til å finne **ny verdi** etter et ukjent antall **endringer**, må vi erstatte det kjente antallet **endringer** med variabelen x.

Nedenfor har vi beskrevet utviklingen i pris for varen fra tidligere eksempler.

Opprinnelig beløp	Etter 1 år	Etter 2 år	Etter 3 år	Etter x år
$143\ kr$	$143\ \cdot 1{,}026^1$	$143\ \cdot 1{,}026^2$	$143\ \cdot 1{,}026^3$	$143\ \cdot 1{,}026^x$

Grafisk vil utviklingen 10 år fremover se slik ut:



Funksjonsuttrykket $143 \cdot 1{,}026^x$ er skrevet på formen $y = a \cdot b^x$.

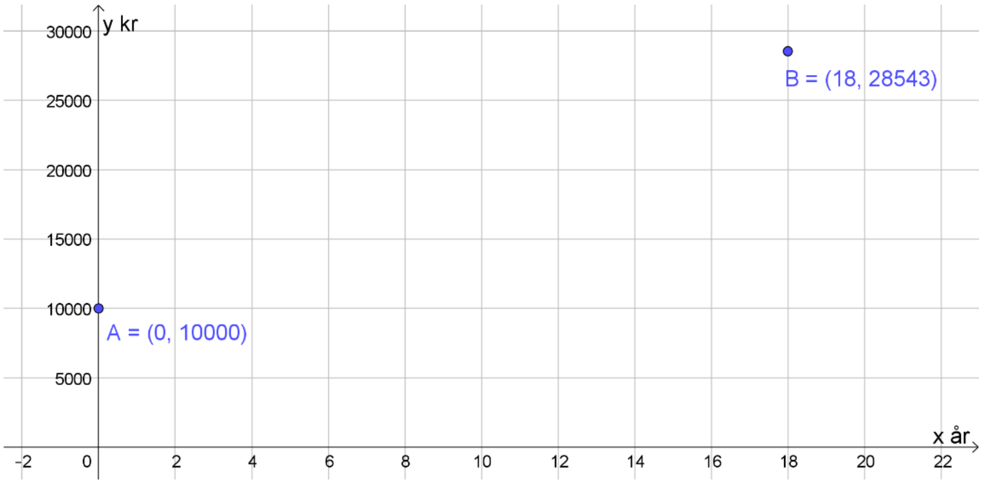
143 er **funksjonens opprinnelige verdi**, og forkortes a

1,026 er **funksjonens vekstfaktor**, og forkortes b.

I oppgaver vil du bli bedt om å tolke **funksjonsuttrykket.**

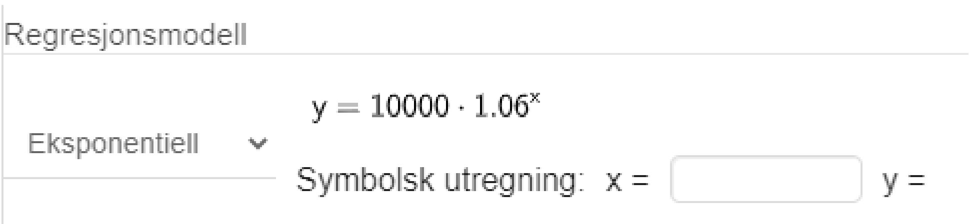
Eksponentiell utvikling utfra punkter

Tenk deg at foreldrene til et nyfødt barn satte inn et beløp i et aksjefond da barnet ble født. Foreldrene forventer at verdien til aksjefondet stiger frem til barnet blir 18 år.



Kan **punktene** i **koordinatsystemet** ovenfor brukes til å finne aksjefondets årlige verdiøkning, dersom aksjefondet har steget med en fast **prosent** hvert år?

Vi skriver punktene inn i regnearket i GeoGebra, og ber GeoGebra utføre en regresjonsanalyse. Deretter velger vi en eksponentiell modell, og får dette funksjonsuttrykket:



Funksjonsuttrykket gir oss denne informasjonen:

10 000 er det opprinnelige beløpet foreldrene plasserte i aksjefondet da barnet ble født.

1,06 = 106 %, som betyr 6 % årlig verdiøkning.

Også her kan du bli bedt om å finne **tilhørende** x- og y- **verdier**, og det gjøres på samme måte som tidligere.

Oppgave 28

En nyåpnet videregående skole presenterte følgende elevtall for to utvalgte år etter oppstart:

År etter oppstart	1	3
Elevtall	620	680

Skolens ledelse antar at utviklingen i skolens elevtall kan beskrives med en prosentvis endring som er gyldig i noen år fremover.

Bruk tallene i tabellen til å lage en modell som kan brukes til å beskrive utviklingen i skolens elevtall. Hva forteller modellen om den prosentvise endringen per år i skolens elevtall?

Oppgave 29

Ved en annen nyåpnet videregående skole så elevtallet slik ut i to utvalgte år:

År etter oppstart	1	3
Elevtall	1420	1217

Skolens ledelse antar at utviklingen i skolens elevtall kan beskrives med en prosentvis endring som er gyldig i noen år fremover.

Bruk tallene i tabellen til å lage en modell som kan brukes til å beskrive utviklingen i skolens elevtall. Hva forteller modellen om den prosentvise endringen per år i skolens elevtall?

En eksamensoppgave

Tabellen nedenfor viser antall innbyggere i Norge 1. januar noen utvalgte år.

År	1960	1970	1980	1990	2000	2010	2017
Innbyggere (millioner)	3,57	3,86	4,08	4,23	4,47	4,85	5,25

La x være antall år etter 1960. (La $x = 0$ svare til år 1960, $x = 10$ til 1970 osv.)

Før du begynner med oppgavene nedenfor må du regne ut x- verdiene til alle årstallene.

Vis at $f(x) = 3{,}57 \cdot 1{,}006^x$ er en modell som passer godt med tallene i tabellen. Hva forteller tallet 1,006 i denne modellen?

En eksamensoppgave

Dato	1. juni	1. juli	1. august	1. september
Antall tusen registrert smittet	6278	10 660	17 837	25 761

Tabellen viser antall tusen personer som totalt var registrert smittet av covid-19 noen dager i 2020.

La $x = 1$ svare til 1. juni, $x = 2$ til 1. juli, $x = 3$ til 1. august og $x = 4$ til 1. september.

a) Bruk regresjon til å vise at funksjonen f gitt ved

$$f(x) = 4038 \cdot 1{,}608^x$$

kan brukes som en modell for antall tusen personer som totalt var registrert smittet måned for måned i denne perioden.

b) Hvor mange prosent økte det totale antallet registrert smittede personer med per måned ifølge modellen?

Eksponentiell utvikling utfra funksjonsuttrykk

Tenk deg at du kjøper en moped når du blir 16 år, og selger denne når du blir 20 år. I hvert av de fire årene du eier mopeden, vil mopedens **verdi** synke med en fast prosent.

Funksjonen

$$M(x) = 15000 \cdot 0.85^x \quad , \quad 0 \leq x \leq 4$$

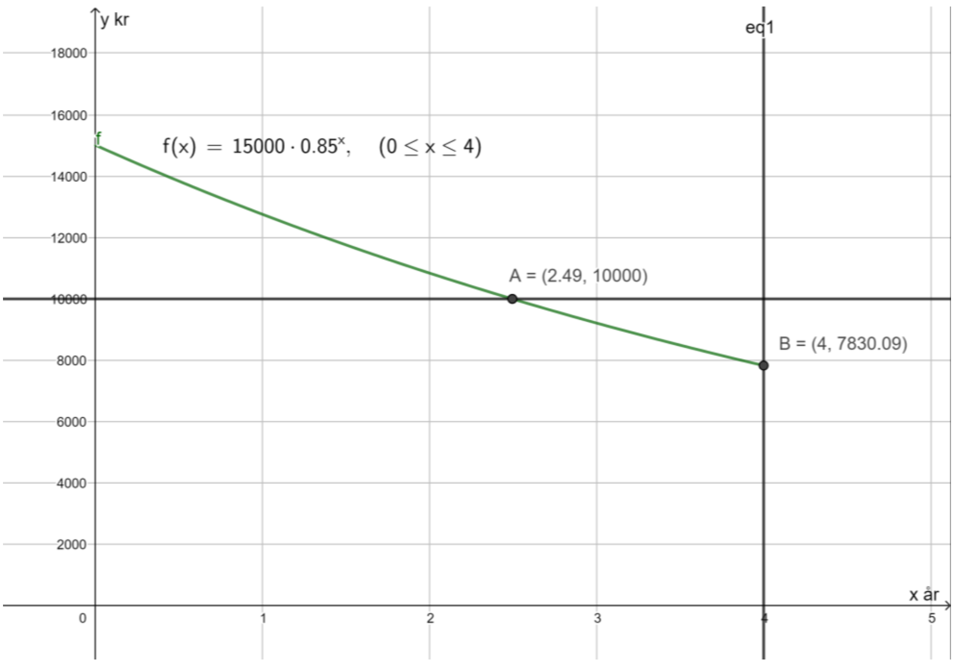
kan brukes til å beregne mopedens **verdi** $M(x)$ kroner x år etter at du kjøpte den.

Hvilken interessant informasjon kan vi finne ved hjelp av **funksjonsuttrykket**?

- **Opprinnelig verdi** er 15000. Dette er summen du kjøper mopeden for.
- **Vekstfaktoren** er 0,85. Dette betyr at mopedens verdi synker med 15 % i året
- $0 \leq x \leq 4$ er **funksjonens** avgrensning. Dette betyr at funksjonen er gyldig for x- verdier mellom 0 og 4.

Ved å tegne **grafen** i GeoGebra, kan vi finne ut at:

- **Punkt** A forteller at du må selge mopeden innen 2 år dersom du ønsker å selge den for minst 10 000 kr. Fremgangsmåte: skrev y = 10000, brukte «skjæring mellom to objekt».
- **Punkt** B forteller at forventet salgsverdi om 4 år er omtrent 7 800 kroner. Dette betyr at du må forvente et verditap på omtrent 7 200 kroner på dette kjøpet. Fremgangsmåte: skrev x = 4, brukte «skjæring mellom to objekt».



Oppgave 30

En familie kjøper en bil.

Funksjonen

$$f(x) = 420000 \cdot 0{,}82^x \quad , \quad 0 \leq x \leq 8$$

kan brukes til å beregne bilens verdi $f(x)$ kroner x år etter kjøpet av bilen, og frem til familien planlegger å selge bilen.

Bruk funksjonsuttrykket og grafen til å finne interessant informasjon om bilens verdi.

Oppgave 31

Familien kjøpte samtidig en leielighet.

Funksjonen

$$L(x) = 3480000 \cdot 1{,}08^x \quad , \quad 0 \leq x \leq 15$$

kan brukes til å beregne leilighetens verdi $L(x)$ kroner x år etter kjøpet av leiligheten, og frem til familien planlegger å selge leiligheten.

Bruk funksjonsuttrykket og grafen til å finne interessant informasjon om leilighetens verdi.

Oppgave 32

Funksjonen *N* gitt ved

$$N(x) = 5{,}32 \cdot 10^6 \cdot 1{,}008^x \qquad 0 \leq x \leq 9$$

kan brukes til å regne ut befolkningen *N*(x) i Norge *x* år etter 1. januar 2021.

Bruk funksjonsuttrykket og grafen til å finne interessant informasjon om Norges befolkning.

Oppgave 33

Spørsmålet om hvor mange mennesker som kan leve på jorda har vært stilt en rekke ganger. Funksjonen gitt ved

$$F(x) = 7{,}83 \cdot 10^9 \cdot 1{,}0114^x \quad 0 \leq x \leq 10$$

kan brukes til å beregne folketallet på jorda *x* år etter 1. januar 2021.

Bruk funksjonsuttrykket og grafen til å finne interessant informasjon om verdens folketall.

Oppgave 34

Funksjonen *O* gitt ved

$$O(x) = 1{,}1 \cdot 10^{13} \cdot 1{,}063^x \qquad 0 \leq x \leq 10$$

viser forventet verdi av Statens pensjonsfond utland (Oljefondet) *O*(x) for x år etter 1. januar 2021.

Bruk funksjonsuttrykket og grafen til å finne interessant informasjon om Norges fondsformue.

Oppgave 35

En kopp med rykende varm kaffe settes på kjøkkenbenken. Funksjonen

$$T(x) = 73 \cdot 0{,}83^x + 20$$

er en modell som viser temperaturen $T(x)$ grader °C til kaffen, x minutter etter at koppen blir satt på kjøkkenbenken.

Tegn grafen til T. Gi en forklaring på tallene 0,83 og 20.

Hvilket gyldighetsområde vil du si at modellen kan ha?

Oppgave 36

Funksjonen O gitt ved

$$O(x) = 697000 \cdot 1{,}008^x$$

kan brukes til å beregne folketallet i Oslo x år fremover.

Gi en forklaring på tallene 697 000 og 1,008.

Hvilket gyldighetsområde vil du si at modellen kan ha?

Løsningsforslag

Oppgave 2						
Brøk	Desimal	Prosent		Brøk	Desimal	Prosent
$\frac{28}{100}$	0,28	28 %		$\frac{37}{56}$	0,66	66 %
$\frac{48}{100}$	0,48	48 %		$\frac{85}{127}$	0,67	67 %
$\frac{61}{100}$	0,61	61 %		$\frac{21}{18}$	1,17	117 %
$\frac{70}{100}$	0,7	70 %		$\frac{80}{100}$	0,8	80 %
$\frac{5}{100}$	0,05	5%		$\frac{90}{100}$	0,9	90 %
$\frac{37}{100}$	0,37	37 %		$\frac{7}{100}$	0,07	7 %
$\frac{8}{100}$	0,08	8 %		$\frac{113}{100}$	1,13	113 %

Oppgave	Svar	Oppgave	Svar
3	a) 54 % jenter b) 46 % gutter	**9**	1 800 kr/måned
4	Du sparer 25 %.	**10**	a) 40 kr ekstra b) 120 kr ekstra
5	Du sparer 33 %.	**11**	4 000 kr
6	a) 50 % rabatt b) Du sparer 17 %.	**14**	- 6 prosentpoeng = -17 %
7	37 %	**15**	0,8 prosentpoeng = 25 %
8	a) 140 b) 336 c) 14 240		
	d) 7 392 e) 486,4 f) 1 273,6		

Eksamensoppgave side 47

$$\frac{3}{5} = 3 \cdot \frac{1}{5} = 3 \cdot 20\ \% = \underline{60\ \%}$$

$$\frac{1}{10} = \underline{10\ \%}$$

$$100\ \% - 60\ \% - 10\ \% = \underline{30\ \%}$$

30 % av kulene er gule.

Eksamensoppgave side 47

$$\frac{585}{1000} = \frac{58,5}{100}$$

58,5 % av ringen er gull.

Eksamensoppgave side 48

Siden økningen i antall elever er lik mellom hvert år, vil den prosentvise økningen være størst fra det året det var færrest elever. Det betyr at det er størst prosentvis økning fra 2018 til 2019.

Eksamensoppgave side 48

For enkelhets skyld kan vi sette opprinnelig pris på en flaske dusjsåpe til 100 kroner. Da vil tilbudene i hver av butikken bli slik:

Butikk	Sum	Ant. flasker	Pris per flaske.
A	200 kr	3	66,70 kr/flaske
B			70 kr/flaske
C	125 kr	2	62,50 kr/flaske
D	300 kr	5	60 kr/flaske

Butikk D har lavest pris per flaske, men der må du kjøpe 5 flasker for å oppnå denne prisen. Butikk B har høyest pris per flaske, men dette er den eneste av butikkene som tilbyr prisen selv om man kun kjøper en flaske.
Det blir dermed opp til deg å rangere tilbudene. Lønner det seg å kjøpe mange flasker for å oppnå lavest mulig pris per flaske?

Oppgave 12

	A	B	C
1	Vare	Pris	Rabatt
2	Ankelsokker	kr 59	kr 18
3	Bluse	kr 99	kr 30
4	Caps	kr 149	kr 45
5	Kort kjole	kr 199	kr 60
6	Lang kjole	kr 299	kr 90
7	Linskjorte	kr 249	kr 75
8	Pique-skjorte	kr 299	kr 90
9	Sandaler	kr 269	kr 81
10	Shorts	kr 399	kr 120
11	Skjørt	kr 159	kr 48
12	Solbriller	kr 499	kr 150
13	Solkrem	kr 169	kr 51
14	T-skjorte	kr 99	kr 30
15	Vannflaske	kr 149	kr 45

	A	B	C
1	Vare	Pris	Rabatt
2	Ankelsokker	59	=B2*30%
3	Bluse	99	=B3*30%
4	Caps	149	=B4*30%
5	Kort kjole	199	=B5*30%
6	Lang kjole	299	=B6*30%
7	Linskjorte	249	=B7*30%
8	Pique-skjorte	299	=B8*30%
9	Sandaler	269	=B9*30%
10	Shorts	399	=B10*30%
11	Skjørt	159	=B11*30%
12	Solbriller	499	=B12*30%
13	Solkrem	169	=B13*30%
14	T-skjorte	99	=B14*30%
15	Vannflaske	149	=B15*30%

Eksamensoppgave side 52

Saftblandingen består av en del sukker og ni deler ikke sukker. Dersom mengden sukker øker med 50 % betyr det at vi har 1,5 del sukker og ni deler ikke sukker. Det er totalt 10,5 deler.

$\frac{1,5}{10,5} = 14,3$

Den nye blandingen vil inneholde i overkant av 14 % sukker.

Oppgave 13

For å løse utfordringen har vi brukt «absolutt cellereferanse».

	A	B		C	
1	Rabatt:		30 %		
2	Vare	Pris		Rabatt	
3	Ankelsokker	kr	59	kr	18
4	Bluse	kr	99	kr	30
5	Caps	kr	149	kr	45
6	Kort kjole	kr	199	kr	60
7	Lang kjole	kr	299	kr	90
8	Linskjorte	kr	249	kr	75
9	Pique-skjorte	kr	299	kr	90
10	Sandaler	kr	269	kr	81
11	Shorts	kr	399	kr	120
12	Skjørt	kr	159	kr	48
13	Solbriller	kr	499	kr	150
14	Solkrem	kr	169	kr	51
15	T-skjorte	kr	99	kr	30
16	Vannflaske	kr	149	kr	45

	A	B	C
1	Rabatt:	0,3	
2	Vare	Pris	Rabatt
3	Ankelsokker	59	=B3*$B$1
4	Bluse	99	=B4*$B$1
5	Caps	149	=B5*$B$1
6	Kort kjole	199	=B6*$B$1
7	Lang kjole	299	=B7*$B$1
8	Linskjorte	249	=B8*$B$1
9	Pique-skjorte	299	=B9*$B$1
10	Sandaler	269	=B10*$B$1
11	Shorts	399	=B11*$B$1
12	Skjørt	159	=B12*$B$1
13	Solbriller	499	=B13*$B$1
14	Solkrem	169	=B14*$B$1
15	T-skjorte	99	=B15*$B$1
16	Vannflaske	149	=B16*$B$1

Eksamensoppgave side 53

Det er en prisforskjell på 60 kr mellom flybussen og bybanen.

a) $\frac{60}{100} = 60$ %. Bybanen er 60 % billigere enn flybussen

b) $\frac{60}{40}$ = 150 %. Flybussen er 150 % dyrere enn bybanen

Eksamensoppgave side 53

	A	B	C	D	E	F
1	**Lunsj på nett**					
2				Rabatt ved kjøp av flere enn fire retter		10 %
3	**Kunde**	Snekker Andersen		Levering ved kortere avstander enn 8 km		kr 70,00
4				Levering ved avstander som er 8 km eller lengre		kr 150,00
5						
6	**Lunsj**					
7		Antall porsjoner	Pris per porsjon	Totalt		
8	Dagens pasta	1	kr 100,00	kr 100,00		
9	Dagens suppe	4	kr 80,00	kr 320,00		
10	Dagens bagett	1	kr 110,00	kr 110,00		
11						
12	Sum	6		kr 530,00		
13						
14						
15			Rabatt (kroner)	kr 53,00		
16						
17	**Levering**					
18						
19	Antall km	8		Pris for levering	kr 150,00	
20						
21						
22	Å betale totalt	kr 627,00				

Jeg har laget regnearket og testet det for en kunde som kjøper 6 porsjoner og skal betale for levering når avstanden er 8 km. Under har jeg vist formlene som er brukt i regnearket.

	A	B	C	D	E	F
1	**Lunsj på nett**					
2				Rabatt ved kjøp av flere enn fire retter		0,1
3	**Kunde**	Snekker Andersen		Levering ved kortere avstander enn 8 km		70
4				Levering ved avstander som er 8 km eller lengre		150
5						
6	**Lunsj**					
7		Antall porsjoner	Pris per porsjon	Totalt		
8	Dagens pasta	1	100	=B8*C8		
9	Dagens suppe	4	80	=B9*C9		
10	Dagens bagett	1	110	=B10*C10		
11						
12	Sum	=SUMMER(B8:B10)		=SUMMER(D8:D10)		
13						
14						
15			Rabatt (kroner)	=HVIS(B12>4;D12*F2;0)		
16						
17	**Levering**					
18						
19	Antall km	8		Pris for levering	=HVIS(B19<8;F3;F4)	
20						
21						
22	Å betale totalt	=D12-D15+E19				

Oppgave 16

-7 %	=	93 %	=	0,93	- 2,2 %	=	97,8 %	=	0,978
+ 7 %	=	107 %	=	1,07	+ 0,4 %	=	100,4 %	=	1,004
- 7,5 %	=	92,5 %	=	0,925	- 17,5 %	=	82,5 %	=	0,825
+ 12,3%	=	112,3 %	=	1,1123	+ 200 %	=	300 %	=	3
+ 20 %	=	120 %	=	1,2	+ 250 %	=	350 %	=	3,5
- 10 %	=	90 %	=	0,9	- 100 %	=	0 %	=	0
- 13 %	=	87 %	=	0,87	- 1,2 %	=	98,8 %	=	0,988
+ 40 %	=	140 %	=	1,4	+ 0,7 %	=	100,7 %	=	1,007
+ 100 %	=	200 %	=	2	+ 0,2 %	=	100,2 %	=	1,002
- 30 %	=	70 %	=	0,7	- 25 %	=	75 %	=	0,75

Oppgave	Svar	Oppgave	Svar
18	2 817 500 kr	**24**	11 592,74 kr
19	9 600 kr	**25**	3 100 kr
20	166,88 kr/time	**26**	135,54 kr
21	66,10 kr	**27**	Knut betalte 320 000 kr for bilen, han antar at bilens verdi synker med 15 % hvert år, og han skal selge bilen etter 5 år for omtrent 142 000 kroner.
22	4,5 millioner kroner		
23	a) 15 000 betyr kjøpesummen, 1,05 betyr en verdiøkning på 5 % b) 140 betyr antall elever ved skolestart. 0,875 betyr at 12,5 % har sluttet.		

Eksamensoppgave side 62

Dobling hvert 20.miutt betyr tre doblinger per time, som da blir 36 doblinger i løpet av 12 timer.

$$2^{36} = 68719476736$$

Det vil være 68 719 476 736 bakterier etter 12 timer. (altså ca.68,7 milliarder).

Eksamensoppgave side 63

a)

Ett verdifall på 20 % gir en vekstfaktor på 0,8. Et videre fall på 14 % gir et totalt fall på $0,8 \cdot 0,86 = 0,688$. 1 - 0.688 = 0,312 = 31%.

b) og c)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3								
4			Nybilpris	390000	kr			
5								
6				Verdifall i prosent		Verdfall i kroner		Bilens verdi
7			År	fra fjoråret	fra nyverdi	fra fjorår	fra nyverdi	
8			1	20 %	20.0 %	78000	78000	312000
9			2	14 %	31.2 %	43680	121680	268320
10			3	13 %	40.1 %	34882	156562	233438
11			4	12 %	47.3 %	28013	184574	205426
12			5	11 %	53.1 %	22597	207171	182829
13			6	10 %	57.8 %	18283	225454	164546

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3								
4			Nybilpris	390000	kr			
5								
6					Verdifall i prosent	Verdfall i kroner		Bilens verdi
7			År	fra fjoråret	fra nyverdi	fra fjorår	fra nyverdi	
8			1	0.2	=D8	=D4*D8/100%	=F8	=D4-F8
9			2	0.14	=100% -(100%-E8)*(100%-D9)	=H8*D9	=G8+F9	=H8-F9
10			3	0.13	=100% -(100%-E9)*(100%-D10)	=H9*D10	=G9+F10	=H9-F10
11			4	0.12	=100% -(100%-E10)*(100%-D11)	=H10*D11	=G10+F11	=H10-F11
12			5	0.11	=100% -(100%-E11)*(100%-D12)	=H11*D12	=G11+F12	=H11-F12
13			6	0.1	=100% -(100%-E12)*(100%-D13)	=H12*D13	=G12+F13	=H12-F13
14								

Eksamensoppgave side 64

Synne har rett. Når noe minker med 4% er vekstfaktoren 0,96.

Thea, ja man kan bruke den vekstfaktoren. Siden verdien minker var den større for åtte år siden, enn i dag, så det har Thea rett i.

Dersom vi kaller båtens verdi for åtte år siden for x får vi:

$x \cdot 0,96^8 = 45000$

$x = 45000 \cdot 0,96^{-8}$

x= 62400

For åtte år siden var båtens verdi rundt 62 000 kroner. (ikke noe poeng å regne på krona her, dette er også en modell for verdiutviklingen og svaret er ikke eksakt uansett antall desimaler).

Oppgave 28

Vekstfaktoren 1,05 forteller at antall elever øker med 5 % hvert år.

Oppgave 29

Vekstfaktoren 0,93 forteller at antall elever synker med 7 % hvert år.

Eksamensoppgave side 68

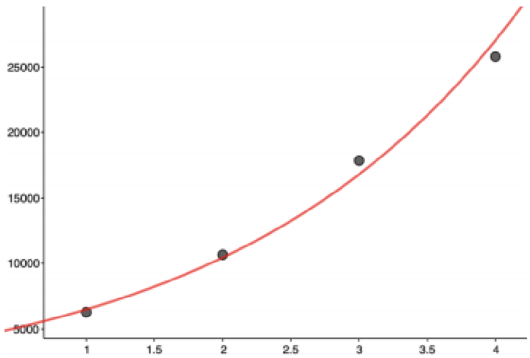
Har brukt regresjon til å vise at modellen passer godt med tallene i tabellen.
1,006 er en vekstfaktor, som forteller at folketallet i Norge øker med 0,6 % per år

Eksamensoppgave side 68

	A	B
1	1	6278
2	2	10660
3	3	17837
4	4	25761

X: A1:A4

Y: B1:B4



Regresjonsmodell

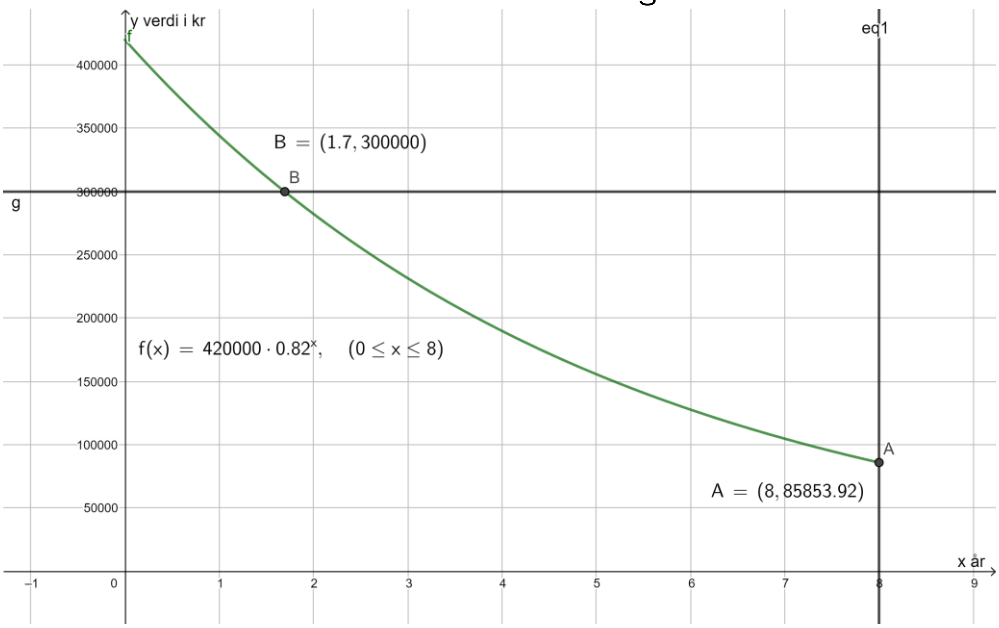
Eksponentiell

$y = 4038.4858 \cdot 1.608^x$

b) Jeg ser at vekstfaktoren er 1,608.
Det betyr at antall registrert smittede økte med 60,8 % per måned.

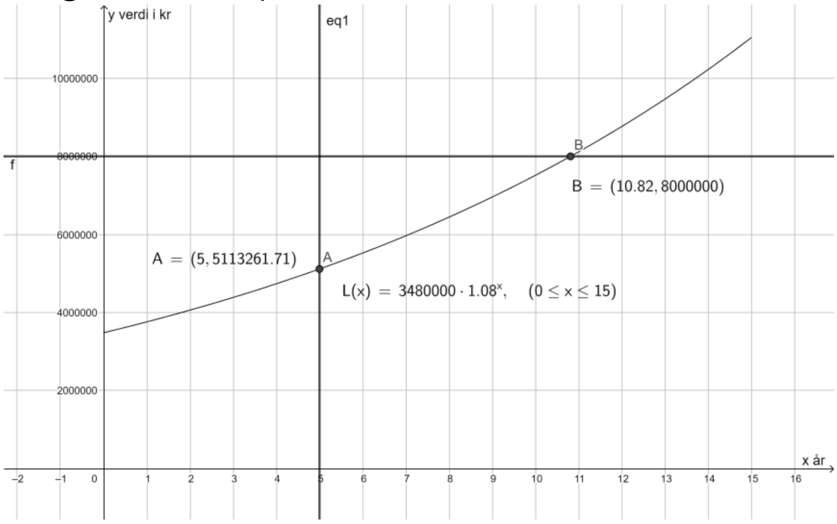
Oppgave 30

Forslag til interessant informasjon:
Funksjonsuttrykket forteller at familien betalte 420 000 kroner for bilen, og at bilens verdi synker med 18 % per år.
Familien kan forvente å få ca. 86 000 kroner for bilen dersom de selger bilen om 8 år.
Ønsker de 300 000 kroner for bilen må de selge den innen 2 år.

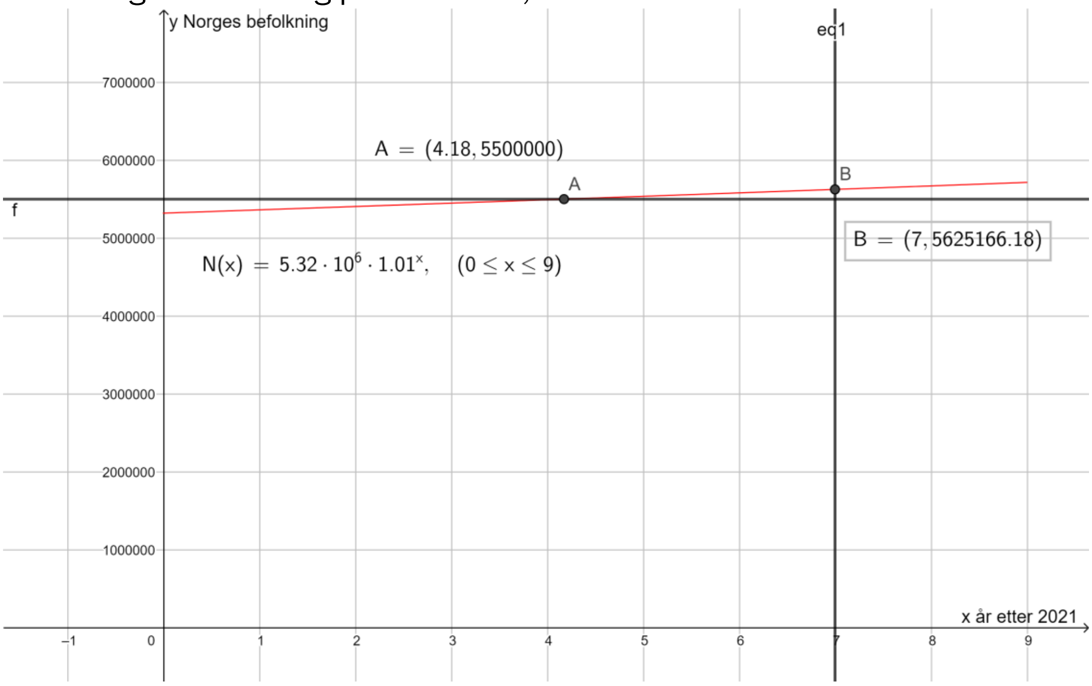


Oppgave 31

Forslag til interessant informasjon:
Funksjonsuttrykket forteller at familien betalte 3 480 000 kroner for leiligheten, og at leilighetens verdi øker med 8 % per år.
Etter 5 år er leilighetens verdi omtrent 5,1 millioner kroner.
Leilighetens verdi passerer 8 millioner kroner etter 11 år.



Oppgave 32
Forslag til interessant informasjon
Funksjonsuttrykket forteller at folketallet i Norge ved inngangen til 2021 er 5,32 millioner og at folketallet øker med 0,8 % per år.
Norges innbyggertall passerer 5,5 millioner i 2025.
I 2028 er Norges befolkning på omtrent 5,6 millioner mennesker.



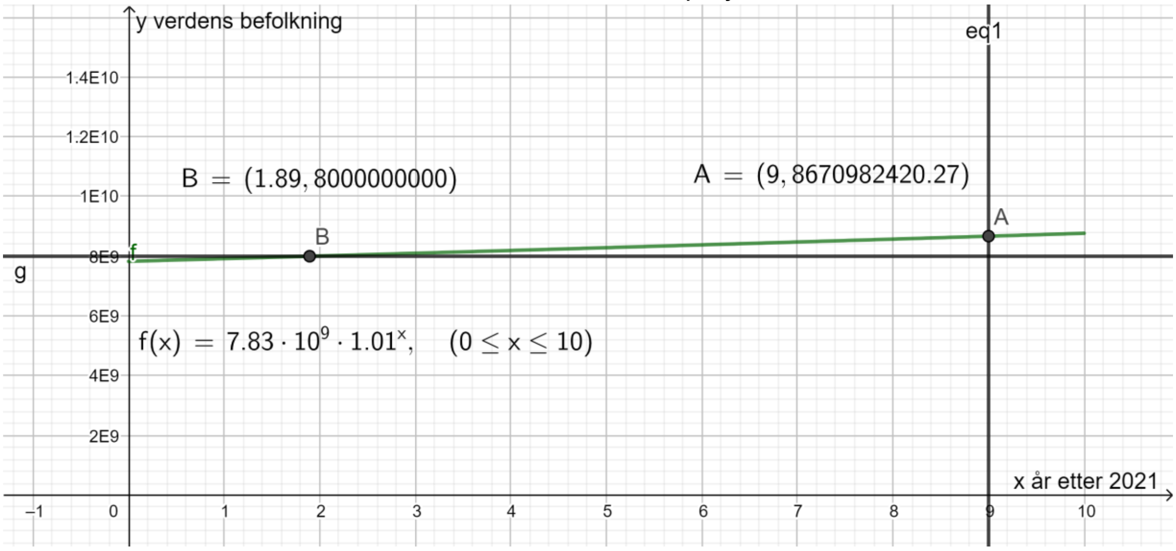
Oppgave 33

Forslag til interessant informasjon:

Funksjonsuttrykket forteller at folketallet i verden ved inngangen til 2021 er 7,83 milliarder og at folketallet øker med 1,14 % per år.

Jordens befolkning vil passere 8 mrd. i 2023.

I 2030 vil det være omtrent 8,7 mrd. mennesker på jorda

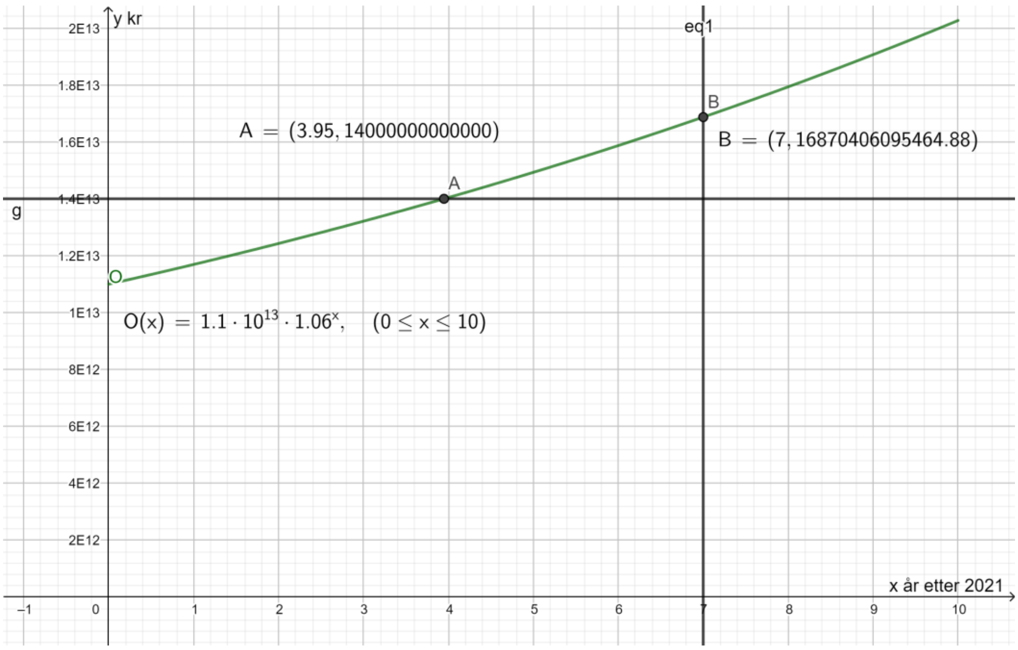


Oppgave 34

Forslag til interessant informasjon:

Funksjonsuttrykket forteller at verdien til Oljefondet inngangen til 2021 er på svimlende 11 000 milliarder kroner, og at verdien til Oljefondet øker med 6,3 % per år.

Oljefondets verdi passerer 14 000 mrd. kroner i 2025. I 2028 vil oljefondets verdi være på omtrent 17 000 mrd. kroner



Oppgave 35

Vekstfaktor på 0,83 betyr en nedgang i temperatur på 17 % per minutt. Tallet 20 indikerer romtemperatur, og funksjonsuttrykket er skrevet på denne måten for at verdien ikke skal synke under 20 grader. Modellen er dermed gyldig frem til romtemperaturen endres, eller kaffekoppen flyttes til en lokasjon med annen temperatur.

Oppgave 36

Funksjonsuttrykket forteller at Oslos innbyggertall er 697 000, og at innbyggertallet vil vokse med 0,8 % i årene fremover.

SSB spår følgende om antall innbyggere i Oslo i to utvalgte år:

Kilde: https://www.ssb.no/kommunefakta/oslo

Sammenlignet med disse tallene er modellen troverdig frem til 2030, men viser for høyt folketall i 2050. Det betyr at modellen vil bli upålitelig etter 2030.

Presentasjon og analyse

Målet for opplæringen er at eleven skal kunne:

- Bruke og vurdere valg av passende sentralmål og spredningsmål for statistisk datamateriale
- Analysere og presentere funn i datasett fra lokalsamfunn og media.

Informasjon

På ungdomskolen har du sannsynligvis vært med på å samle inn informasjon, kanskje gjennom en spørreundersøkelse eller ved et forsøk. Du har kanskje spurt dine medelever om hvor mange søsken de har, eller hvor mange timer de bruker på skjerm. Kanskje har du registrert hvor mange biler som passerer skolen i et bestemt tidsrom.

Hvert enkelt svar fra spørreundersøkelsen eller hvert enkelt resultat fra forsøket kalles en **observasjon**, og antallet som svarer eller antall resultater fra undersøkelsen kalles **sum observasjoner**.

Informasjonen hver enkelt observasjon gir kalles **data**, og alle dataene samlet kalles **datamateriale**. I dette kapittelet skal vi først se på hvordan vi kan **presentere** informasjonen fra et datamateriale. Deretter skal vi se hvilke **analyser** vi kan gjøre av et datamateriale.

Tenk deg at læreren spør klassen om hvor mange transportmidler hver enkelt elev brukte for å komme til skolen i dag. Da vil hvert enkelt svar være en **observasjon** og antall elever som var med på undersøkelsen vil være **sum observasjoner**.

Hva hver enkelt elev svarer vil være **data**, mens alle svarene samlet vil bli undersøkelsens **datamateriale**. Det er dette **datamaterialet** som vi enten kan **presentere** eller **analysere**

Eksempel:

En taxisjåfør registrerte antall turer hver dag en uke i desember. Her blir **antall observasjoner** 7.

Sjåføren registrerte følgende observasjoner fra mandag til søndag:

14 – 17 – 12 – 21 – 29 – 37 - 14

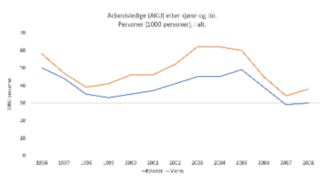
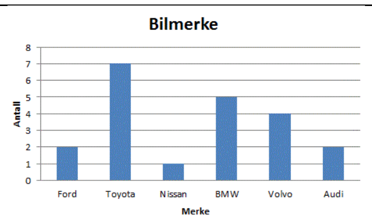
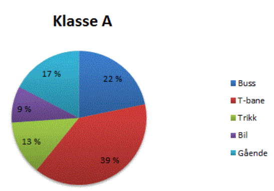
Presentasjon – tabell og diagram

Når vi har skaffet oss et datamateriale kan vi lage en presentasjon av informasjonen i datamaterialet. Det er ryddig å først systematisere dataene i en **tabell**, og det kan være lurt å gjøre dette i ExCel:

	A	B
1	Dag	Antall turer
2	Mandag	14
3	Tirsdag	17
4	Onsdag	12
5	Torsdag	21
6	Fredag	29
7	Lørdag	37
8	Søndag	14

Tabell er ikke alltid den beste måten å presentere informasjon på, spesielt ikke dersom det er mye informasjon som skal presenteres. I slike tilfeller kan vi bruke mer visuelle hjelpemidler, for eksempel en graf eller et **diagram**.

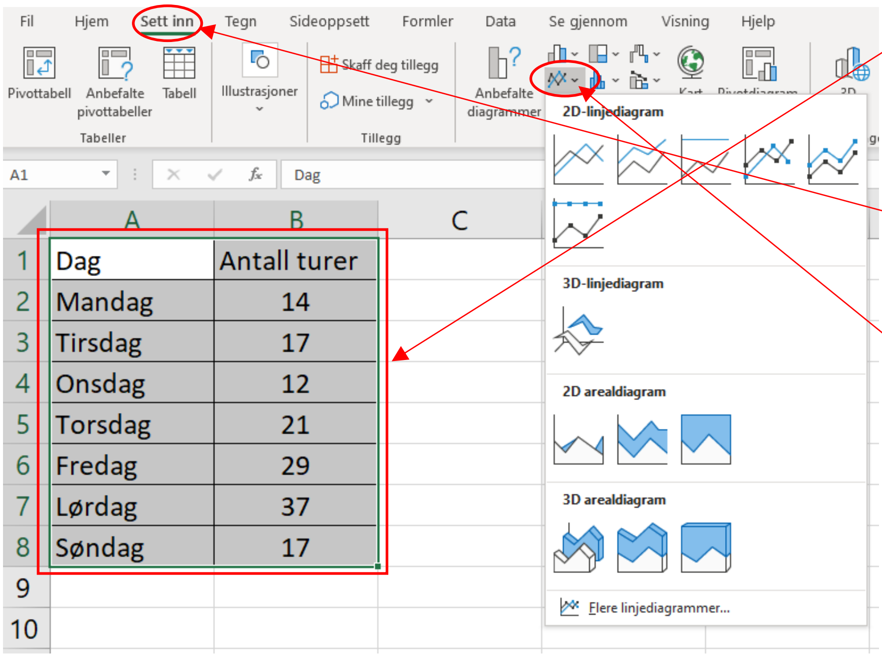
Det finnes tre typer diagrammer du bør kjenne til og når de kan brukes:

Type	Linjediagram	Søylediagram	Sektordiagram
Brukes når vi ønsker å vise	Utvikling over tid	Forskjellen mellom dataene. Her trenger ikke alle data være med.	Andel (gjerne prosent) av datamaterialet
Eksempel			

På de neste sidene viser vi hvordan du kan lage slike diagrammer i ExCel.

Linjediagram:

Dersom vi ønsker å vise utvikling i antall turer gjennom uka, kan vi bruke et



1. Marker tallene i tabellen.

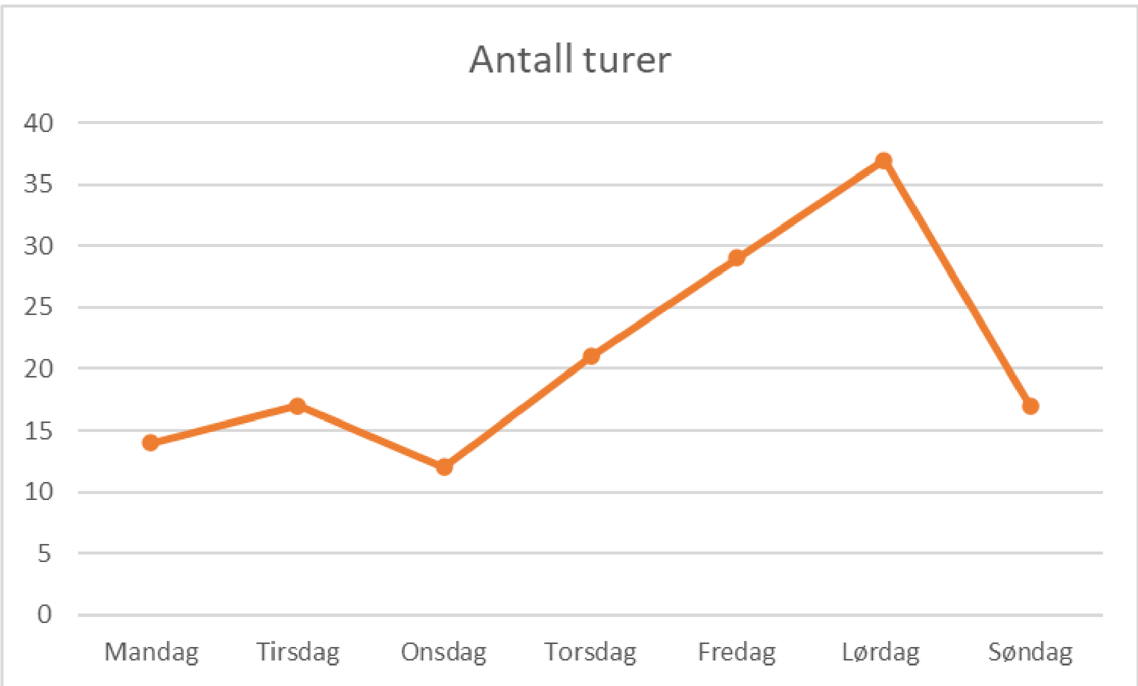
2. Trykk på «Sett inn».

3. Trykk på «Sett inn linje- eller arealdiagram».

4. Velg det diagrammet du ønsker.

linjediagram.

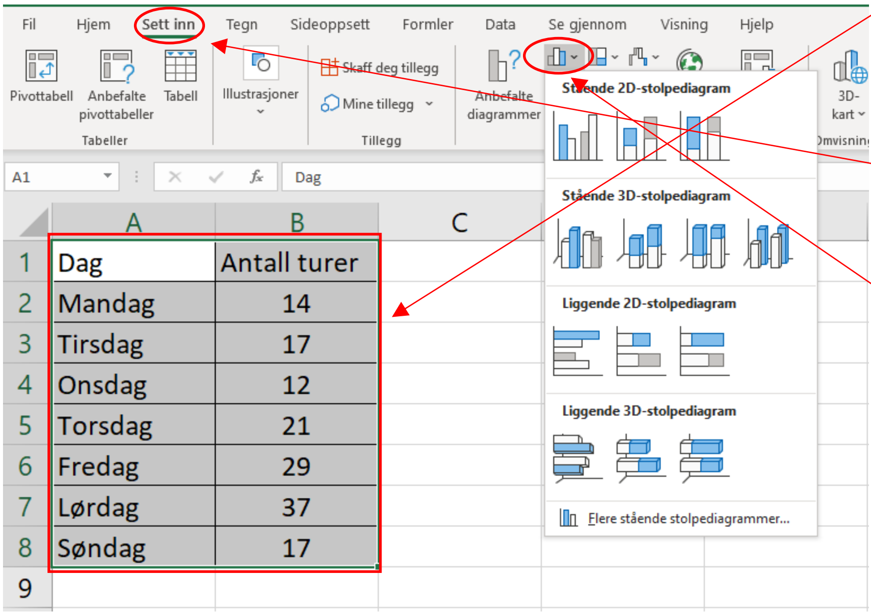
Utviklingen i antall turer gjennom uka blir slik:



Klarer du å lage dette diagrammet i ExCel?

Søylediagram:

Dersom vi ønsker å vise forskjellen i antall turer gjennom uka, kan vi bruke et **søylediagram**.



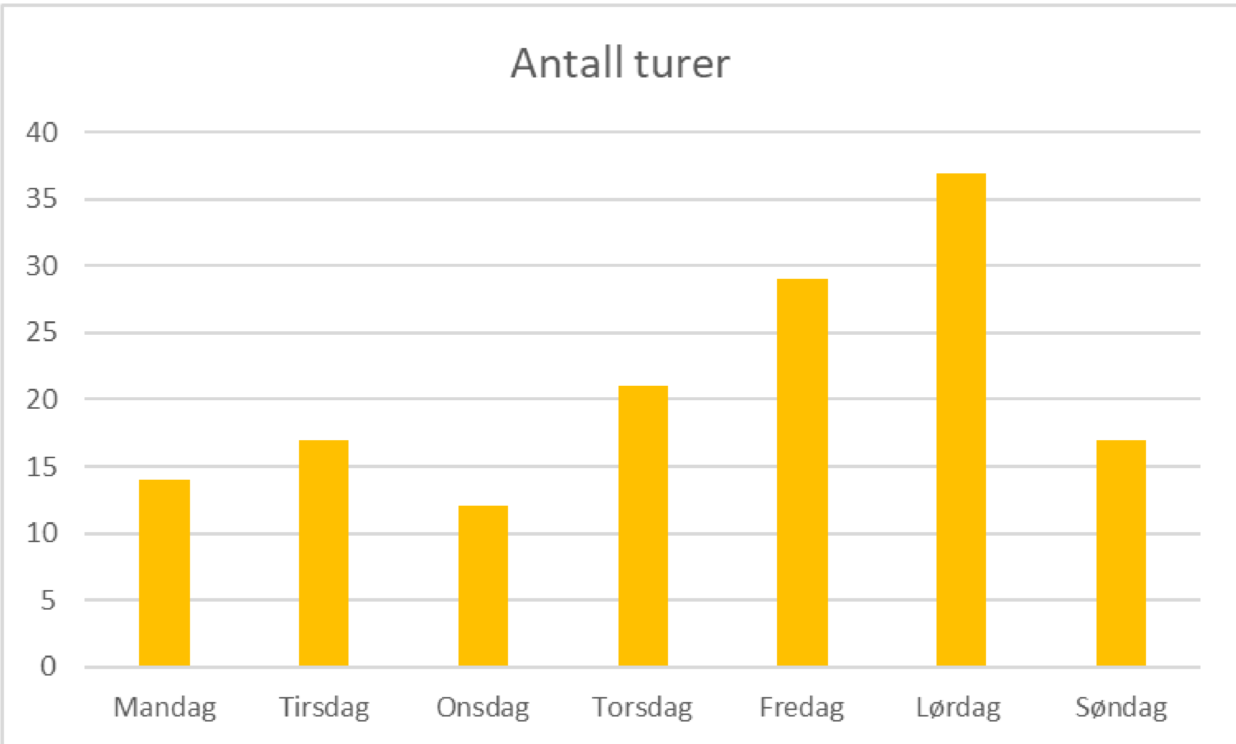
1. Marker tallene i tabellen.

2. Trykk på «Sett inn».

3. Trykk på «Sett inn stående eller liggende stolpediagram».

4. Velg det diagrammet du ønsker.

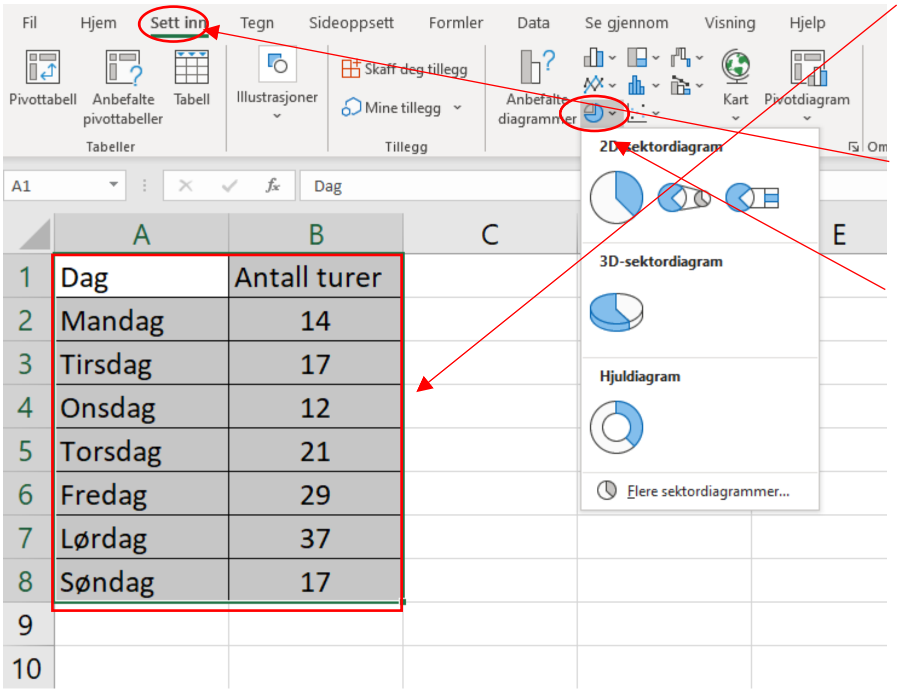
Antall turer fra mandag til søndag blir slik:



Klarer du å lage dette diagrammet i ExCel?

Sektordiagram:

Dersom vi ønsker å vise den prosentvise fordelingen av antall turer, kan vi bruke et **sektordiagram**.



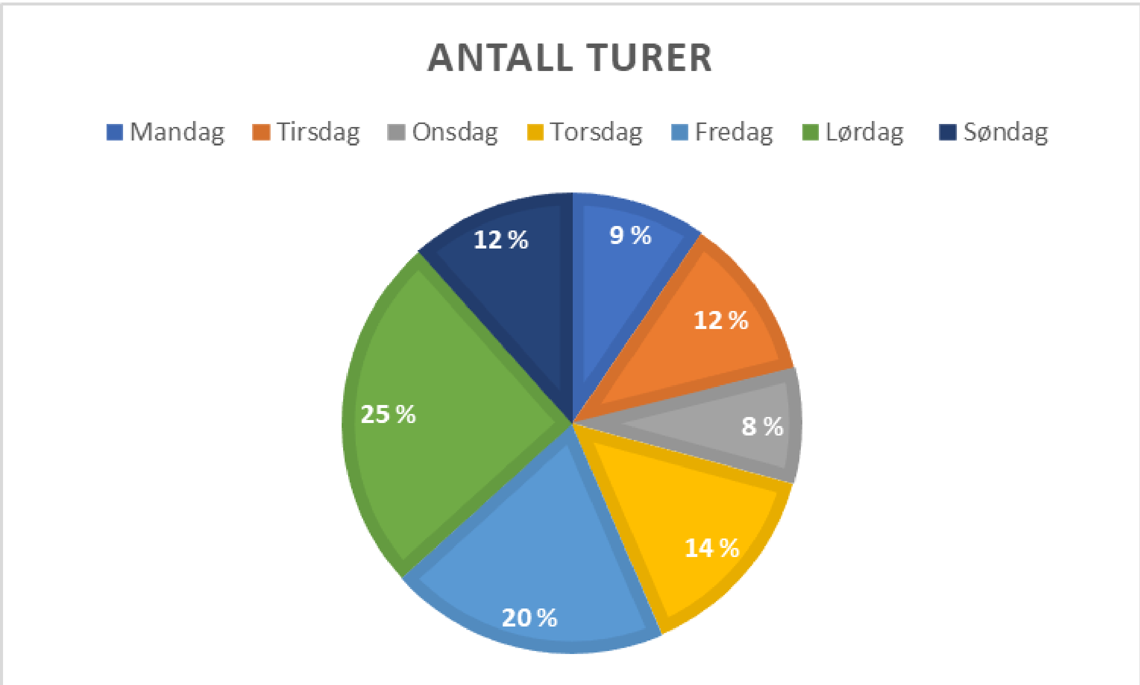
1. Marker tallene i tabellen.

2. Trykk på «Sett inn».

3. Trykk på «Sett inn sektor- eller hjuldiagram».

4. Velg det diagrammet du ønsker. Husk å inkludere prosent.

Den prosentvise fordelingen av antall turer blir slik:



Klarer du å lage dette diagrammet i ExCel?

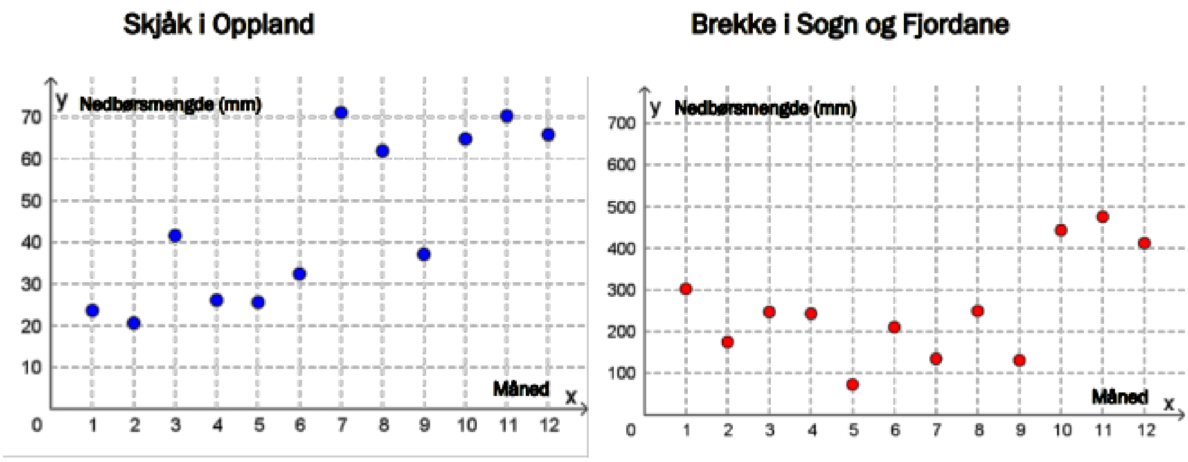
Oppgave 1

By	Antall innbyggere
São Paulo	11 968 000
Mexico City	8 919 000
Lima	8 894 000
New York	8 550 000
Bogotá	7 862 000
Rio de Janeiro	6 477 000
Santiago	5 507 000
Los Angeles	3 972 000
Caracas	3 290 000
Buenos Aires	3 054 000
Salvador	2 921 000
Brasília	2 914 000
Toronto	2 826 000
Chicago	2 721 000

Tabellen ovenfor viser hvor mange innbyggere det er i hver av de 14 største byene i Sør- og Nord-Amerika.

Fremstill innbyggertallene i et passende diagram. Begrunn valg av diagram.

Oppgave 2



Ovenfor ser du to diagram. Diagrammene viser nedbørsmengde hver måned i 2017 i Sjåk og Brekke.

Fremstill den månedlige utviklingen i nedbørsmengde for hvert av stedene i et felles diagram. Begrunn valg av diagram.

Oppgave 3

Tabellen nedenfor viser en oversikt over høydene til elevene ved en skole.

Høyde i cm	Frekvens
$[150, 160\rangle$	10
$[160, 170\rangle$	30
$[170, 180\rangle$	50
$[180, 200\rangle$	10

Fremstill resultatet i et diagram. Diagrammet skal vise den prosentvise fordelingen mellom de ulike høydene.

Begrunn valg av diagram.

Presentasjonsoppgave

Velg deg et parti fra din lokale valgkrets. Lag en presentasjon av partiets resultater ved de siste kommune- og stortingsvalgene.

Velg ulike datamateriale, slik at du får vist at du behersker både linje-, søyle- og sektordiagram.

Analyse

Når vi har skaffet oss et datamateriale kan vi gjøre mer enn å bare presentere resultatene. Vi kan også gjøre noen analyser av informasjonen. Nedenfor har vi listet opp noen spørsmål som kan være naturlig å stille til datamaterialet fra taxi-sjåføren.

Hvilket resultat er i midten?

Dersom vi skal finne hva som er i midten må vi først sette resultatene i rekkefølge, for eksempel fra lavest til høyest:

12 – 14 – 17 – 17 – 21 – 29 – 37

Her ser vi at 17 turer er det resultatet i midten. Dette kalles for øvrig for **median**.

Spørsmål til diskusjon: hva om det er 2 i midten? Når inntreffer dette?

Hva er det vanligste resultatet?

Er det et resultat som kommer oftere enn andre? I datamaterialet til taxi-sjåføren ser vi at 17 turer er det resultatet som forekommer oftest. Dette kalles for øvrig for **typetall**.

Spørsmål til diskusjon: hva om det er flere observasjoner som forekommer oftest? Hva om ingen observasjoner forekommer flere ganger?

Hva om alle resultatene hadde vært like?

Tenk om sjåføren kunne fordelt turene slik at det ble kjørt like mange turer hver dag, istedenfor mange turer noen dager og få turer andre dager? Dette kalles for øvrig for **gjennomsnitt**.

I så fall må vi først finne ut hvor mange turer sjåføren kjørte til sammen. Deretter må vi fordele disse turene på antall dager. Dette kan skrives slik:

Gjennomsnitt = $\frac{sum\ data}{antall\ \ observasjoner} = \frac{sum\ turer}{antall\ dager} = \frac{147}{7} = 21$

Spørsmål til diskusjon: for hvilke typer undersøkelser er det ikke mulig å regne gjennomsnitt?

Disse tre analysene kalles for **sentralmål**. Blir du bedt om å finne **sentralmålene** til et datamateriale er det disse analysene du skal gjøre.

Hva om vi legger sammen resultatene underveis?

Det kan kanskje være interessant å vite hvor mange turer sjåføren har kjørt fra mandag til onsdag, eller fra mandag til fredag. Dette kalles for øvrig **kumulativ frekvens.** Kumulativ kommer av ordet akkumulere, som betyr å samle opp.

Vi kunne naturligvis skrevet det slik:

Kumulativ frekvens for mandag: antall turer mandag.

Kumulativ frekvens for tirsdag: antall turer mandag + tirsdag

Kumulativ frekvens for onsdag: antall turer mandag + tirsdag + onsdag

osv...

men det er mer fornuftig å gjøre dette i en tabell:

	A	B	C
1	Dag	Antall turer	Kumulativ frekvens
2	Mandag	14	14
3	Tirsdag	17	31
4	Onsdag	12	43
5	Torsdag	21	64
6	Fredag	29	93
7	Lørdag	37	130
8	Søndag	17	147

Spørsmål til diskusjon: nedenfor har vi vist formlene som ble brukt for å regne ut den kumulative frekvensen for dette datamaterialet. Hvordan er regnearket bygd opp?

	A	B	C
1	Dag	Antall turer	Kumulativ frekvens
2	Mandag	14	=B2
3	Tirsdag	17	=C2+B3
4	Onsdag	12	=C3+B4
5	Torsdag	21	=C4+B5
6	Fredag	29	=C5+B6
7	Lørdag	37	=C6+B7
8	Søndag	14	=C7+B8

Hvor stor (prosent)andel utgjør hvert resultat?

Det kan kanskje være interessant for sjåføren å vite hvor mange prosent av turene som ble kjørt på hver av dagene. Vi har tidligere sett at vi kan finne dette ved å lage et sektordiagram, men det kan også gjøres ved regning.

Dette kalles **relativ frekvens**, og dersom vi legger sammen prosentene underveis kalles dette **kumulativ relativ frekvens**. Dette er også fornuftig å gjøre i en tabell:

	A	B	C	D
1	Dag	Antall turer	Relativ frekvens	Kumulativ relativ frekvens
2	Mandag	14	9,5 %	9,5 %
3	Tirsdag	17	11,6 %	21,1 %
4	Onsdag	12	8,2 %	29,3 %
5	Torsdag	21	14,3 %	43,5 %
6	Fredag	29	19,7 %	63,3 %
7	Lørdag	37	25,2 %	88,4 %
8	Søndag	17	11,6 %	100,0 %
9	Sum turer	147	100,0 %	

Spørsmål til diskusjon: nedenfor har vi vist formlene som ble brukt for å regne ut den relative frekvensen for dette datamaterialet. Hvordan er regnearket bygd opp?

	A	B	C
1	Dag	Antall turer	Relativ frekvens
2	Mandag	14	=B2/$B$9
3	Tirsdag	17	=B3/$B$9
4	Onsdag	12	=B4/$B$9
5	Torsdag	21	=B5/$B$9
6	Fredag	29	=B6/$B$9
7	Lørdag	37	=B7/$B$9
8	Søndag	17	=B8/$B$9
9	Sum turer	=SUMMER(B2:B8)	=B9/$B$9

Er det stor forskjell på resultatene?

Hvilken dag kjører sjåføren færrest turer? Hvor mange turer kjører sjåføren på den travleste dagen? Hvor stor er forskjellen mellom det høyeste og det laveste antall turer? Dette kalles for øvrig **variasjonsbredde**, og er en del av det som kalles **spredningsmål.**

Vi ser at sjåføren kjører 37 turer på den travleste dagen, og 12 turer på den roligste dagen. Vi kan dermed regne ut **variasjonsbredden** slik:

Variasjonsbredde = høyest resultat − lavest resultat = 37 turer − 12 turer = 25 turer.

Oppgave 4

Nedenfor ser du karakterene til en elev på vurderinger i første termin på VG1:

3 – 4 – 2 – 4 – 5 – 2 – 3 – 6 – 3 – 4 – 5 – 3

a) Hvilken karakter er den midterste karakteren til denne eleven?

b) Hva er den vanligste karakteren denne eleven har fått?

c) Hvor høy er gjennomsnittskarakteren til denne eleven?

d) På hvor mange prosent av vurderingene fikk eleven karakteren 5?

e) Hvor stor var forskjellen på den høyeste og den laveste karakteren for denne eleven?

Oppgave 5

Vi spurte 8 elever hvor mye penger de hadde brukt i kantina i storefri. Nedenfor finner du svarene de ga (i kroner):

55, 70, 45, 60, 130, 50, 65 og 70

a) Hvor stor var forskjellen i pengebruk mellom den som brukte mest og den som brukte minst?

b) Hvor mye brukte hver av elevene i gjennomsnitt?

c) Hva er midtpunktet til dette datamaterialet?

d) Hvor mange prosent av elevene brukte mer penger enn gjennomsnittet? Hvor mange prosent av elevene brukte mindre penger enn gjennomsnittet?

Oppgave 6

Finn sentralmål og spredningsmål til datamaterialet i oppgave 1.

Analyse i ExCel

ExCel kan forenkle analysearbeidet for oss dersom vi kjenner kommandoene. Nedenfor finner du en oversikt over hvordan du kan bruke ExCel til å finne **sentralmå**l og **spredningsmå**l til et datamateriale.

Dersom du skal skrive inn kommandoen gjør du det i følgende rekkefølge:

1. Begynn med å skrive = [kommandoen]

2. Dobbelklikk på kommandoen som kommer opp.

3. Marker tallene du ønsker at ExCel skal analysere

4. Trykk «Enter»

Hvilken analyse	Kommando
Gjennomsnitt	=gjennomsnitt(datamaterialet)
Median	=median(datamaterialet)
Typetall	=modus(datamaterialet)
Variasjonsbredde	=maksa(datamaterialet) – min(datamaterialet)
Standardavvik	=stdav.p

Standardavvik er et **spredningsmål**. Ved å regne ut **standardavviket** til et **tallmateriale** sammenligner vi hver enkelt **observasjon** med **gjennomsnittet**, og **standardavviket** vil være en samlet vurdering av denne forskjellen. Det betyr at jo mer hver enkelt **observasjon** avviker fra **gjennomsnittet**, jo høyere blir **standardavviket**. Det motsatte gjelder også: jo høyere **standardavvik**, jo større spredning blant **observasjonene.**

Merk: disse kommandoene fungerer kun når datamaterialet er skrevet som en liste med tall, slik det er gjort i eksempelet med taxi-turer.

Dersom du skal finne **sentral- og spredningsmål** når data er samlet i kategorier, som i oppgave 3 må dette løses på en annen måte. Dette skal du lære senere dette skoleåret.

ExCel-analyse av taxi-turene:

	A	B
1	Dag	Antall turer
2	Mandag	14
3	Tirsdag	17
4	Onsdag	12
5	Torsdag	21
6	Fredag	29
7	Lørdag	37
8	Søndag	17
9	Sum	147
10		
11	Median	17
12	Typetall	17
13	Gjennomsnitt	21
14	Variasjonsbredde	25
15	Standardavvik	8,3

	A	B
1	Dag	Antall turer
2	Mandag	14
3	Tirsdag	17
4	Onsdag	12
5	Torsdag	21
6	Fredag	29
7	Lørdag	37
8	Søndag	17
9	Sum	=SUMMER(B2:B8)
10		
11	Median	=MEDIAN(B2:B8)
12	Typetall	=MODUS(B2:B8)
13	Gjennomsnitt	=GJENNOMSNITT(B2:B8)
14	Variasjonsbredde	=B7-B4
15	Standardavvik	=STDAV.P(B2:B8)

Legg merke til at vi forklarer hvilke analyser vi utfører.

Oppgave 7

Bruk datamaterialet du finner i oppgave 2, og gjør en analyse av sentralmål og spredningsmål ved hjelp av ExCel.

Spørsmål til diskusjon: kommandoer er ment for å forenkle arbeidet. Er det noen av kommandoene som fremstår som en mer tungvint metode enn å utføre analysen selv? Kan dette variere ut fra størrelsen på datamaterialet?

Presentasjonsoppgave

Ta frem presentasjonen av ditt lokale parti. Bruk ExCel til å gjøre så mange analyser som mulig av tallmaterialet.

I presentasjonen skal du inkludere relevante kommentarer.

En eksamensoppgave

Steffen bruker en app for å samle data om sykkelturene sien.
Han setter dataene i en tabell.
Tabellen inneholder to typer opplysninger:
1. Gjennomsnittsfart for hver kilometer
2. Antall meter stigning fo rhver kilometer

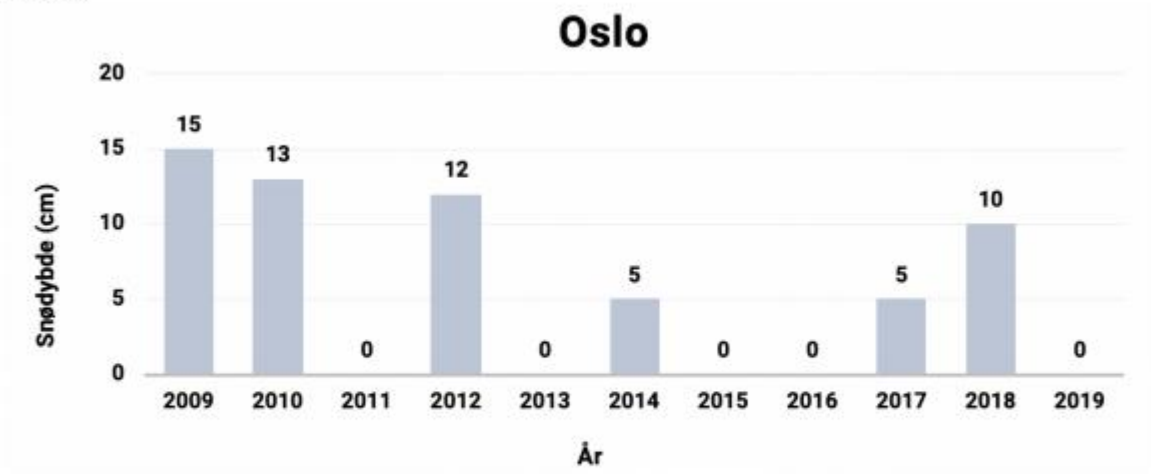
Vennene var imponerte, og det hadde blant annet disse kommentarene og spørsmålene til Steffen:
«Wow, Steffen. Det ble mange mil. Hvor lang tid brukte du»?
«Oj, det ble høyt etter hvert. Hvor mange høydemeter ble det i alt»?
«Skal si du holdt bra gjennomsnittfart»
«Litt av ei løype, det går jo opp og ned hele tiden».

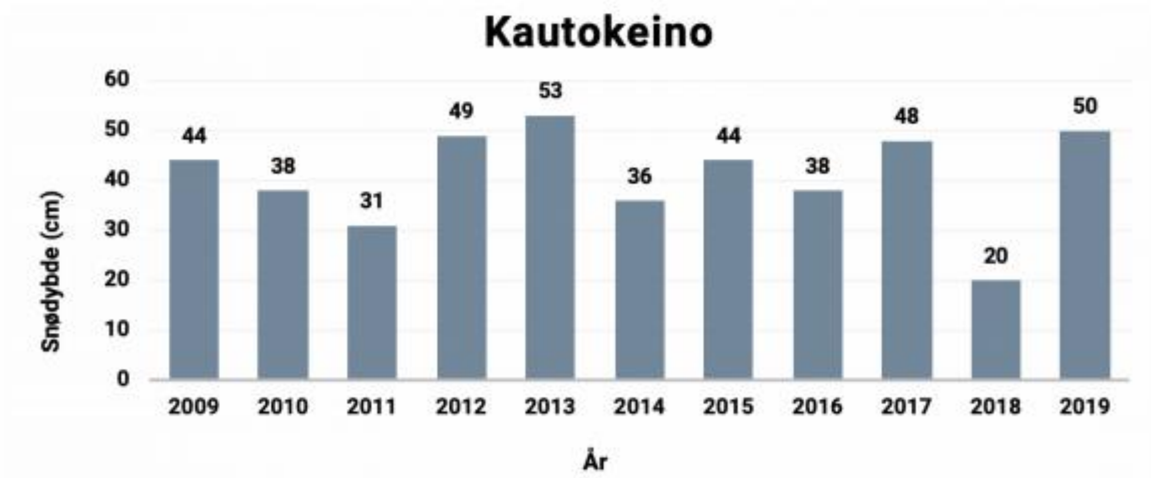
Bruk tabellen nedenfor og gjør beregninger, lag diagrammer og gi en beskrivelse av sykkelturen.

Kilometer (Første, andre ...)	Gjennomsnittsfart denne kilometeren (km/h)	Stigning denne kilometeren (m)
1.	22,92	27
2.	23,66	25
3.	17,26	65
4.	23,83	13
5.	36,84	−37
6.	38,02	−42
7.	17,36	−29
8.	23,38	−25
9.	24,34	10
10.	23,03	19
11.	16,76	26
12.	15,07	17
13.	14,69	7
14.	17,38	13
15.	24,70	−13
16.	15,67	47
17.	17,08	−7
18.	14,81	39
19.	15,06	42
20.	15,63	44

En eksamensoppgave

Diagrammene nedenfor viser snødybden i Oslo og i Kautokeino julaften de 11 siste årene.





a) Bestem gjennomsnittet og standardavviket for snødybdene i Oslo og for snødybdene i Kautokeino.

Etter å ha regnet ut gjennomsnittet for Oslo og Kautokeino kom Isak med følgende påstand:

«Siden gjennomsnittet for Kautokeino ble høyere enn gjennomsnittet for Oslo, må standardavviket for Kautokeino også bli høyere enn standardavviket for Oslo. Det er alltid slik at det datamaterialet som har høyest gjennomsnitt, også har høyest standardavvik.»

b) Er påstanden riktig? Begrunn svaret ditt.

En eksamensoppgave

Nedenfor ser du en liste over skuespillere som har vunnet Oscar for beste kvinnelige hovedrolle de siste 20 årene.

År	Navn	Alder
2018	Olivia Colman	44
2017	Frances McDormand	60
2016	Emma Stone	28
2015	Brie Larson	26
2014	Julianne Moore	54
2013	Cate Blanchett	44
2012	Jennifer Lawrence	22
2011	Meryl Streep	62
2010	Natalie Portman	29
2009	Sandra Bullock	45

År	Navn	Alder
2008	Kate Winslet	33
2007	Marion Cotillard	32
2006	Helen Mirren	61
2005	Reese Witherspoon	29
2004	Hilary Swank	30
2003	Charlize Theron	28
2002	Nicole Kidman	35
2001	Halle Berry	35
2000	Julia Roberts	33
1999	Hilary Swank	25

a) Bestem gjennomsnittet, medianen, variasjonsbredden og standardavviket for alderen til de kvinnelige prisvinnerne disse 20 årene.

Tabellen nedenfor viser tilsvarende verdier for skuespillere som har vunnet Oscar for beste mannlige hovedrolle de siste 20 årene.

Gjennomsnitt	44 år
Median	43,5 år
Variasjonsbredde	31 år
Standardavvik	8 år

b) Hva kan du si om aldersfordelingen blant de mannlige skuespillerne sammenliknet med de kvinnelige ut fra disse verdiene og resultatene fra oppgave a)?

Behov for å samle observasjoner

Frem til nå har vi arbeidet med datamateriale som inneholder relativt få observasjoner. Når antall observasjoner er relativt lavt går det fint å lage en liste med alle verdiene. Dersom antall observasjoner øker, vil også lista med verdier øke. Til slutt vil lista bli så lang at den blir uoversiktlig.

Dersom et datamateriale består av mange like observasjoner, kan det være hensiktsmessig å samle observasjonene i **kategorier**.

Dersom et datamateriale inneholder mange observasjoner som er nesten like, kan det være hensiktsmessig å samle observasjonene i **grupper** eller **klasser.**

Analyse av kategorier

En lærer spurte klassen hvor mange transportmidler elevene vanligvis bruker frem og tilbake til skolen. Læreren registrerte følgende svar, skrevet i stigende rekkefølge:

0 0 0 0 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 3 4 4 4 4 4 4 4 4 4 5 5 6 6

Læreren systematiserte svarene i tabellen nedenfor:

X **kategori/verdi**	**f** **frekvens**
Antall transportmidler	**Antall elever**
0	4
1	4
2	8
3	1
4	9
5	2
6	1

Når flere av svarene er like kan de samles i kategorier. Dette gir en mer ryddig presentasjon av resultatene, men medfører en utfordring når vi skal utføre en analyse over sentra- og spredningsmål.

I kategori-kolonnen (**X**) skrives hvilke svar som har blitt registrert.

I frekvens-kolonnen (**f**) skrives

Læreren ønsket deretter å gjøre en analyse av datamaterialet, og læreren ønsket å gjøre dette ut fra informasjonen presentert i tabellen.

Variasjonsbredde
Variasjonsbredde betyr forskjellen på høyeste og laveste kategori/verdi. I dette tilfellet blir det forskjellen på flest og færrest transportmidler.

Vi ser i tabellen at det høyeste svaret var 6 transportmidler, mens det laveste svaret var 0 transportmidler. Forskjellen mellom disse svarene blir: 6 – 0 = 6.

Variasjonsbredden i datamaterialet er dermed 6.

Median
Median er det **verdien** til det midterste svaret i en ordnet rekkefølge. I dette tilfellet har det blitt avgitt 29 svar og svaret i midten blir dermed svar nummer 15. Hva står det på dette svaret?

Vi ser at de fire første svarene er 0, deretter er det fire som har svart 1. Dette blir til sammen 8 svar. Videre er det åtte som ha svart 2, og til sammen utgjør dette de 16 første svarene.

Læreren var ute etter svar nummer 15, og ut fra opptellingen ovenfor skjønner læreren at svar nummer 15 var 2 transportmidler.

Medianen i tallmaterialet er dermed 2.

Spørsmål til drøfting: hva blir medianen dersom det er to svar i midten, og disse havner i hver sin kategori?

Typetall
Typetall er den kategorien/verdien med høyest frekvens. I dette tilfellet betyr det hvilket svar som ble gitt flest ganger.

I tabellen ser vi at 4 transportmidler ble svart 9 ganger, og dette svaret er det som ble avgitt flest ganger.

Typetallet i datamaterialet er dermed 4.

Spørsmål til diskusjon: hva blir typetallet dersom flere kategorier har den høyeste frekvensen?

Gjennomsnitt
Gjennomsnitt regnes ved å dividere **sum data** på **antall observasjoner**.

I dette tilfellet blir regnestykket: $\frac{sum\ transportmidler}{antall\ elever}$.

Det var 29 elever som svarte på undersøkelsen, men hvor mange transportmidler brukte klassen til sammen? For å finne ut dette må vi regne ut antall transportmidler fra hver kategori, og legge sammen disse svarene:

0 transportmidler · 4 = 0 transportmidler
1 transportmidler · 4 = 4 transportmidler
2 transportmidler · 8 = 16 transportmidler
3 transportmidler · 1 = 3 transportmidler
4 transportmidler · 9 = 36 transportmidler
5 transportmidler · 2 = 10 transportmidler
6 transportmidler · 1 = 6 transportmidler

Til sammen benytter klassen 75 transportmidler frem og tilbake til skolen. I gjennomsnitt blir dette:

$\frac{sum\ transportmidler}{antall\ elever} = \frac{75\ transportmidler}{29\ elever}$ = 2,6 transportmidler per elev.

Gjennomsnittet i datamaterialet er dermed 2,6.

Oppgave 8

En lærer spurte klassen hvor mange transportmidler elevene vanligvis bruker frem og tilbake til skolen. Læreren registrerte svarene i tabellen nedenfor:

Antall transportmidler	Frekvens	X · f	Kumulativ frekvens
0	4		
1	3		
2	8		
3	1		
4	6		
5	3		
6	2		
Sum			

Finn sentral- og spredningsmål til datamaterialet presentert i tabellen ovenfor.

Oppgave 9

En klasse oppnådde følgende karakterer på de tre første matematikkprøvene:

Karakter	Frekvens første prøve	Frekvens andre prøve	Frekvens tredje prøve
1	0	2	1
2	3	4	4
3	5	7	6
4	8	5	4
5	4	3	4
6	1	0	2

Gjør en analyse av minst en av matteprøvene fra tabellen ovenfor.

En eksamensoppgave (del 1)

Tabellen nedenfor viser karakterfordelingen ved en skole ved norskeksamen våren 2017.

Karakter	Antall elever
1	3
2	12
3	25
4	12
5	6
6	2

a) Hvor mange prosent av elevene fikk karakteren 1 eller 2?

b) Bestem mediankarakteren.

c) Bestem gjennomsnittskarakteren.

En eksamensoppgave (del 1)

Tone spiller håndball. Tabellen nedenfor viser den kumulative frekvensen for antall mål hun skåret i de seks første kampene hun spilte.

Kamp nummer	Kumulativ frekvens for antall mål Tone skåret
1	4
2	12
3	15
4	21
5	25
6	30

a) Hvor mange mål skåret Tone i kamp nummer 4?

b) Hvor mange mål skåret Tone i gjennomsnitt per kamp?

Analyse av kategorier i ExCel

En analyse av et datamateriale, også når informasjonen er kategorisert, kan gjøres raskere og mer oversiktlig i ExCel.

Nedenfor har vi gjennomført analysen av lærerens undersøkelse av antall transportmidler elevene i klassen bruker for å reise frem og tilbake til skolen:

	A	B	C	D
1	*Kolonnen brukes til å finne:*			
2	*Variasjonsbredde*	*Typetall*	*Median*	*Gjennomsnitt*
3	**x** Antall transportmidler	**f** Antall elever	Kumulativ frekvens	**x · f**
4	0	4	4	0
5	1	4	8	4
6	2	8	16	16
7	3	1	17	3
8	4	9	26	36
9	5	2	28	10
10	6	1	29	6
11	Sum	29		75
12				
13	**Median**	2		
14	**Typetall**	4		
15	**Gjennomsnitt**	2,6		
16	**Variasjonsbredde**	6		

	A	B	C	D
1	*Kolonnen brukes til å finne:*			
2	*Variasjonsbredde*	*Typetall*	*Median*	*Gjennomsnitt*
3	**x** Antall transportmidler	**f** Antall elever	Kumulativ frekvens	**x · f**
4	0	4	=B4	=A4*B4
5	1	4	=C4+B5	=A5*B5
6	2	8	=C5+B6	=A6*B6
7	3	1	=C6+B7	=A7*B7
8	4	9	=C7+B8	=A8*B8
9	5	2	=C8+B9	=A9*B9
10	6	1	=C9+B10	=A10*B10
11	Sum	=SUMMER(B4:B10)		=SUMMER(D4:D10)
12				
13	**Median**	=A6		
14	**Typetall**	=A8		
15	**Gjennomsnitt**	=D11/B11		
16	**Variasjonsbredde**	=A10-A4		

Klarer du å lage denne tabellen i ExCel?

Oppgave 10

A - og B – klassen gjennomførte en prøve. Nedenfor ser du karakterene på de 50 elevene som gjennomførte prøven:

2 3 1 3 3 5 1 2 2 4 6 2 2 1 2 3 1 2 4 4 5 2 2 3 3 1 2 4 2 5 4 4 1 2 3 2 2 3 1 5 4 2 1 5 2 3 2 4 3 1

Dette ser uoversiktlig ut, og datamaterialet gir lite informasjon slik resultatene er skrevet. Du får i oppgave å hjelpe lærerne med å presentere og analysere resultatet fra prøven.

a) Presenter resultatene i tabellen nedenfor. Pass på at du får med alle 50 resultatene.

X Karakter	**f** Frekvens
Sum	

b) Bestem hvilket poeng du ønsker å få frem, og lag et passende diagram. Lim gjerne diagrammet nederst på siden.

c) Lag en analyse av resultatene. Du velger selv om du vil gjøre det manuelt eller ved hjelp av ExCel. Skriv eller lim gjerne inn analysen nederst på siden.

Oppgave 11

Liverpool FC	
Antall mål per kamp	Frekvens
0	8
1	14
2	7
3	4
4	3
5	1
6	1

Newcastle United FC	
Antall mål per kamp	Frekvens
0	14
1	13
2	7
3	2
4	0
5	1
6	1

Tabellene ovenfor viser hvor mange mål Liverpool FC og Newcastle United FC skåret per kamp i sesongen 2015–2016

Bestem gjennomsnittet, median, typetall og variasjonsbredden for antall skårede mål per kamp for begge klubbene.

Oppgave 12

I løpet av første termin hadde en klasse gjennomført 3 prøver i matematikk. Læreren hadde registrert følgende karakterer på prøvene:

Karakter	Frekvens første prøve	Frekvens andre prøve	Frekvens tredje prøve
1	0	2	1
2	3	4	4
3	5	7	6
4	8	5	4
5	4	3	4
6	1	0	2

Lag en analyse av de tre prøvene, og kommenter resultatene.

Analyse av data i grupper

Noen undersøkelser produserer et datamateriale hvor mange av observasjonene er nesten like, men ikke helt identiske. Dersom vi skal presentere resultater fra slike undersøkelser kan det være hensiktsmessig å samle relativt like observasjoner i grupper.

I slike grupper må vi spesifisere nederste og øverste verdi, slik at det er tydelig hvilke observasjoner som skal registreres. Vi bruker gjerne formuleringene «fra og med» og «opp til». Husk: en observasjon skal ikke registreres i 2 ulike grupper.

Tenk deg at skolen ønsker å kjøpe skolegenser til alle elevene på skolen, og at disse genserne er tilgjengelig i størrelsene S, M, L og XL. Skolens innkjøpsansvarlig antar at størrelsene avgjøres av høyden til elevene, og sendte følgende bestillingsskjema:

<table>
<tr><td rowspan="5">
</td><td>X
Høyde i cm</td><td>Størrelse</td><td>f
frekvens</td></tr>
<tr><td>[140 – 150></td><td>S</td><td></td></tr>
<tr><td>[150 – 165></td><td>M</td><td></td></tr>
<tr><td>[165 – 184></td><td>L</td><td></td></tr>
<tr><td>[184 – 200></td><td>XL</td><td></td></tr>
</table>

Lærerne for vg2 registrerte følgende høyder på elevene sine, målt i hele cm og ordnet i stigende rekkefølge:

142, 144, 144, 147, 148, 148, 150, 151, 151, 153, 154, 156, 156, 156, 156, 157, 157, 159, 159, 159, 160, 161, 163, 163, 164, 164, 165, 165, 165, 166, 166, 167, 167, 167, 168, 168, 169, 169, 170, 170, 170, 171, 171, 172, 172, 172, 173, 173, 173, 173, 174, 175, 175, 176, 177, 178, 178, 179, 179, 179, 180, 180, 180, 181, 181, 181, 182, 182, 184, 184, 184, 185, 185, 186, 186, 187, 187, 188, 189

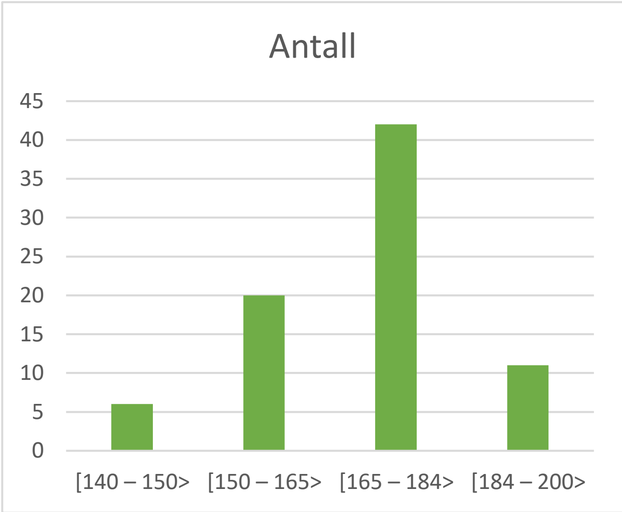
Spørsmål til diskusjon: i hvilken gruppe skal personer som måler 150, 165 og 184 plasseres?

Spørsmål til diskusjon: hvordan ville et søylediagram laget av datamaterialet ovenfor sett ut?

Kan du fullføre bestillingen til lærerne for vg2?

Lærerne fra vg2 returnerte følgende bestilling:

X Høyde i cm	Størrelse	**f** frekvens
[140 – 150>	S	6
[150 – 165>	M	20
[165 – 184>	L	42
[184 – 200>	XL	11



Da innkjøpsansvarlig mottok bestillingen kom det et ønske om å finne gjennomsnittshøyden og medianhøyden til elevene på påbygg. Innkjøpsansvarlig har ikke informasjon om høyden til hver enkelt elev, og denne analysen må gjøres på bakgrunn av datamaterialet presentert i tabellen ovenfor.

Gjennomsnitt i et gruppert materiale

Når informasjonen er presentert i et gruppert materiale vet vi kun hvor mange elever som er registrert i hver gruppe, men vi har ingen mulighet til å finne informasjon om hver enkelt elevs høyde. Dermed må vi anta at elevenes høyde fordeler seg slik innenfor en gruppe at vi kan tillegge alle elevene i den gruppa en høyde som er midt i gruppa. Dette kalles gruppas midtpunkt.

Det er registrert 6 elever i gruppa [140 – 150>. Når vi skal regne den samlete høyden til disse 6 elevene antar vi at alle 6 elevene er 145 cm høye, fordi 145 cm er midt mellom 140 cm og 150 cm. Tilsvarende gjelder for de andre gruppene.

Deretter blir regningen identisk med regningen på side 35. Vi har valgt å utføre regningen ved hjelp av ExCel:

	A	B	C	D	E
1	Høyde		**Xm**	**f**	
2	Fra og med	Opp til	Midtpunkt	Frekvens	**Xm · f**
3	140	150	145	6	870
4	150	165	157,5	20	3150
5	165	184	174,5	42	7329
6	184	200	192	11	2112
7			Sum	79	13461
8					
9	Gjennomsnitt	170			

	A	B	C	D	E
1	Høyde		**Xm**	**f**	
2	Fra og med	Opp til	Midtpunkt	Frekvens	**Xm · f**
3	140	150	=(A3+B3)/2	6	=C3*D3
4	150	165	=(A4+B4)/2	20	=C4*D4
5	165	184	=(A5+B5)/2	42	=C5*D5
6	184	200	=(A6+B6)/2	11	=C6*D6
7			Sum	=SUMMER(D3:D6)	=SUMMER(E3:E6)
8					
9	Gjennomsnitt	=E7/D7			

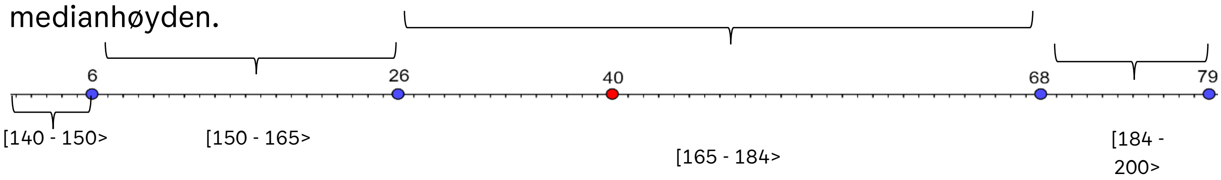
Spørsmål til diskusjon: hvorfor har vi brukt parenteser i utregningen i kolonne C?

Median i et gruppert materiale

Informasjonen i tabellen forteller at det er 79 elever på vg2. Medianhøyden er høyden til elev nummer 40 i ordnet rekkefølge.

Steg 1 – i hvilken gruppe finner vi medianhøyden?

Ved å bruke kumulativ frekvens finner vi at elev nummer 40 er i gruppen med høyde [165 – 184>. Dette kan også visualiseres ved en tallinje. Tallene skrevet med blått markerer høyeste elev i hver gruppe. Tallet skrevet med rødt markerer eleven med medianhøyden.



Steg 2 – hvor i gruppa finner vi medianhøyden?

For å kunne si noe mer spesifikt om medianhøyden må vi gjøre en antakelse. Vi må anta at høyden til elevene er fordelt jevnt utover gruppa. Tallinjen ovenfor viser at medianhøyden sannsynligvis finnes i gruppas nedre halvdel, og nærmere 165 cm enn 184 cm.

Steg 3 – kan vi anslå en tilnærmet verdi?

Gruppa hvor vi finner medianen har en bredde på 19 cm. Antall elever som fikk registrert høyden sin i denne gruppa er 42. Medianens nummer i gruppa er 14.
Vi antar at elevenes høyde er jevnt fordelt utover gruppa. I vårt tilfelle betyr det at gruppebreddens 19 cm fordeles jevnt over høyden til de 42 elevene som ble registrert i gruppa. Det betyr at vi tenker at hver elev er 0,45 cm høyere enn forrige elev.

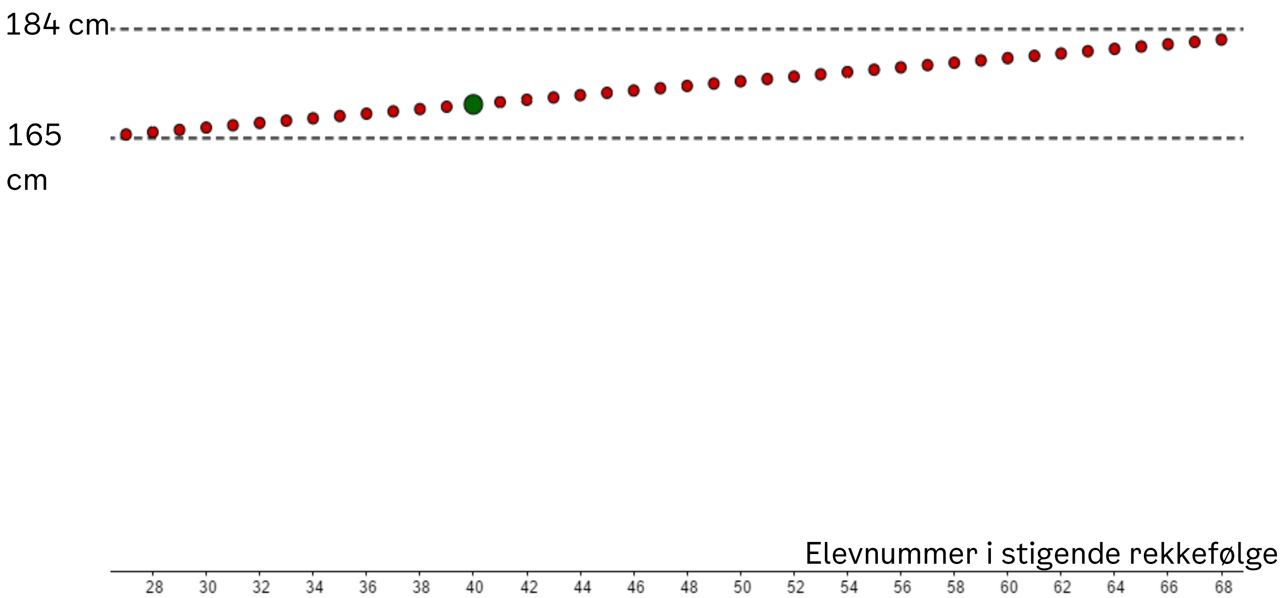
Gruppens nedre grense er 165 cm. I og med at medianhøyden er nummer 14 i denne gruppa, betyr det at høyden har vokst med 0,45 cm fjorten ganger fra 165 cm. Vi kan dermed utføre følgende regnestykke:

165 cm + 0,45 cm · 14 = 165 cm + 6,3 cm = 171 cm.

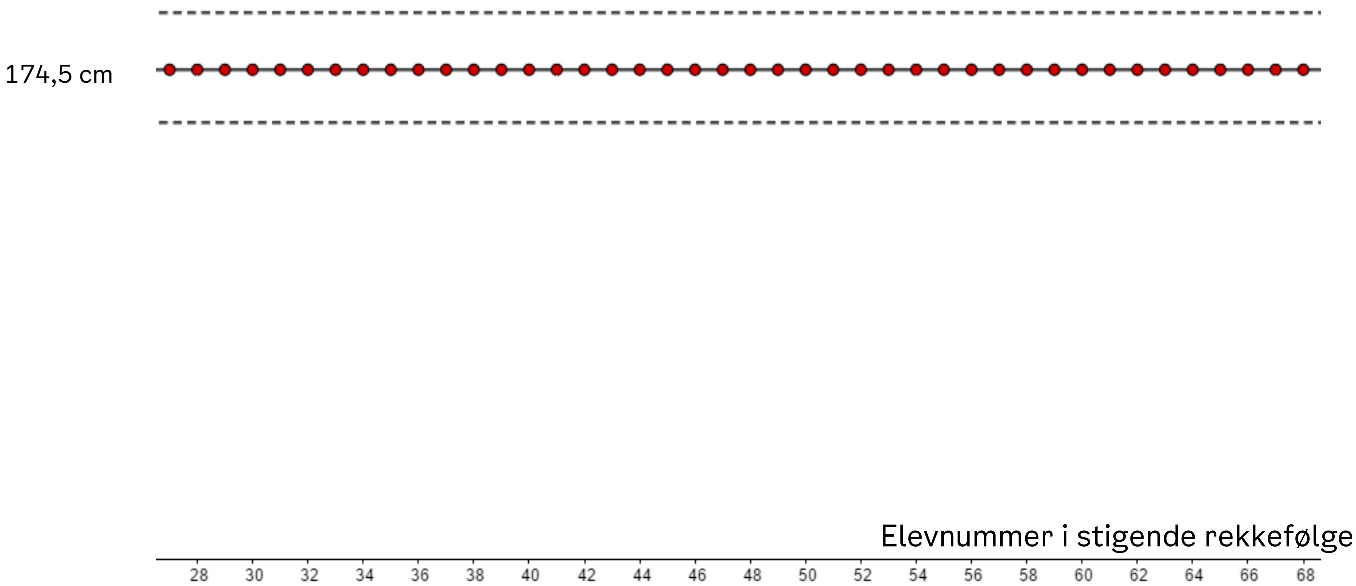
Generelt kan du regne ut medianen i gruppert materiale slik:

Median = $\mathit{nedre\ grense} + \dfrac{\mathit{gruppebredden}}{\mathit{antall\ observasjoner\ i\ gruppa}} \cdot \mathit{medianens\ nummer\ i\ gruppa}$

Visualisering av fordeling av høyder i gruppa [165 – 184>, median:
Ved å kun studere tabellen på side 41 har vi ingen mulighet til å vite høyden til hver enkelt elev. Vi antar dermed at høyden til den laveste eleven er 165 cm og at høyden til de andre elevene vokser jevnt opp mot 184 cm. De 42 elevene med høyde registrert i denne gruppa kan dermed visualiseres slik, hvor høyden på hver enkelt elev er markert med et rødt punkt:



Visualisering av fordeling av høyder i gruppa [165 – 184>, gjennomsnitt:
Ved å kun studere tabellen på side 41 har vi ingen mulighet til å vite høyden til hver enkelt elev. Vi antar dermed at høyden til alle elevene i denne gruppa er identisk med gruppas midtpunkt. Dette kan visualiseres slik:



Oppgave 13

I oppgave 10 viste vi en oversikt over hvor mange ganger hver enkelt elev på Hellerud måtte være i karantene. Nedenfor finner du en oversikt over hvor mange dager hver enkelt elev har vært i karantene.

X Antall dager i karantene	f Frekvens
[0 – 5>	75
[5 – 10>	235
[10 – 20>	100
[20 – 30>	150
[30 – 35>	25

Lag en presentasjon og en analyse av datamaterialet. Du velger selv hvilket diagram du ønsker å bruke. I analysen skal du presentere relevante sentralmål.

Oppgave 14

Tabellen nedenfor viser gruppering av årsinntekt for lønnsmottakere i en tenkt kommune i Norge. Inntekten er oppgitt i antall 1 000 kroner.

Inntekt	Frekvens
[0, 100>	467
[100, 200>	678
[200, 300>	1490
[300, 400>	2653
[400, 500>	3785
[500, 750>	4106
[750, 1000>	987
[1000, 5000>	45

Finn gjennomsnittslønnen og medianlønnen for lønnsmottakere i denne kommunen.

Histogram

Når vi skal presentere resultatene fra et klassedelt materiale i et diagram, bruker vi histogram. Histogram ser ut som et søylediagram hvor søylen er tegnet inntil hverandre. Imidlertid er det størrelsen (arealet) på søylen som viser antall observasjoner (og ikke høyden, som ved et søylediagram). Vi må derfor regne ut både **klassebredden** og **søylehøyden**.

Klassebredden er forskjellen mellom nedre og øvre grense i klassen. **Søylehøyden** regner vi ved å dividere **frekvens** på **klassebredde**.

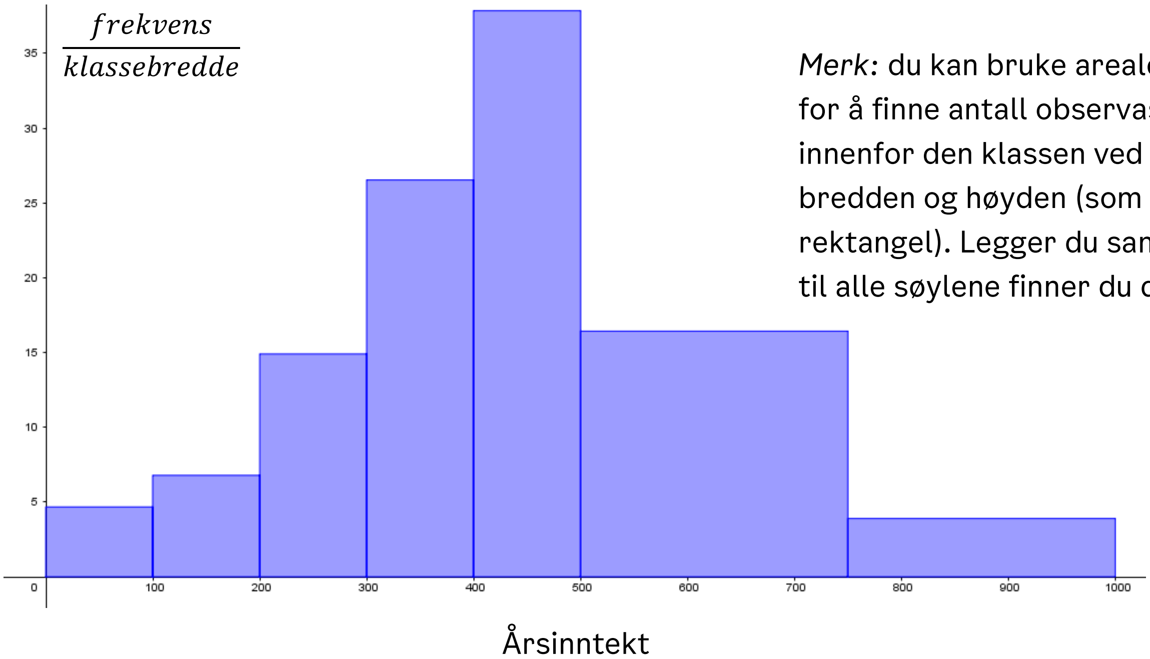
$$\frac{frekvens}{klassebredde} = søylehøyde$$

Eksempel:

Fremstill resultatene fra undersøkelsen om årsinntekt i et histogram.

Inntekt	Frekvens	Klassebredde	Søylehøyde
[0, 100>	467	100	4,67
[100, 200>	678	100	6,78
[200, 300>	1490	100	14,9
[300, 400>	2653	100	26,53
[400, 500>	3785	100	37,85
[500, 750>	4106	250	16,43
[750, 1000>	987	250	3,9

Resultatet blir da slik:



Merk: du kan bruke arealet til en søyle for å finne antall observasjoner innenfor den klassen ved å multiplisere bredden og høyden (som arealet til et rektangel). Legger du sammen arealet til alle søylene finner du det totale

En eksamensoppgave (del 1)

Lise har hentet inn informasjon om høyden på husene i området der hun bor.

Høyde (meter)	Antall hus
$[3,5\rangle$	2
$[5,7\rangle$	8
$[7,9\rangle$	10
$[9,13\rangle$	8

a) Bestem gjennomsnittshøyden på husene i området der Lise bor.

b) Framstill datamaterialet i et histogram.

En eksamensoppgave (del 1)

Tabellen nedenfor viser en oversikt over høydene til elevene ved en skole.

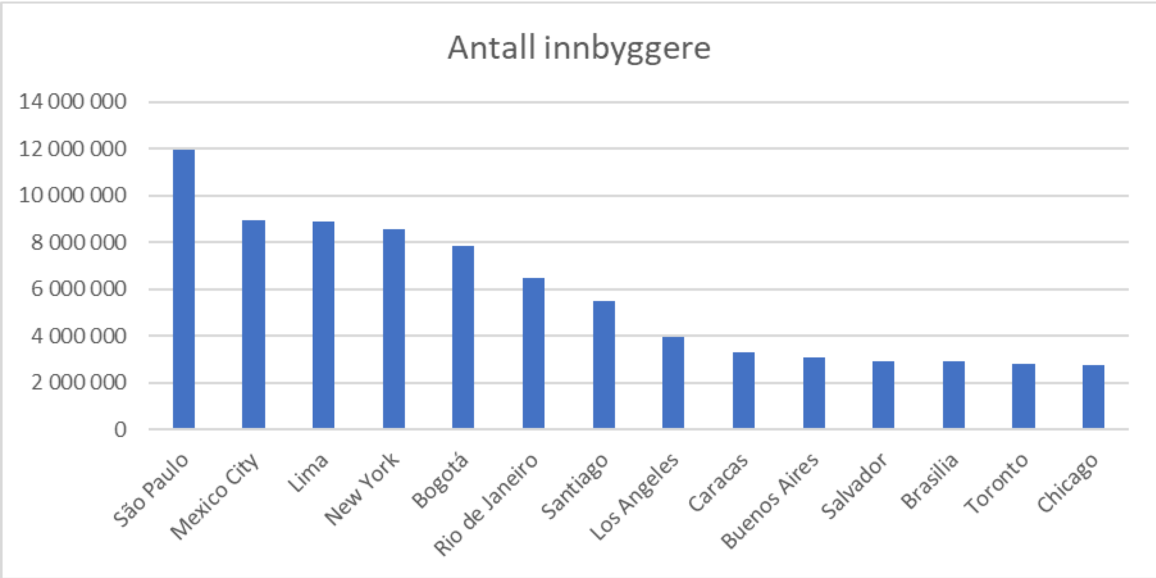
Høyde i cm	Frekvens
$[150,160\rangle$	10
$[160,170\rangle$	30
$[170,180\rangle$	50
$[180,200\rangle$	10

a) Bestem gjennomsnittshøyden til elevene ved skolen.

b) Lag et histogram som viser fordelingen av høydene.

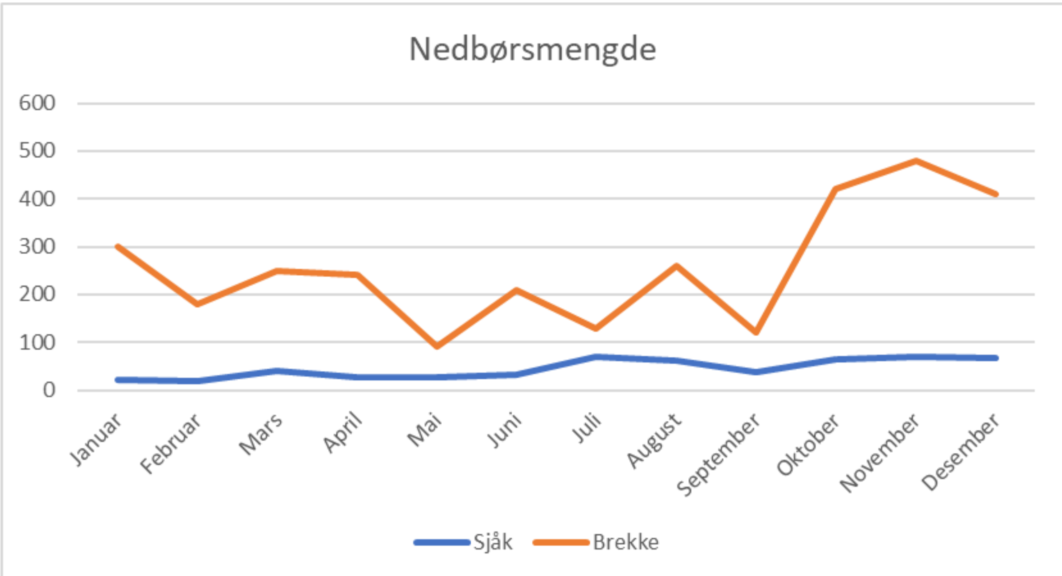
Løsningsforslag

Oppgave 1



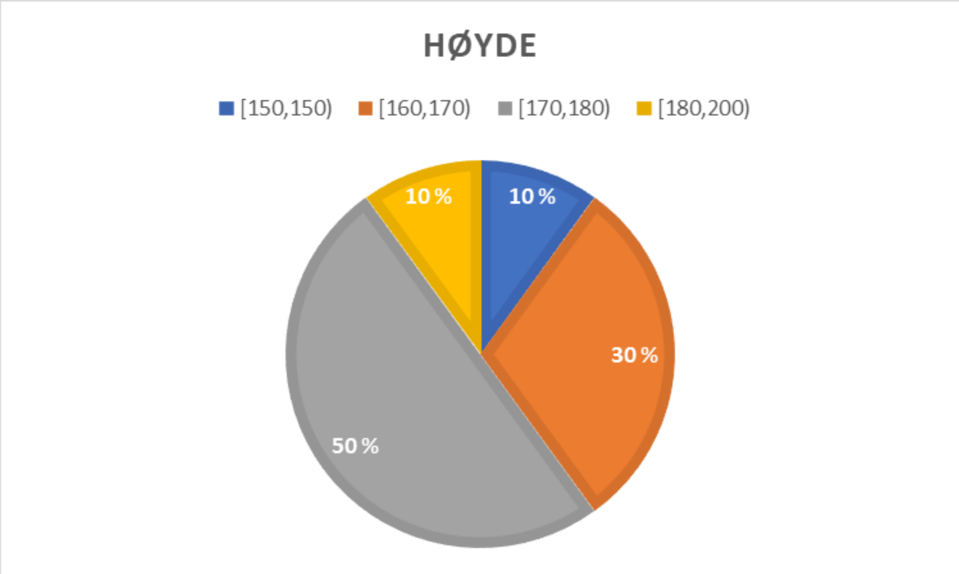
Vi valgte søylediagram, fordi tabellen kun viser et utvalg av byene i Sør- og Nord-Amerika.

Oppgave 2



Utvikling over tid er mest hensiktsmessig å vise gjennom et linjediagram.

Oppgave 3



Et sektordiagram er mest hensiktsmessig å benytte når den prosentvise fordelingen skal vises.

Oppgave 4

a) Det er to karakterer i midten (3 og 4). Medianen blir da 3,5.

b) Denne eleven fikk flest 3-ere.

c) Gjennomsnittskarakteren er 3,7.

d) Eleven fikk karakteren 5 på omtrent 17 % av prøvene.

e) Den beste prøven var 4 karakterer bedre enn den dårligste.

Oppgave 5

Vi spurte 8 elever hvor mye penger de hadde brukt i kantina i storefri. Nedenfor finner du svarene de ga (i kroner):

55, 70, 45, 60, 130, 50, 65 og 70

a) Den som brukte mest penger brukte 85 kroner mer enn den som brukte minst.

b) I gjennomsnitt brukte elevene omtrent 68 kroner.

c) Midtpunktet til datamaterialet er 62,50 kroner.

d) 37,5 % av elevene brukte mer enn gjennomsnittet, mens 62,5 % av de spurte brukte mindre enn gjennomsnittet.

Oppgave 6

I gjennomsnitt bor det 5 705 357 mennesker i hver av byene.
Mediantantall innbyggere er 4 739 500.
Det bor 9 247 000 flere innbyggere i den største enn i den minste av byene på lista.
Ingen av byene har likt innbyggertall.

Oppgave 7

	A	B	C
1	Måned	Sjåk	Brekke
2	Januar	22	300
3	Februar	20	180
4	Mars	41	250
5	April	28	240
6	Mai	26	90
7	Juni	32	210
8	Juli	71	130
9	August	62	260
10	September	38	120
11	Oktober	65	420
12	November	70	480
13	Desember	66	410
14			
15	Gjennomsnitt	45,1	257,5
16	Median	39,5	245
17	Typetall	#I/T	#I/T
18	Variasjonsbredde	51	390
19	Standardavvik	19,3	120,0

	A	B	C
1	Måned	Sjåk	Brekke
2	Januar	22	300
3	Februar	20	180
4	Mars	41	250
5	April	28	240
6	Mai	26	90
7	Juni	32	210
8	Juli	71	130
9	August	62	260
10	September	38	120
11	Oktober	65	420
12	November	70	480
13	Desember	66	410
14			
15	Gjennomsnitt	=GJENNOMSNITT(B2:B13)	=GJENNOMSNITT(C2:C13)
16	Median	=MEDIAN(B2:B13)	=MEDIAN(C2:C13)
17	Typetall	=MODUS(B2:B13)	=MODUS(C2:C13)
18	Variasjonsbredde	=MAKSA(B2:B13)-MIN(B2:B13)	=MAKSA(C2:C13)-MIN(C2:C13)
19	Standardavvik	=STDAV.P(B2:B13)	=STDAV.P(C2:C13)

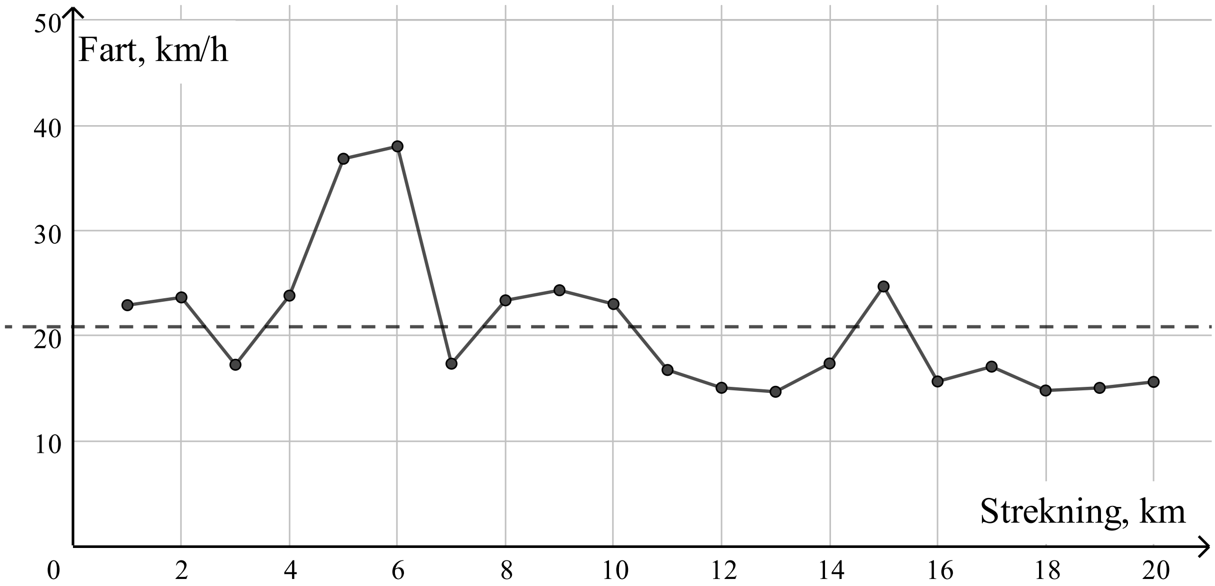
Eksamensoppgave side 97

Jeg skrev inn tallene i hver sin kolonne i regnearket i GeoGebra. Jeg laget lista «fart» av tallene for fart og brukte funksjonen «gsnitt» på lista «fart» for å finne gjennomsnittsfarten på turen. Gjennomsnittsfarten ble 20,87 km/h.

Tiden brukt på turen blir da

$$\frac{20\text{ km}}{20{,}87\text{ km/h}} = 0{,}958\,h$$
$$= 0{,}958 \cdot 60\text{ min} = 57{,}50\text{ min} = 57\text{min}30\text{s}$$

Jeg brukte verktøyet «Polylinje» på kolonnene for km og fart og fikk tegnet en fartsprofil for turen, se nedenfor. Gjennomsnittsfarten på 20,87 km/h er tegnet inn som en stiplet linje.



Vi ser at farten har gått både opp og ned, men det gikk saktere i siste halvdelen av turen enn i første.

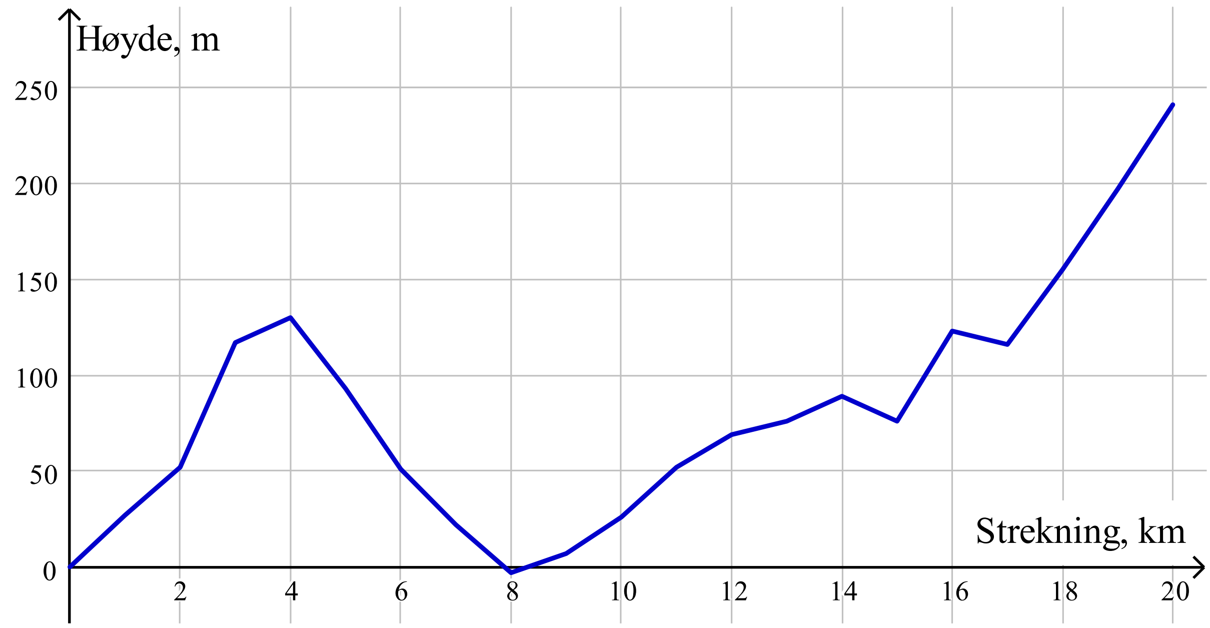
Jeg laget en ny kolonne i regnearket med de akkumulerte tallene for stigning, altså at tallene for hver km er lik summen av alle stigningene på kilometerne som alt er syklet.

	A	B	C	D
1	Kilometer	Gjennomsnittsfart denne kilometeren (km/h)	Stigning denne kilometeren (m)	Akkumulert stigning (m)
2	1	22.92	27	27
3	2	23.66	25	52
4	3	17.26	65	117
5	4	23.83	13	130

	A	B	C	D
1	Kilometer	Gjennomsnittsfart denne kilometeren (km/h)	Stigning denne kilometeren (m)	Akkumulert stigning (m)
2	1	22.92	27	C2
3	2	23.66	25	D2 + C3
4	3	17.26	65	D3 + C4
5	4	23.83	13	D4 + C5

Jeg brukte verktøyet «Polylinje» på kolonnene for kilometer og for akkumulert stigning og fikk tegnet en høydeprofil for turen, se nedenfor. Jeg lot turen starte på høyde null og la derfor inn punktet (0, 0) i lista for polylinja for at den skulle starte i origo. (Punktene U, V, osv. ble dannet automatisk av kommandoen «Polylinje».)

høyde = Polylinje {(0, 0), U, V, W,



Vi ser at turen går mest oppover. Det er hovedsakelig bare fra 4 km til 8 km at det går nedover. Vi ser også at der det går nedover, er farten stor, og motsatt.

Kommentar:

Det går også an å bruke regneark i Excel til å løse denne oppgaven. Det er til og med mulig å tegne og skrive for hånd og ta bilde av det med webkameraet, dersom PC-en du skal levere inn eksamensoppgaven med, har webkamera.

Det er flere ting som kan regnes ut eller diskuteres, for eksempel gjennomsnittsstigningen per km eller gjennomsnittshøyden. Vi kan for eksempel undersøke om det er slik overalt at jo brattere oppover det er, jo saktere sykler han.

Eksamensoppgave side 97

Bruker Excel.

	A	B	C
1	**Snødybde (cm) på julaften**		
2	**År**	**Oslo**	**Kautokeino**
3	2009	15	44
4	2010	13	38
5	2011	0	31
6	2012	12	49
7	2013	0	53
8	2014	5	36
9	2015	0	44
10	2016	0	38
11	2017	5	48
12	2018	10	20
13	2019	0	50
14	**Gjennomsnitt**	**5,45**	**41,00**
15	**Std.av.**	**5,73**	**9,24**

b)

Påstanden er ikke riktig. Standardavviket sier noe om spredningen i tallmaterialet. Vi kan ha et datamateriale med høyt gjennomsnitt, men med mange tilnærmet like verdier; da vil standardavviket være lite selv om gjennomsnittet er høyt. Omvendt kan det være et datamateriale med mange veldig forskjellige verdier, som gir et høyt standardavvik uavhengig av gjennomsnittet.

Eksamensoppgave side 99

a)

Bruker funksjonene i Excel og får følgende statistikk:

B	C	D	E	F
Alder i år				
44				
60				
28		Gjennomsnitt	37,75	år
26		Eldst	62	år
54		Yngst	22	år
44		Variasjonsbredde	40	år
22		Median	33	år
62		Standaravvik	12,6984251	år
29				
45				
33				
32				
61				
29				
30				
28				
35				
35				
33				
25				

b)

Mennene er 6-7 år eldre enn damene, når de vinner en Oscar. Begge spredningsmålene forteller oss også at det er en mindre aldersvariasjon blant menn.

Oppgave 8

Antall transportmidler	Frekvens	X · f	Kumulativt
0	4	0	4
1	3	3	7
2	8	16	15
3	1	3	16
4	6	24	22
5	3	15	25
6	2	12	27
Sum	27	73	

Analyse:

Typetall: 2 transportmidler

Variasjonsbredde: 6 transportmidler

Gjennomsnitt: 2,7 transportmidler

Median: 2 transportmidler

Oppgave 9

Analyse:	Første prøve	Andre prøve	Tredje prøve
Typetall	4	3	3
Variasjonsbredde	4	4	5
Gjennomsnitt	3,8	3,1	3,6
Median	4	3	3

Eksamensoppgave side 103

a) 25 % fikk karakteren 1 eller 2

b) Mediankarakteren var 3

c) Gjennomsnittskarakteren var 3,2

Eksamensoppgave side 104

a) Tone skåret 6 mål i kamp nr. 4

b) Tone skåret 5 mål i gjennomsnitt per kamp

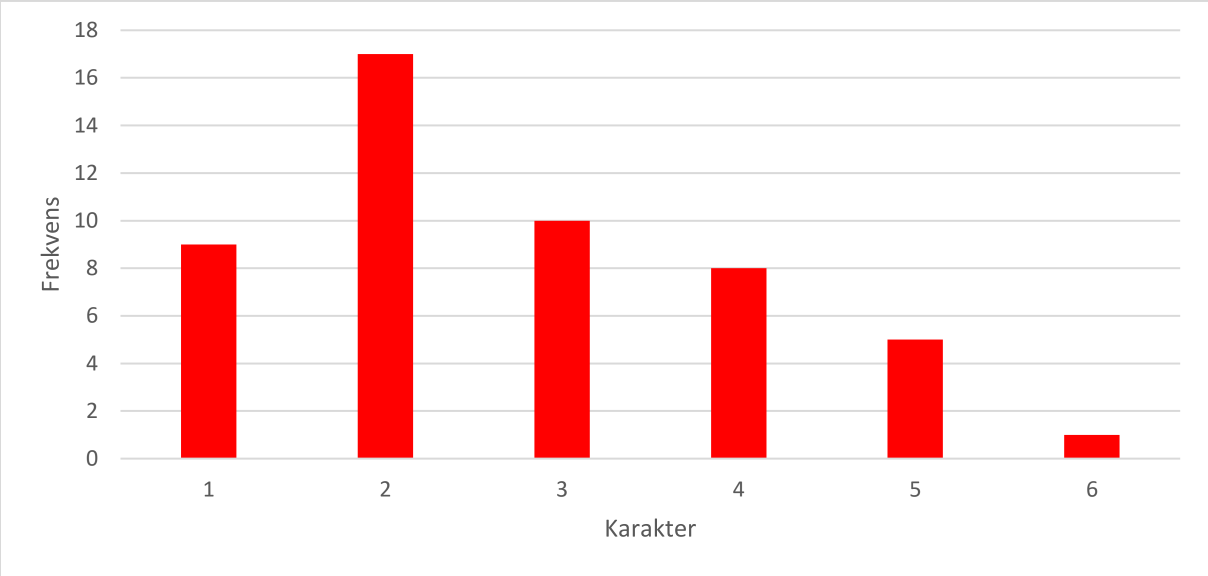
Oppgave 10

a)

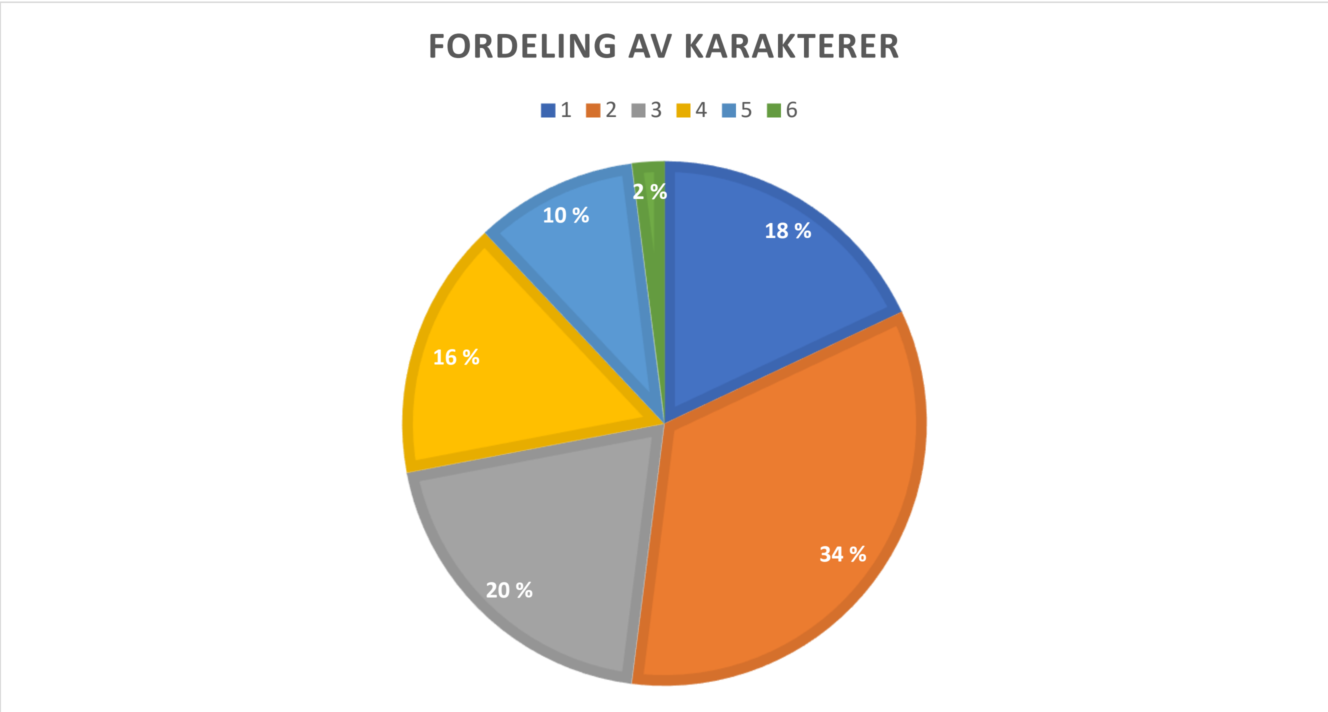
X Karakter	f Frekvens
1	9
2	17
3	10
4	8
5	5
6	1
Sum	50

b) Presentasjon av resultatet:

Antall:



Prosentvis fordeling av karakterer:



Oppgave 11

	A	B	C	D	E	F	G
1			Liverpool			Newcastle	
2	Ant. Mål	Frekvens	Sum mål	Kumulativt	Frekvens	Sum mål	Kumulativt
3	0	8	0	8	14	0	14
4	1	14	14	22	13	13	27
5	2	7	14	29	7	14	34
6	3	4	12	33	2	6	36
7	4	3	12	36	0	0	36
8	5	1	5	37	1	5	37
9	6	1	6	38	1	6	38
10	Sum	38	63		38	44	
11							
12	Analyse:	Liverpool	Newcastle				
13	Typetall	1	0				
14	Variasjonsbredde	6	6				
15	Gjennomsnitt	1,7	1,2				
16	Median	1	0,5				

	A	B	C	D	E	F	G
1			Liverpool			Newcastle	
2	Ant. Mål	Frekvens	Sum mål	Kumulativt	Frekvens	Sum mål	Kumulativt
3	0	8	=A3*B3	=B3	14	=A3*E3	=E3
4	1	14	=A4*B4	=D3+B4	13	=A4*E4	=G3+E4
5	2	7	=A5*B5	=D4+B5	7	=A5*E5	=G4+E5
6	3	4	=A6*B6	=D5+B6	2	=A6*E6	=G5+E6
7	4	3	=A7*B7	=D6+B7	0	=A7*E7	=G6+E7
8	5	1	=A8*B8	=D7+B8	1	=A8*E8	=G7+E8
9	6	1	=A9*B9	=D8+B9	1	=A9*E9	=G8+E9
10	Sum	=SUMMER(B3:B9)	=SUMMER(C3:C9)		=SUMMER(E3:E9)	=SUMMER(F3:F9)	
11							
12	Analyse:	Liverpool	Newcastle				
13	Typetall	=A4	=A3				
14	Variasjonsbredde	=A9-A3	=A9-A3				
15	Gjennomsnitt	=C10/B10	=F10/E10				
16	Median	=A4	=(A3+A4)/2				

Oppgave 12

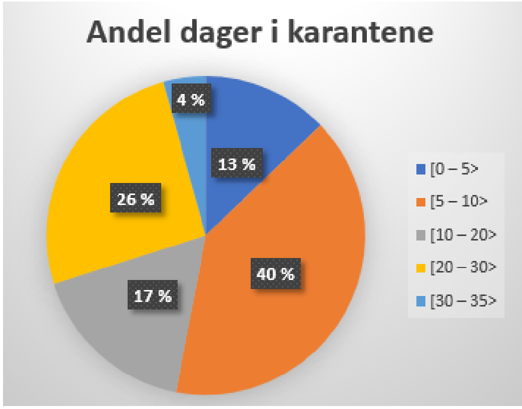
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1			Første prøve				Andre prøve				Sum verdier		
2	Karakter	Frekvens	Sum verdier	Relativt	Kumulativt	Frekvens	Sum verdier	Relativt	Kumulativt	Frekvens	Sum verdier	Relativt	Kumulativt
3	1	0	0	0 %	0	2	2	10 %	2	1	1	5 %	1
4	2	3	6	14 %	3	4	8	19 %	6	4	8	19 %	5
5	3	5	15	24 %	8	7	21	33 %	13	6	18	29 %	11
6	4	8	32	38 %	16	5	20	24 %	18	4	16	19 %	15
7	5	4	20	19 %	20	3	15	14 %	21	4	20	19 %	19
8	6	1	6	5 %	21	0	0	0 %	21	2	12	10 %	21
9	Sum	21	79	100 %		21	66	100 %		21	75	100 %	
10													
11	Analyse:	Første prøve	Andre prøve	Tredje prøve									
12	Typetall	4	3	3									
13	Variasjonsbredde	4	4	5									
14	Gjennomsnitt	3,8	3,1	3,6									
15	Median	4	3	3									
16													
17	I tillegg kan det være interessant å sammenligne hvor mange prosent av elevene som fikk hver av karakterene på hver av prøvene.												

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1			Første prøve				Andre prøve				Sum verdier		
2	Karakter	Frekvens	Sum verdier	Relativt	Kumulativt	Frekvens	Sum verdier	Relativt	Kumulativt	Frekvens	Sum verdier	Relativt	Kumulativt
3	1	0	=A3*B3	=B3/$B$9	=B3	2	=A3*F3	=F3/$F$9	=F3	1	=A3*J3	=J3/$J$9	=J3
4	2	3	=A4*B4	=B4/$B$9	=E3+B4	4	=A4*F4	=F4/$F$9	=I3+F4	4	=A4*J4	=J4/$J$9	=M3+J4
5	3	5	=A5*B5	=B5/$B$9	=E4+B5	7	=A5*F5	=F5/$F$9	=I4+F5	6	=A5*J5	=J5/$J$9	=M4+J5
6	4	8	=A6*B6	=B6/$B$9	=E5+B6	5	=A6*F6	=F6/$F$9	=I5+F6	4	=A6*J6	=J6/$J$9	=M5+J6
7	5	4	=A7*B7	=B7/$B$9	=E6+B7	3	=A7*F7	=F7/$F$9	=I6+F7	4	=A7*J7	=J7/$J$9	=M6+J7
8	6	1	=A8*B8	=B8/$B$9	=E7+B8	0	=A8*F8	=F8/$F$9	=I7+F8	2	=A8*J8	=J8/$J$9	=M7+J8
9	Sum	=SUMMER(B3:B8)	=SUMMER(C3:C8)	=SUMMER(D3:D8)		=SUMMER(F3:F8)	=SUMMER(G3:G8)	=SUMMER(H3:H8)		=SUMMER(J3:J8)	=SUMMER(K3:K8)	=SUMMER(L3:L8)	
10													
11	Analyse:	Første prøve	Andre prøve	Tredje prøve									
12	Typetall	=A6	=A5	=A5									
13	Variasjonsbredde	=A8-A4	=A7-A3	=A8-A3									
14	Gjennomsnitt	=C9/B9	=G9/F9	=K9/J9									
15	Median	=A6	=A5	=A5									

Oppgave 13

Antall registrerte i hver gruppe

Prosentvis fordeling av dager i karantene



	A	B	C	D	E	F
1	X		f			
2	Antall dager i karantene		Frekvens	Xm	Xm · f	Kumulativ frekvens
3	F.o.m	til				
4	0	5	75	2,5	187,5	75
5	5	10	235	7,5	1762,5	310
6	10	20	100	15	1500	410
7	20	30	150	25	3750	560
8	30	35	25	32,5	812,5	585
9		Sum	585		8012,5	
10						
11	Gjennomsnitt	14				
12	Median					
13	Steg 1	Er i gruppe [5 - 10>				
14	Steg 2	Er sannsynligvis høyt i gruppe [5 - 10>				
15	Steg 3	9,8				

	A	B	C	D	E	F
1	X		f			
2	Antall dager i karantene		Frekvens	Xm	Xm · f	Kumulativ frekvens
3	F.o.m	til				
4	0	5	75	=(A4+B4)/2	=D4*C4	=C4
5	5	10	235	=(A5+B5)/2	=D5*C5	=F4+C5
6	10	20	100	=(A6+B6)/2	=D6*C6	=F5+C6
7	20	30	150	=(A7+B7)/2	=D7*C7	=F6+C7
8	30	35	25	=(A8+B8)/2	=D8*C8	=F7+C8
9		Sum	=SUMMER(C4:C8)		=SUMMER(E4:E8)	
10						
11	Gjennomsnitt	=E9/C9				
12	Median					
13	Steg 1	Er i gruppe [5 - 1				
14	Steg 2	Er sannsynligvis				
15	Steg 3	=A5+(5/C5*225)				

Oppgave 14

	A	B	C	D	E	F
1	X		f	Xm	Xm · f	Kumulativ frekvens
2	Inntekt		Frekvens			
3	F.o.m	til				
4	0	100	467	50	23350	467
5	100	200	678	150	101700	1145
6	200	300	1490	250	372500	2635
7	300	400	2653	350	928550	5288
8	400	500	3785	450	1703250	9073
9	500	750	4106	625	2566250	13179
10	750	1000	987	875	863625	14166
11	1000	5000	45	3000	135000	14211
12		Sum	14211		6694225	
13						
14	Gjennomsnitt	471				
15	Median	Person nummer 7 106				
16	Steg 1	Er i gruppe [400 - 500>				
17	Steg 2	Er omtrent midt i gruppe [400 - 500]				
18	Steg 3	448				

	A	B	C	D	E	F
1	X		f	Xm	Xm · f	Kumulativ frekvens
2	Inntekt		Frekvens			
3	F.o.m	til				
4	0	100	467	=(A4+B4)/2	=D4*C4	=C4
5	100	200	678	=(A5+B5)/2	=D5*C5	=F4+C5
6	200	300	1490	=(A6+B6)/2	=D6*C6	=F5+C6
7	300	400	2653	=(A7+B7)/2	=D7*C7	=F6+C7
8	400	500	3785	=(A8+B8)/2	=D8*C8	=F7+C8
9	500	750	4106	=(A9+B9)/2	=D9*C9	=F8+C9
10	750	1000	987	=(A10+B10)/2	=D10*C10	=F9+C10
11	1000	5000	45	=(A11+B11)/2	=D11*C11	=F10+C11
12		Sum	=SUMMER(C4:C11)		=SUMMER(E4:E11)	
13						
14	Gjennomsnitt	=E12/C12				
15	Median	Person nummer 7 1				
16	Steg 1	Er i gruppe [400 - 50				
17	Steg 2	Er omtrent midt i gr				
18	Steg 3	=A8+(100/C8*1818)				

Eksamensoppgave side 114

a)

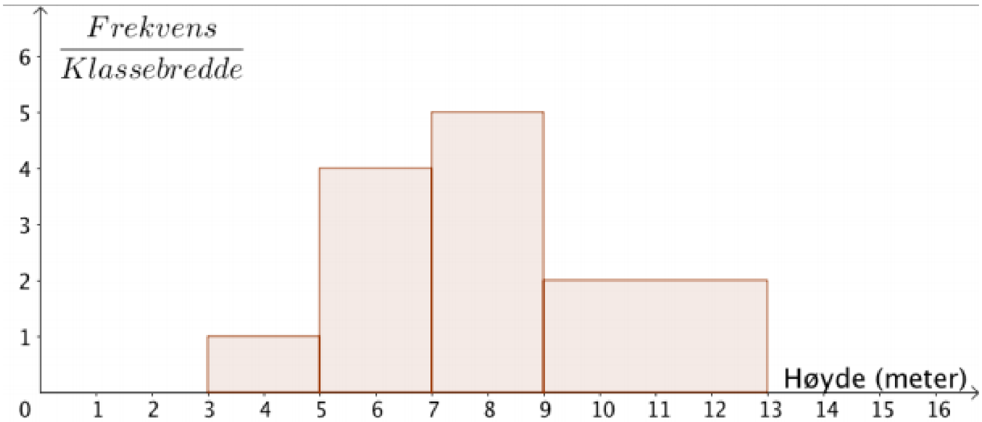
$$\frac{4\cdot 2+6\cdot 8+8\cdot 10+11\cdot 8}{2+8+10+8}=\frac{8+48+80+88}{28}=\frac{224}{28}=\frac{112}{14}=\frac{56}{7}=8$$

<u>Gjennomsnittshøyden på husene i området der Lise bor er 8 meter.</u>

b) Regner ut histogramhøydene, som er gitt ved $\frac{\text{Frekvens}}{\text{Klassebredde}}$

$\frac{2}{2}=1 \quad \frac{8}{2}=4 \quad \frac{10}{2}=5 \quad \frac{8}{4}=2$

Tegner histogrammet:



Eksamensoppgave side 114

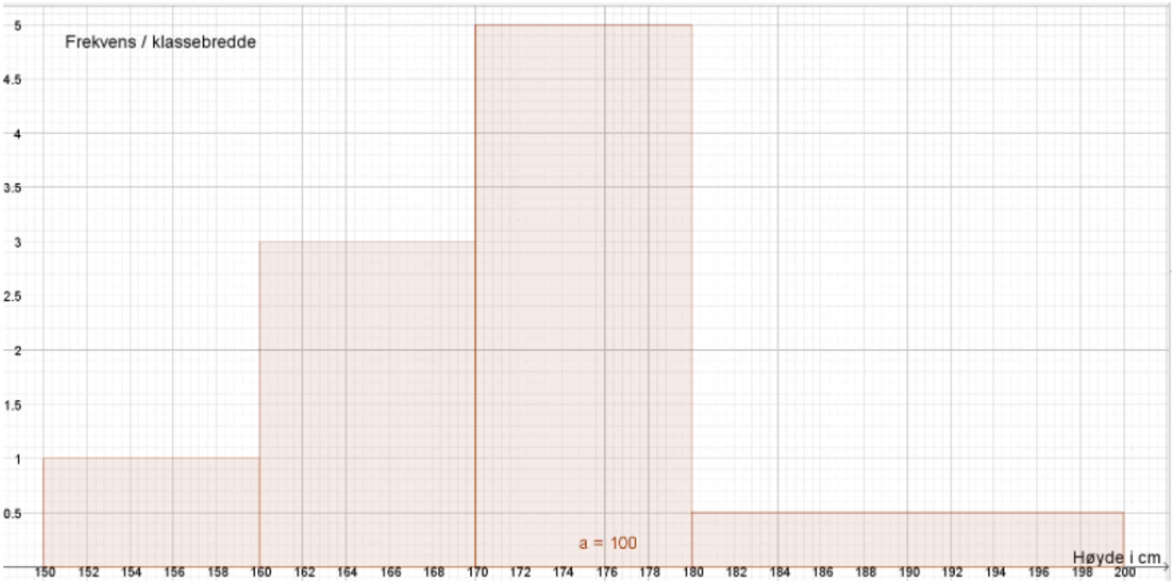
a)

Høyde i cm	Klassemidtpunkt, x_m	Frekvens, f	$f \cdot x_m$
$[150, 160\rangle$	155	10	1550
$[160, 170\rangle$	165	30	4950
$[170, 180\rangle$	175	50	8750
$[180, 200\rangle$	190	10	1900
Sum		100	17150

Gjennomsnitt: $\frac{17150}{100} = 171,5\,cm$

Gjennomsnittshøyden til elevene ved skolen er 171,5 cm.

Høyde i cm	Klassebredde, b	Frekvens, f	Histogramhøyde, $\frac{f}{b}$
$[150, 160\rangle$	$160 - 150 = 10$	10	$\frac{10}{10} = 1$
$[160, 170\rangle$	$170 - 160 = 10$	30	$\frac{30}{10} = 3$
$[170, 180\rangle$	$180 - 170 = 10$	50	$\frac{50}{10} = 5$
$[180, 200\rangle$	$200 - 180 = 20$	10	$\frac{10}{20} = 0,5$



PS: du må tegne histogrammet for hånd, siden dette er del 1.

	A	B
1	**Uke**	**Antall bekreftet smittet av Covid-19**
2	40	742
3	41	1 072
4	42	915
5	43	1 096
6	44	3 402
7	45	4 162
8		
9	Gjennomsnitt	1898
10	Median	1084
11	Variasjonsbredde	3 420

9	Gjennomsnitt	=GJENNOMSNITT(B2:B7)
10	Median	=MEDIAN(B2:B7)
11	Variasjonsbredde	=MAKSA(B2:B7)-MIN(B2:B7)

Personlig økonomi

Målet for opplæringen er at eleven skal kunne:

- Vurdere valg knyttet til personlig økonomi, og reflektere over konsekvenser av å ta opp lån og bruke kredittkort.
- Forklare og bruke prosent, prosent og vekstfaktor til modellering av praktiske situasjoner med digitale verktøy

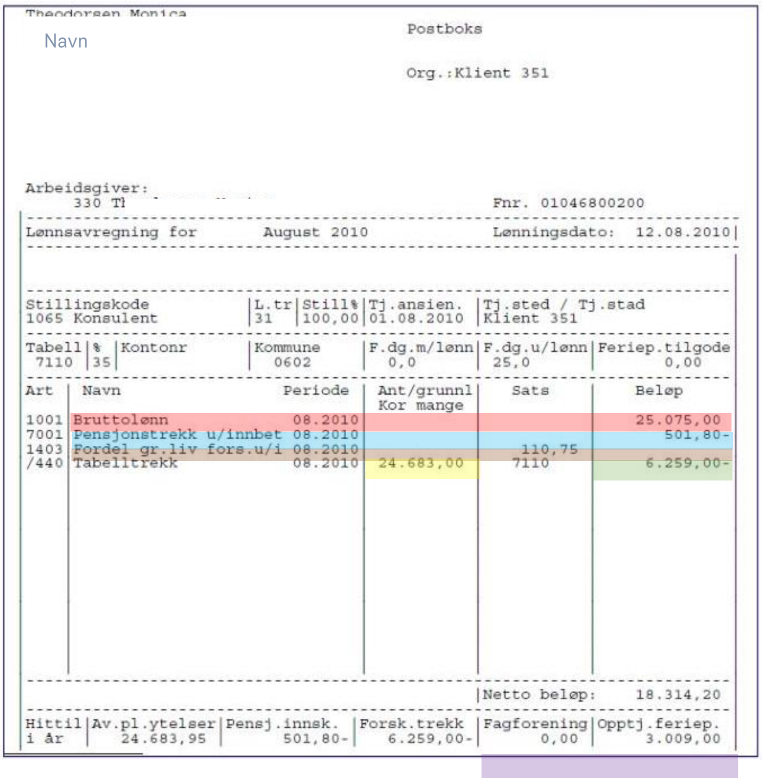
Lønn

Lønn skal være avtalt i forkant av at arbeidet skal utføres. Avtalen skal blant annet beskrive type lønn, størrelsen på lønna, og tidspunkt for lønnsutbetalingen.

Fra opptjent lønn til utbetalt lønn

Ved utbetaling av lønn eller straks etterpå skal arbeidstaker motta en **skriftlig oppgave over beregningsmåten** for den lønnen hen har fått. Det samme gjelder beregningsgrunnlaget for feriepenger, og for trekk som er foretatt.

Nedenfor ser du et eksempel på en lønnsoppgave:


Theodorsen Monica
Navn
Postboks
Org.:Klient 351

Arbeidsgiver:
330 T
Fnr. 01046800200

Lønnsavregning for August 2010 Lønningsdato: 12.08.2010

Stillingskode	L.tr	Still%	Tj.ansien.	Tj.sted / Tj.stad
1065 Konsulent	31	100,00	01.08.2010	Klient 351

Tabell	%	Kontonr	Kommune	F.dg.m/lønn	F.dg.u/lønn	Feriep.tilgode
7110	35		0602	0,0	25,0	0,00

Art	Navn	Periode	Ant/grunnl Kor mange	Sats	Beløp
1001	Bruttolønn	08.2010			25.075,00
7001	Pensjonstrekk u/innbet	08.2010			501,80-
1403	Fordel gr.liv fors.u/i	08.2010		110,75	
/440	Tabelltrekk	08.2010	24.683,00	7110	6.259,00-

Netto beløp: 18.314,20

Hittil i år	Av.pl.ytelser	Pensj.innsk.	Forsk.trekk	Fagforening	Opptj.feriep.
	24.683,95	501,80-	6.259,00-	0,00	3.009,00

Bruttolønn er opptjent lønn, og er det beløpet bedriften betaler. Bruttolønn danner grunnlaget for feriepenger.

Diverse trekk, som pensjonstrekk og fagforeningstrekk. Disse beløpene trekkes fra bruttolønna *før* skattetrekket beregnes.

Diverse tillegg, som forsikring, firmabil, telefon og internett. Disse beløpene er skattepliktige, og legges til skattetrekkgrunnlaget.

(Skatte)trekkgrunnlaget, som er beløpet som brukes til beregning av skatt. Som hovedregel brukes tabelltrekk på fast inntekt, mens skatt på annen inntekt som bonus, overtid og vikariater beregnes prosentvis.

Skattetrekk, som er arbeidstakers bidrag til samfunnet.

Netto lønn er utbetalt lønn. Dette beløpet skal være disponibelt på lønnsmottakerens lønnskonto innen avtalt tid.

Fra bruttolønn til nettolønn

Anta at du får vite følgende om en lønnsmottaker:

- Personens brutto månedslønn er på 52 000 kroner
- Personen har et månedlig pensjonstrekk på 2 %, og betaler fagforeningskontingent på 665 kroner.
- Personen skattes etter tabell 7104

Utfra lønnsoppgaven på forrige side kan vi lage følgende oppsett for å beregne utbetalt lønn:

	Bruttolønn:	kr	52 000
-	Pensjonstrekk (52 000 · 2%):	kr	1 040
-	Fagforeningstrekk:	kr	665
=	Skattetrekkgrunnlag:	kr	50 295
-	Skattetrekk (fra tabell)	kr	15 036
=	Nettolønn:	kr	35 232

Anta at du får vite følgende om en lønnsmottaker:

- Personens brutto månedslønn er på 52 000 kroner
- Personen har et månedlig pensjonstrekk på 2 %, og betaler fagforeningskontingent på 665 kroner.
- Personen har et skattetrekk på 31 % (dette betyr at personen får utbetalt 69 % av skattetrekkgrunnlaget).

Utfra lønnsoppgaven på forrige side kan vi lage følgende oppsett for å beregne utbetalt lønn:

	Bruttolønn:	kr	52 000
-	Pensjonstrekk (52 000 · 2 %):	kr	1 040
-	Fagforeningstrekk:	kr	665
=	Skattetrekkgrunnlag:	kr	50 295
=	Nettolønn (50 295 · 69 %):	kr	34 704

Oppgave 1

Jonas er helsesekretær, og tjener kr 36 580 per måned. Jonas har et pensjonstrekk på 2 % per måned, og betaler 670 kr i fagforeningskontingent. Jonas har et skattetrekk på 31 %.
Hvor mye får Jonas utbetalt per måned?

Oppgave 2

Trine jobber som ambulansesjåfør, og har en brutto månedslønn på kr 44 780. Hun har et pensjonstrekk på 2 % per måned, og hun er ikke fagorganisert. Trine har et skattetrekk på 32 %.
Hvor mye får Trine utbetalt per måned?

Oppgave 3

Sindre er lærling og tjener 90 kr i timen. En måned jobber han 160 timer. Han betaler 18 % skatt.
Sindre er ikke fagorganisert, og har ikke pensjonstrekk.
Finn nettolønna til Sindre.

Oppgave 4

En snekker fikk betalt 37 000 kroner for et oppdrag. Snekkeren trekker 2,5 % til pensjon, og 35 % i skatt.
Hvor mye fikk snekkeren utbetalt for dette oppdraget?

Oppgave 5

Mineh jobber deltid på en cafe, og har en timelønn på 137 kr. En måned jobber hun 70 timer.
Hun er ikke fagorganisert, men det trekkes 2 % av bruttolønna til pensjon.
Mineh har frikort dette året, og trekkes derfor ikke i skatt.
Hvor mye fikk Mineh utbetalt denne måneden?

Oppgave 6

Simen har fått jobb som deltidsansatt i en butikk. Timelønn for ordinære timer er 140 kroner. Dersom han jobber på kveldstid, får han et tillegg på 50 % per time.
En måned jobber han 43 ordinære timer, og 18 timer på kveldstid.
Simen har et skattetrekk på 31 %.
Hvor mye får han utbetalt denne måneden?

Oppgave 7

Kaia jobber hver lørdag i en fiskebutikk. Hun har arbeidstid fra kl 11:00 til kl 18:30. Kaia får betalt 145 kr per time, og hun får 100 % overtidstillegg etter kl 17:00. Det trekkes 12 % skatt fra bruttolønna til Kaia.
En måned jobber hun fire lørdager.
Hvor mye får Kaia utbetalt denne måneden?

Oppgave 8

Per arbeider som telefonselger. Han har en fast timelønn på 105 kroner. I tillegg får han 15 kroner for hvert salg han oppnår. Per har et pensjonstrekk på 2,5 %, og det trekkes 34 % i skatt.
En måned arbeider Per 60 timer, og han oppnådde 360 salg denne måneden.
Hvor mye får Per utbetalt denne måneden?

Oppgave 9

Aisha jobber som selger. Hun har en fast månedslønn på 20 000 kr. I tillegg skal Aisha ha 5 % provisjon av salgsinntektene. Hun er fagorganisert, og hun har et månedlig trekk på 655 kr i fagforeningskontingent. I tillegg trekkes hun 2 % til pensjon. Hun har et skattetrekk på 32 %.
En måned solgte hun for 150 000 kr. Hvor mye fikk hun utbetalt denne måneden?

Fra nettolønn til bruttolønn

Anta at du får vite følgende om en lønnsmottaker:

- Personens netto månedslønn er på kr 28 386
- Personen skattes 32 %
- Personen trekkes kr 755 i fagforeningskontingent

Hva er denne personens brutto månedslønn?

I en slik oppgave må vi regne motsatt vei og gjøre motsatte regneoperasjoner av det vi har gjort tidligere.

Vi må først regne ut skattetrekkgrunnlaget. Opplysningene ovenfor forteller oss at personen får utbetalt 68 % av skattetrekkgrunnlaget. Tidligere har vi utført følgende regnestykke:

$Skattetrekkgrunnlag \cdot 68\ \% = netto\ månedslønn$

Det motsatte blir dermed:

$\frac{Netto\ månedslønn}{68\ \%} = skattetrekkgrunnlag$ -> $\frac{28\ 386}{0{,}68} = 41\ 744$

Deretter må vi legge til fagforeningskontingenten:

$41\ 744 + 755 = 42\ 499$

Personen hadde en brutto månedslønn på kr 42 499.

Anta at du får vite følgende om en lønnsmottaker:

- Personens netto månedslønn er på kr 28 386
- Personen skattes 32 %
- Personen har et pensjonstrekk på 2 %

Hva er denne personens brutto månedslønn?

Vi må først regne ut skattetrekkgrunnlaget. Dette regnes på samme måte som forrige eksempel, og gir samme svar.

For å regne fra skattetrekkgrunnlaget til brutto månedslønn må vi utføre følgende regnestykke:

$\frac{Skattetrekkgrunnlaget}{100\ \% - 2\ \%} = brutto\ månedslønn$ -> $\frac{41\ 744}{0{,}98} = 42\ 596$

Personen hadde en brutto månedslønn på kr 42 596.

Oppgave 10
Sabirin fikk utbetalt 17 591 kr, og hun blir trukket 31 % i skatt. Hun er ikke fagorganisert, og hun har heller ikke pensjonstrekk.
Hvor høy var hennes brutto månedslønn denne måneden?

Oppgave 11
Zain fikk utbetalt 26 744 kroner, og hadde blitt trukket 35 % i skatt. Zain er fagorganisert, og ble trukket 590 kroner i fagforeningskontingent.
Hvor høy var Zains brutto månedslønn?

Oppgave 12
Mona fikk utbetalt kr 31 284, og hadde blitt trukket 32 % i skatt. William fagorganisert, og ble trukket kr 680 i fagforeningskontingent.
Hvor høy var Williams brutto månedslønn?

Oppgave 13
Stine hadde netto månedslønn på kr 23 300, og hadde blitt trukket 28 % i skatt. Stine hadde et pensjonstrekk på 2 %.
Hvor høy var Stines brutto månedslønn?

Oppgave 14
Kine fikk utbetalt kr 34 566, og hadde blitt trukket 33 % i skatt. Kine hadde et pensjonstrekk på 2,5 %.
Hvor høy var Kines brutto månedslønn?

En eksamensoppgave

I oktober hadde Marianne en nettoinntekt på 38 456 kroner.

Hun har et skattetrekk på 35 % og et pensjonsinnskudd på 2,5 %.

I tillegg betaler hun 723 kroner i fagforeningskontingent hver måned.

Bestem Mariannes bruttoinntekt i oktober.

Lån

En av de største utgiftene du kommer til å ha som voksen er tilbakebetaling av lån. De aller fleste voksne i Norge har store lån knyttet til studier, bolig, bil eller oppussing, og mindre lån til å betale for en ferie eller en oppvaskmaskin.

Løpetid

Uansett hvorfor man har lånt penger, må beløpet betales tilbake innen en avtalt tid. Ved inngåelse av en låneavtale, for eksempel med en bank, skal det avtales hvor mange år låntakeren skal bruke på å betale tilbake det lånte beløpet. Store lån, som boliglån, har gjerne en tilbakebetalingstid på 15 – 25 år. Mellomstore lån, som billån, har ofte en tilbakebetalingstid på 3 – 5 år, mens små lån, som lån til en ny vaskemaskin, bør betales tilbake innen en måned eller to. Den avtalte tilbakebetalingstiden kalles lånets **løpetid** eller **nedbetalingstid**. Låntakeren kan ofte selv velge nedbetalingstiden, men det er viktig å være klar over at lenger løpetid betyr dyrere lån.

Avdrag

Det er vanlig å avtale at låntakeren skal tilbakebetale lånet i like store deler hvert år. Dette beløpet kalles årlig **avdrag**, og beregnes etter følgende formel:

$$Årlig\ avdrag = \frac{Lånebeløp}{Lånets\ løpetid}$$

Anta at en familie inngår en avtale om et boliglån på kr. 4 200 000, og at lånet skal tilbakebetales innen 20 år. Hvor mye skal familien betale tilbake hvert år? Dette regner vi ut ved hjelp av formelen ovenfor:

$$Årlig\ avdrag = \frac{4\ 200\ 000\ kr}{20\ år} = 210\ 000\ kr/år$$

Siden de fleste voksne i Norge er vanlige lønnsmottakere, er det naturlig å fordele det årlige avdraget utover årets 12 måneder. Dette beløpet kalles månedlige **avdrag**, og beregnes etter følgende formel:

$$Månedlig\ avdrag = \frac{Årlig\ avdrag}{12}$$

For familien i eksempelet ovenfor kan vi regne ut det månedlige avdraget på følgende måte:

$$Månedlig\ avdrag = \frac{210\ 000\ kr}{12\ mnd} = 17\ 500\ kr/mnd$$

Det er viktig å forstå at å betale tilbake lån er må ses på som å spare penger. Jo lavere boliglån en låntaker har, jo mer av salget beholder låntakeren når boligen en gang skal bli solgt.

Renter

I tillegg til å betale tilbake lånebeløpet, må man også betale en kostnad for å låne penger. Hvis ikke hadde ikke långiver tjent penger på utlånet.

Denne kostnaden kalles **renter**, og er som oftest en prosentvis beregning av det resterende lånebeløpet. Det betyr at jo fortere man betaler ned lånet, jo mindre betaler man i renter. Derfor lønner det seg å betale tilbake lånet så fort som mulig.

Långiver har ansvar for å hjelpe låntaker til å ikke ta opp mer lån enn låntaker kan betjene.

Ulike lån har ulike kostnader

Hva skjer dersom en låntaker ikke klarer å betale tilbake lånet? Det kommer an på hvilken sikkerhet långiver har sikret seg. Dersom en familie ikke klarer å betale tilbake boliglånet sitt, kan långiveren kreve at boligen skal bli solgt. I slike tilfeller er långiver sikret å få tilbake mesteparten av det resterende lånebeløpet, og lånet forbindes med lav risiko for långiver. Derfor er renta på boliglån ganske lav.

Å låne ut penger til å kjøpe bil er forbundet med høyere risiko, fordi bilens verdi synker med årene. I tillegg kan bilen være innblandet i en trafikkulykke, noe som også senker bilens verdi. Derfor er det ikke sikkert at långiver får tilbake hele lånebeløpet ved et tvangssalg av bilen, og renta på et billån er derfor høyere enn på et boliglån.

Dersom en låntaker ikke kan betjene gjelden sin, og långiver ikke har sikkerhet eller pant i noen av låntakers eiendeler eller eiendom, må det innledes rettslig gjeldsforhandlinger. Dette er ofte en dyr prosess for långiver, og långiver kan ikke forvente å få tilbake store deler av lånebeløpet. Renta på lån uten sikkerhet har derfor ofte en høy rente.

Kostnaden ved lån avhenger blant annet av hvor høy risiko det er for långiver å tildele et lån, og hvilken sikkerhet långiver krever. I tabellen nedenfor har vi listet opp de vanligste lånene, og hvor høy rente man må regne med å betale for de ulike lånene i 2021. Merk: dette kan endres.

Type lån	Omtrentlig årlig rente av restlån	Sikkerhet eller pant
Studielån	1,3 %	Ingen
Boliglån	2 %	Bolig
Boligkreditt	2,5 %	Bolig
Billån	4,5 %	Bil
Forbrukslån	9 % - 25 %	Ingen
Kredittkort	14 % - 23 %	Ingen

Som du kan se i tabellen ovenfor bør du tenke seg nøye gjennom før du tar opp forbrukslån eller bruker kredittkort til å kjøpe noe du ikke har råd til å kjøpe. Dersom du ikke klarer å betale tilbake innen kort tid kan lånet bli veldig dyrt!

Oppgave 15

En familie tar opp et boliglån på kr. 3 800 000, og ønsker en nedbetalingstid på 15 år.

Regn ut de månedlige avdragene familien må betale.

Oppgave 16

Hvor høy blir de månedlige avdragene til familien i oppgave 15 dersom de øker nedbetalingstiden til 20 år?

Oppgave 17

Kristian låner 420 000 kroner for å kjøpe en bil. Billånet skal betales tilbake i løpet av 5 år. Hvor mye må Kristian betale hver måned i avdrag?

Oppgave 18

Hvor mye må Kristian betale hver måned i avdrag dersom han ønsker å betale tilbake billånet i løpet av 3 år?

Diskusjonsoppgave

Gå inn på https://laanekalkulator.no/

Der finner du følgende hjelpemiddel til beregning av avdrag og renter:

Her kan du endre lånebeløpet, løpetiden og renta (la de andre tallene forbli uendret).
Ta utgangspunkt i familien i oppgave 15 som tok opp et boliglån på kr. 3 800 000, og finn ut hvor mye de må betale i månedlige terminbeløp.
Hvordan vil endring i løpetid påvirke terminbeløpet?
Det forventes at boliglånsrenta vil stige i årene fremover. Hvordan vil en økt rente påvirke terminbeløpet?

Betalingsevne

Som nevnt tidligere har långiver et ansvar for å hjelpe låntaker til å ikke ta opp mer lån enn låntaker kan betjene. Det er ikke tillatt for en långiver å gi lån som gjør at den **samlede** gjelden til låntaker overstiger fem ganger låntakers brutto årsinntekt.
En familie med brutto årsinntekt på 1 million kroner kan maksimalt låne 5 millioner kroner. Dette inkluderer alle lån, som boliglån, studielån og billån.
Dersom mor og far i familien med brutto årsinntekt på 1 million kroner har studielån på 400 000 kroner og et billån på 600 000 kroner, har de allerede 1 million kroner i lån. Dermed kan de maksimalt ta opp et boliglån på 4 millioner kroner.

Oppgave 19

Kristian har en brutto årsinntekt på kr. 580 000, og ønsker å ta opp et boliglån. Fra før har han studielån på kr. 120 000, og et billån på kr. 420 000.
Hvor høyt boliglån kan Kristian få?

Oppgave 20

I en familie har både mor og far et studielån på kr. 170 000. I tillegg har de et billån på kr. 330 000.
Mor har en brutto årsinntekt på kr. 630 000, mens far tjener kr. 590 000 per år.
Hvor høyt boliglån kan denne familien få?

Oppgave 21

			Inntekt / Fradrag	Rettet til	Formue / Gjeld	Rettet til
2.1	**Lønn og tilsvarende ytelser**		**390 612**			
2.1.1	Lønn, Lillrent As	Kode 111-A	226 612			
2.1.1	Lønn, Bostad As	Kode 111-A	164 000			
	Sum grunnlag trygdeavgift (7,8%) 390 612					
	Sum grunnlag toppskatt 390 612					
3.3/4.8	**Renter, gjeld, andre kapitalkostnader og fradrag**		**-90 666**		**-1 319 185**	
3.3.1/4.8.1	Renter/gjeld i Nordea Bank Norge Asa		-70 559		-1 252 534	
3.3.1/4.8.1	Renter/gjeld i Santander Consumer Bank As		-3 636		-16 189	
3.3.1/4.8.1	Renter/gjeld i Ge Money Bank		-3 572		-15 108	
3.3.1/4.8.1	Renter/gjeld i Resurs Bank Ab		-4 041		-14 907	
3.3.1/4.8.1	Renter/gjeld i Entercard Norge As		-8 099		-20 447	
3.3.1/4.8.1	Renter/gjeld i Sparebanken Hedmark		-25		0	
3.3.1/4.8.1	Renter/gjeld i Lindorff Capital As		-734		0	

På bildet ovenfor ser du utdrag fra skattemeldingen (selvangivelsen) til en vanlig lønnsmottaker. Gjør beregninger, og avgjør om denne personen kan ta opp ytterligere lån.

Krav til egenkapital

Boliglånsforskriften for 2021 sier at de som skal låne til bolig vanligvis ikke kan låne mer enn 85 prosent av boligens verdi. Det betyr at du minst må ha 15 prosent egenkapital når du kjøper bolig.
Tenk deg at en bolig er verdsatt til kr. 3 000 000. 15 prosent av dette er:

$$3\,000\,000 \cdot 15\,\% = 450\,000$$

En familie som ønsker å kjøpe en bolig til kr. 3 000 000 må minimum ha kr. 450 000 i egenkapital.

Oppgave 22

Furuset - Helt ny og moderne, arealeffektiv 2-roms med 12 m² terrasse | Flott bad med varmek. | Kjk m/integr. hvitevarer

Gransdalen 33 J, 1054 Oslo

Prisantydning
2 490 000 kr

Fellesgjeld: 342 228 kr

Omkostninger: 15 354 kr

Totalpris: 2 847 582 kr

Felleskost/mnd.: 3 837 kr

Her ser du en boligannonse fra Finn.no. Hvor mye må man ha i egenkapital for å kjøpe denne leiligheten, dersom man får kjøpt den til prisantydning?

En eksamensoppgave

Malene er sykepleier. I 2020 hadde hun en inntekt på 490 000 kroner.
Malene ønsker å kjøpe en leilighet. Leiligheten koster 2 500 000 kroner.

På internett finner hun denne informasjonen.

> For å få boliglån må du ha betjeningsevne, betalingsvilje, sikkerhet og egenkapital.
>
> Du kan ikke låne mer enn 5 ganger inntekten din. Dette gjelder totalt lån inklusive studielån og forbrukslån.
>
> Du må ha minimum 15 % egenkapital til boligkjøp.

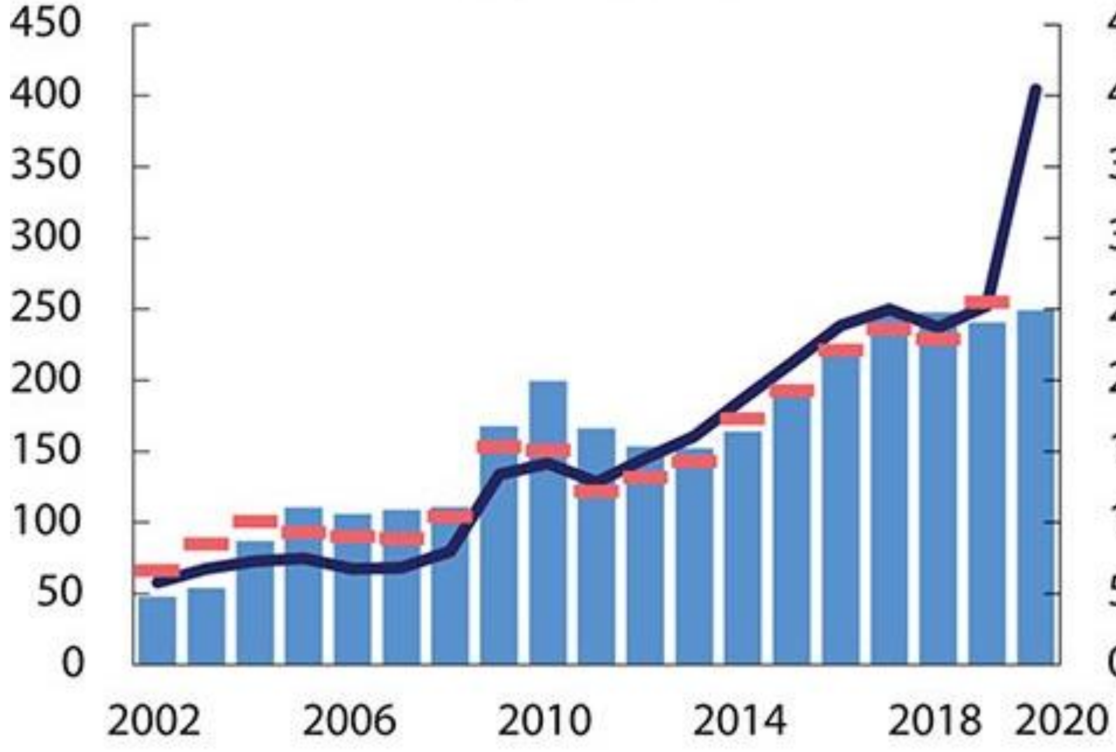
Malene har 400 000 kroner i egenkapital og 250 000 kroner i studielån.

Gjør beregninger og finn ut om Malene kan få stort nok lån slik at hun kan kjøpe leiligheten.

Løsningsforslag

Oppgave	Svar	Oppgave	Svar
1	Kr. 24 273	**14**	Kr. 52 914
2	Kr. 29 841	**Eks.oppg.**	Kr. 61 421
3	Kr. 11 808	**15**	Kr. 21 111
4	Kr. 23 449	**16**	Kr. 15 833
5	Kr. 9 398	**17**	Kr. 7 000
6	Kr. 6 762	**18**	Kr. 11 667
7	Kr. 4 594	**19**	Kr. 2 360 000
8	Kr. 7 529	**20**	Kr. 5 430 000
9	Kr. 17 881	**21**	Personen kan låne kr. 633 875
10	Kr. 25 494	**22**	Kr. 427 137
11	Kr. 41 735	**Eks.oppg.**	Ja, hun kan kjøpe leiligheten. Hun kan låne inntil kr. 2 200 000. I tillegg har hun en egenkapital på kr. 400 000.
12	Kr. 46 686		
13	Kr. 33 022		

Samfunnsøkonomi



Målet for opplæringen er at eleven skal kunne:

- Utforske og forklare sammenhenger mellom prisindeks, kroneverdi, reallønn og nominell lønn.
- Analysere og presentere funn i datasett fra lokalsamfunn og media.

Prisindeks

En konsekvens av vår økonomiske samfunnsmodell er at priser på varer og tjenester som regel øker fra år til år, og det kan være både nyttig og interessant å beskrive denne prisutviklingen.

I en artikkel fra nettavisen kan vi finne endring i pris på noen utvalgte matvarer fra 2013 til 2020:

Vare/årstall	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Norvegia 1 kg	83,40	82,95	81,97	88,35	95,86	99,07	103,77	109,00
Grillpølse 600 g	30,14	41,61	40,19	34,08	33,69	40,28	39,66	33,27
Laks 500 gram	38,35	38,88	38,61	38,97	69,64	56,51	48,32	48,97
Tine meierismør	29,03	29,81	25,75	26,09	23,42	33,77	33,72	32,20
Mills kaviar	21,64	18,48	14,18	22,15	19,00	18,58	19,00	18,27
Grandiosa original	40,13	38,09	38,53	38,71	38,37	38,07	42,35	43,87
Nugatti original 500 g	25,36	24,97	25,25	20,57	22,10	23,26	22,29	23,87
Kjøttdeig 400g	32,86	33,93	34,30	34,71	35,24	37,11	40,45	45,83
Lettmelk 1 liter Tine	14,19	14,60	15,02	15,81	16,83	17,33	17,35	17,30
Toro pizzabunn	24,90	25,90	17,38	16,49	16,71	17,40	15,73	14,37
Bali kyllinggryte	32,64	32,64	19,81	17,65	19,26	25,10	24,46	18,63

https://www.nettavisen.no/okonomi/prisen-i-varet-har-okt-dobbelt-sa-mye-som-inflasjonen/s/12-95-3423829942

Det er enkelt å beskrive prisutviklingen for 1 kg Norvegia eller 1 boks Nugatti. Imidlertid er det ikke like enkelt å lage en god sammenligning av prisutviklingen til to ulike varer. Tabellen viser for eksempel at prisen på både Grandiosa og Lettmelk har økt med omtrent 3 kroner fra 2013 til 2020, men betyr det at prisutviklingen har vært lik for disse produktene? Prisen for Lettmelk var jo lavere i utgangspunktet, og vi kan derfor mene at prisøkningen for Lettmelk har vært større enn prisøkningen for Grandiosa.

Dette poenget blir enda mer tydelig dersom du sammenligner utviklingen i pris på 1 kg Norvegia med prisutviklingen for en leilighet. En leilighet som i utgangspunktet koster flere millioner kroner vil ha en langt høyere prisøkning enn en pakke ost dersom vi måler økningen i kroner. Skal vi sammenligne prisutvikling for varer og tjenester som i utgangspunktet har svært ulik pris har vi behov for å måle prisendringen i noe annet enn kroner.

I slike tilfeller bruker vi **prisindeks**. Prisindeks angir forholdet mellom prisen på en vare eller tjeneste i et år i forhold til et **basisår**. Med basisår mener vi et år vi velger som utgangspunkt. I prisoversikten ovenfor er det naturlig at vi velger 2013 som basisår. Uansett hva prisen på varen eller tjenesten er i basisåret gir vi varen eller tjenesten 100 som prisindeks. Deretter regner vi ut prisindeks i de andre årene ved hjelp av følgende formel:

$$Prisindeks = \frac{Prisen\ i\ det\ aktuellet\ året}{Prisen\ i\ basisåret} \cdot 100$$

Prisindeksen for 1 kg Norvegia i 2014 regnes slik:

$$Prisindeks = \frac{Prisen\ i\ det\ aktuellet\ året}{Prisen\ i\ basisåret} \cdot 100 \quad = \quad \frac{82{,}95}{83{,}40} \cdot 100 \ = 99{,}5^*$$

*Vi angir prisindeks med 1 desimal.

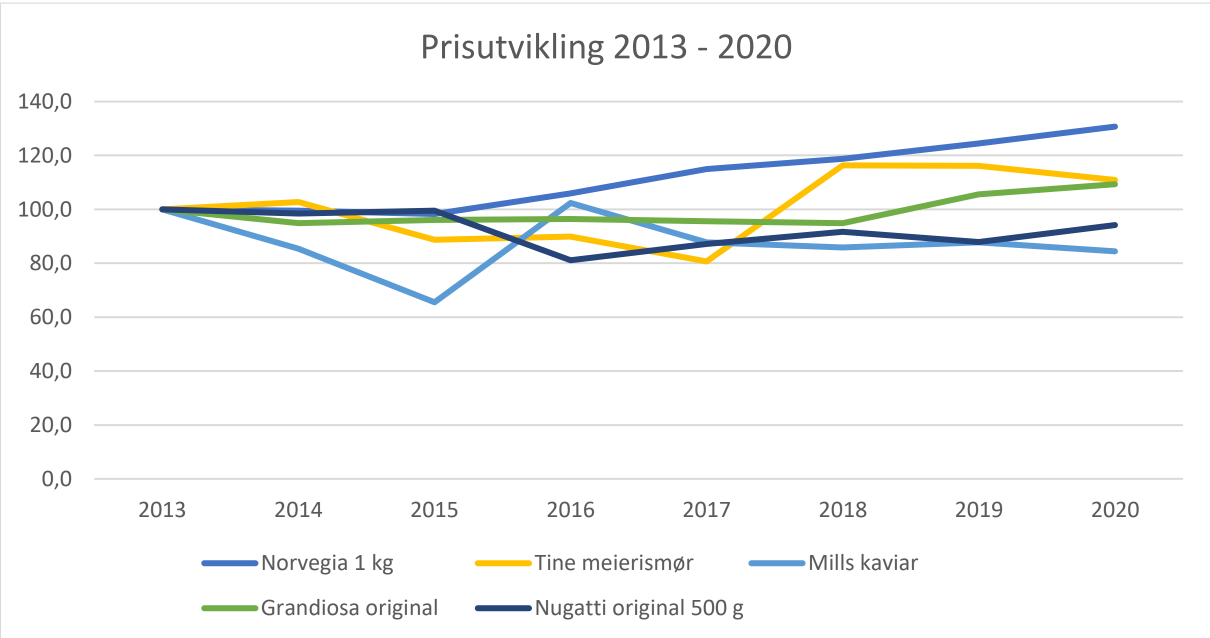
Dersom prisindeksen er over 100 betyr det at prisen på varen eller tjenesten er høyere enn prisen var i basisåret. Det motsatte gjelder dersom prisindeksen er under 100.

Gjør vi dette for alle varene i tabellen på forrige side får vi denne oversikten:

Vare/årstall	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Norvegia 1 kg	100,0	99,5	98,3	105,9	114,9	118,8	124,4	130,7
Grillpølse 600 g	100,0	138,1	133,3	113,1	111,8	133,6	131,6	110,4
Laks 500 gram	100,0	101,4	100,7	101,6	181,6	147,4	126,0	127,7
Tine meierismør	100,0	102,7	88,7	89,9	80,7	116,3	116,2	110,9
Mills kaviar	100,0	85,4	65,5	102,4	87,8	85,9	87,8	84,4
Grandiosa original	100,0	94,9	96,0	96,5	95,6	94,9	105,5	109,3
Nugatti original 500 g	100,0	98,5	99,6	81,1	87,1	91,7	87,9	94,1
Kjøttdeig 400g	100,0	103,3	104,4	105,6	107,2	112,9	123,1	139,5
Lettmelk 1 liter Tine	100,0	102,9	105,8	111,4	118,6	122,1	122,3	121,9
Toro pizzabunn	100,0	104,0	69,8	66,2	67,1	69,9	63,2	57,7
Bali kyllinggryte	100,0	100,0	60,7	54,1	59,0	76,9	74,9	57,1

Utfra denne oversikten kan vi se at kjøttdeig 400 g har steget mest når vi måler prisstigningen i forhold til prisen i basisåret, og at 1 L lettmelk har hatt en høyere prisutvikling enn Grandiosa.

Vi kan også vise prisutviklingen for et utvalg av varene ovenfor ved hjelp av et linjediagram:



Oppgave 1

Nedenfor finner du en oversikt over prisutviklingen til en vare i noen utvalgte år.

År	2014	2015	2018	2020
Pris	378	399	420	478
Prisindeks		100		

a) Hvilket år regnes som basisår for denne varen?
b) Regn ut prisindeksen til denne varen for årene 2014, 2018 og 2020.

Bruke prisindeksen

Dersom vi vet prisen til en vare eller tjeneste i basisåret og prisindeksen i et annet år kan vi regne ut prisen til varen eller tjenesten i dette året ved hjelp av følgende formel:

$$Pris\ et\ aktuelt\ år = \frac{(Prisen\ i\ basisåret\ \cdot prisindeksen\ i\ det\ akutelle\ året)}{100}$$

Anta at vi får vite følgende om prisindeksen til en vare:

År	2015	2017	2020
Prisindeks	100	103,7	108,4
Pris	84,90		

Vi kan bruke opplysningene til å regne ut prisen for denne varen i 2017 og 2020:

År	2015	2017	2020
Prisindeks	100	103,7	108,4
Pris kr	84,90	$\frac{84{,}90 \cdot 103{,}7}{100} = 88{,}04$	$\frac{84{,}90 \cdot 108{,}4}{100} = 92{,}03$

Oppgave 2

Nedenfor finner du en oversikt over prisutviklingen til en vare i noen utvalgte år.

År	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Pris kr	445		463	498			535
Prisindeks		97,9	100		109,3	112,4	

a) Hvilket år regnes som basisår for denne varen?

Bruk ExCel til å løse oppgavene nedenfor

b) Regn ut tallene i de tomme rutene.
c) Vis utviklingen i prisindeks i et passende diagram.
d) Finn den årlige prosentvis endringen i pris og i prisindeks. Kommenter resultatet.

Oppgave 3

Nedenfor finner du en oversikt over utvikling i gjennomsnittspris til noen varegrupper i noen utvalgte, med 2015 som basisår.

År	2015	2016	2017	2018
Bukse	593	649	684	756
Kjøttdeig	58,60	62,40	53,25	57,80
Brus	17,90	19,50	21,90	23,50
Brettspill	357	363	379	399
Kjøleskap	4670	4891	5213	5488

Bruk Excel til å finne prisindeksen til hver av varegruppene i tabellen til venstre.

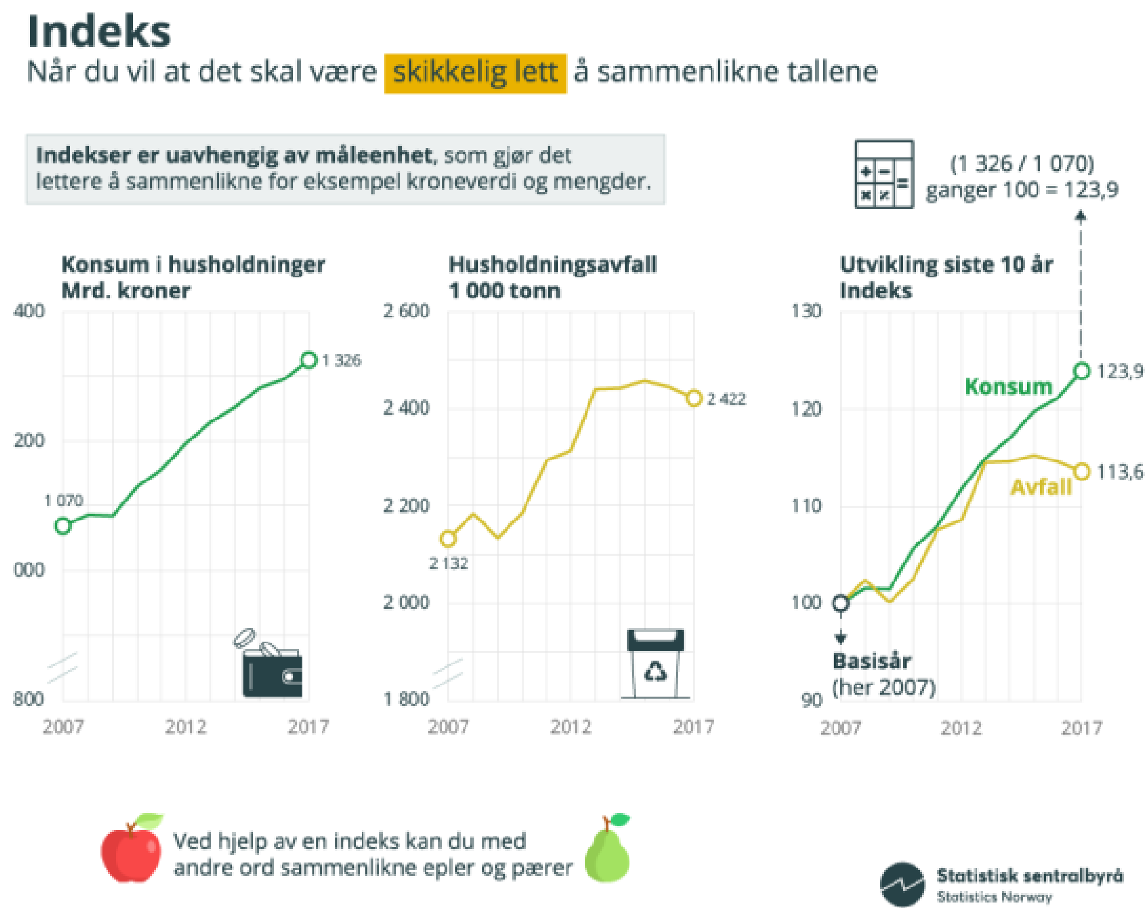
Indeks: grunnlag for sammenligning

Vi kan også bruke indeks til å sammenligne to utviklinger som har ulik måleenhet, eller når størrelsene man vil sammenligne befinner seg på veldig ulike nivå.

Dette er helt i grensen av pensum for 2P, så vi nøyer oss med å vise følgende eksempel fra Statistisk sentralbyrå:

Konsum og avfall - hva har økt mest?

Under ser du et eksempel på hvordan man kan sammenligne to tidsserier som har ulik måleenhet: utviklingen i konsum (kroner) og avfall (tonn) hos norske familier over ti år. Sett hver for seg er det ikke så enkelt å tyde den relative forskjellen eller endringen. Ved å bruke en indeks kan vi derimot enkelt se at konsumet har økt betydelig mer enn avfallet.



Kilde: https://www.ssb.no/priser-og-prisindekser/artikler-og-publikasjoner/hva-er-en-indeks

Konsumprisindeks (KPI)

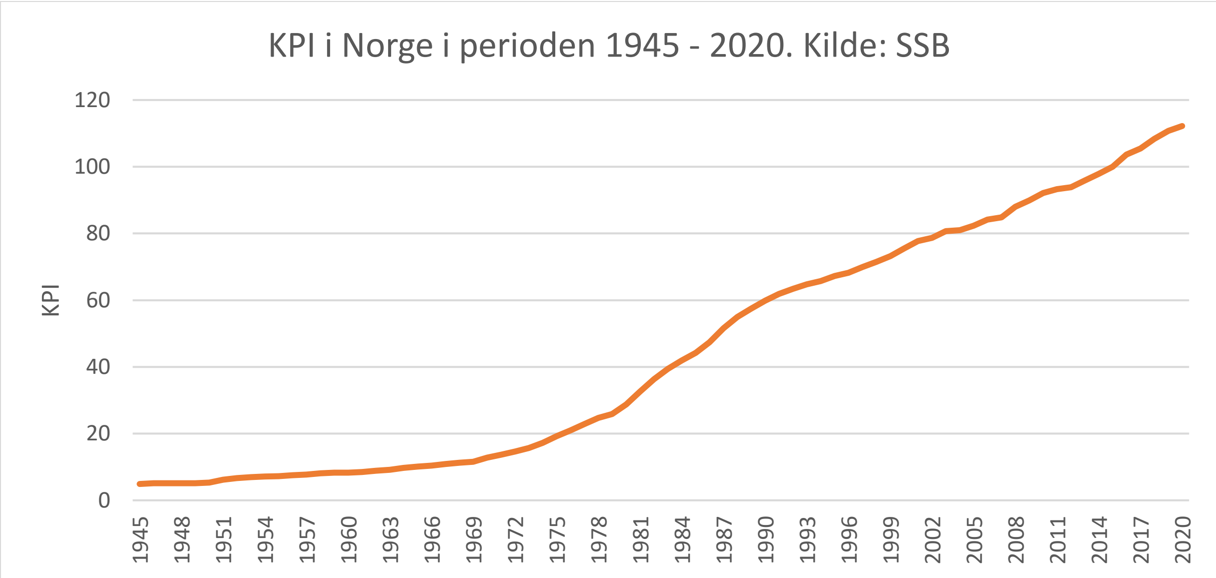
Så langt har vi sett på prisutvikling for enkelte varer, eller en varegruppe. Det kan også være nyttig å beskrive utviklingen i prisene på alle varer og tjenester som kjøpes av privatpersoner i Norge.

Til dette bruker vi **konsumprisindeks**, forkortet **KPI**. Ordet **konsum** er et fagbegrep innenfor økonomi som brukes om privatpersoners **forbruk** av varer og tjenester.

KPI brukes blant annet som

- Et mål på et lands økonomiske inflasjon (prisstigning)
- I lønnsforhandlinger, hvor indeksen angir prisveksten lønnsmottakerne står overfor
- Justering av private leiekontrakter, for eksempel husleiekontrakter

På samme måte som ved prisindeks, settes indeksen i basisåret for KPI til 100. Basisåret for KPI er for tiden 2015, som betyr at KPI i 2015 er 100. I Norge er det SSB som beregner årlig indeks for KPI. Diagrammet nedenfor viser utvikling i KPI, og dermed prisnivået i Norge i perioden 1945 – 2020:



Kilde: https://www.ssb.no/priser-og-prisindekser/konsumpriser/statistikk/konsumprisindeksen

Diagrammet viser at prisnivået i Norge har steget enormt etter 1970. Kan du tenke deg til en forklaring på dette?

Som skrevet ovenfor er KPI et viktig element i lønnsforhandlinger. Dersom man skal få en reell lønnsøkning må lønningene øke mer enn økningen i KPI. Hvis ikke har man faktisk gått ned i lønn, selv om lønningene har økt. Vi kommer tilbake til dette senere i kapittelet.

Nedenfor finner du en oversikt over KPI i Norge fra 2010 til 2020. Bruk disse tallene når du løser oppgavene 4 til 9.

KPI i Norge i perioden 2010 – 2020. Kilde: SSB											
År	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
KPI	92,1	93,3	93,9	95,9	97,9	100	103,6	105,5	108,4	110,8	112,2

Oppgave 4

Bruk tallene i tabellen ovenfor.

a) Mellom hvilke to år steg prisindeksen mest?
b) Mellom hvilke to år steg prisindeksen mest målt i prosent? Løs gjerne denne oppgaven ved hjelp av ExCel

Oppgave 5

I 2015 kostet en vare 499 kroner. Anta at varens pris følger utviklingen i KPI.

Hvor mye kostet denne varen i 2020?

Oppgave 6

Tabellen nedenfor viser prisutviklingen til en vare i årene 2015 – 2020, med 2015 som basisår.

År	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Pris	405	419,58	427,28	439	452,68	463,89

I hvor mange år fulgte prisen til denne varen utviklingen i KPI?

Oppgave 7

I tabellen nedenfor finner du informasjon om lønnsutvikling i perioden 2015 – 2019 blant ulike yrkesgrupper.

	Gjennomsnittlig månedslønn	
Yrkesgruppe	**2015**	**2019**
Ledere	63400	70150
Akademiske yrker	49620	54970
Kontoryrker	36840	41000
Salg og service	32510	36140
Håndverker	36080	40210

Avgjør om hver av disse yrkesgruppene reelt sett har gått opp i lønn fra 2015 til 2019.

Kjøpekraft

Det hjelper lite med lønnsøkning dersom prisen på varer og tjenester øker mer. Skal en lønnsøkning oppfattes som en reell økning, må lønna økes mer enn økningen i priser, skatt, avgifter, renter og andre utgifter som er vanlig for en forbruker.

Inntekten en forbruker sitter igjen med når skatteendring og prisstigning er trukket fra bruttolønna kalles **kjøpekraft**. Om lønn øker mer enn pris og beskatning, øker kjøpekraften. I motsatt fall vil kjøpekraften reduseres. I 2P skal vi kun sammenligne lønnsutvikling med utvikling i KPI.

Reallønn

Når vi måler brutto årslønn i forhold til KPI kalles dette **reallønn**, og vi regner ut dette for å kunne sammenligne forbrukernes kjøpekraft i forskjellige år. Høyere reallønn betyr høyere kjøpekraft.
Vi regner reallønn ved hjelp av formelen:

$$Reallønn = brutto\ årslønn \cdot \frac{100}{\text{KPI}}$$

Innenfor økonomiske fag kalles ofte brutto årslønn for **nominell lønn**. Det gir denne formelen:

$$Reallønn = nominell \cdot \frac{100}{\text{KPI}}$$

Tabellen nedenfor viser brutto årslønn (nominell lønn) for en sykepleier, samt KPI for to utvalgte år. Hvordan er en sykepleiers kjøpekraft i 2019 sammenlignet med 2016? For å finne dette må vi regne ut reallønna i de to årene.

År	Nominell lønn	KPI	Reallønn
2016	434 494	103,6	$434\,394 \cdot \frac{100}{103{,}6} = 419\,299$
2019	476 268	110,8	$476\,268 \cdot \frac{100}{110{,}8} = 429\,845$

Som vi ser i kolonnen for reallønn har sykepleierne fått økt sin kjøpekraft fra 2016 til 2019.

Oppgave 8

Tabellen nedenfor viser gjennomsnittlig nominell lønn for noen yrker i 2019 og 2020. Avgjør om yrkene nedenfor har fått økt sin kjøpekraft ved å sammenligne reallønna i hvert av årene.

Yrke/årstall	2019	2020
Jordmor	560 592	565 344
Farmasøyt	642 000	644 400
Grunnskolelærer	554 040	557 550
App-programmerer	685 440	713 014

Nominell lønn

I forbindelse med lønnsoppgjør er det interessant å beregne hvor høy den nominelle lønna må være i påfølgende år for at en forbruker skal opprettholde sin kjøpekraft.

Dersom vi vet reallønna og KPI, kan vi regne ut nominell lønn ved hjelp av formelen:

$$Nominell\ lønn = reallønn \cdot \frac{\text{KPI}}{100}$$

Reallønna til en optiker i 2020 var på kr. 514 866. Nominell lønn (brutto årslønn) samme år kan regnes ut ved hjelp av formelen ovenfor:

$$Nominell\ lønn\ 2020 = reallønn\ 2020 \cdot \frac{\text{KPI 2020}}{100} = 514\,866 \cdot \frac{112{,}2}{100} = 577\,679$$

Oppgave 9

Tabellen nedenfor viser nominell lønn og reallønn for bibliotekarer i perioden 2015 til 2020.

År	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Nominell lønn	463 680	477 960			520320	
KPI	100	103,6	105,5	108,4	110,8	112,2
Reallønn			463962	464502		468663

Løs oppgavene nedenfor ved hjelp av ExCel.

a) Skriv av tabellen, og regn ut beløpet i de blanke cellene.
b) Presenter utviklingen i både nominell lønn og reallønn i ett passende diagram. Kommenter resultatet.
c) Finn årlig prosentvis endring i nominell lønn mellom hvert år i tabellen.
d) Finn årlig prosentvis endring i reallønn mellom hvert år i tabellen. Sammenlign resultatet med resultatet fra oppgave c).

Løs oppgavene nedenfor ved hjelp av GeoGebra

e) Finn gjennomsnittlig prosentvis endring i nominell lønn per år fra 2015 til 2020.
f) Finn gjennomsnittlig prosentvis endring i KPI per år fra 2015 til 2020.
g) Finn gjennomsnittlig prosentvis endring i reallønn. Ser du noen sammenheng mellom svarene i oppgave e), f) og g)?

En eksamensoppgave

Isak ser på hvordan konsumprisindeksen har endret seg de siste årene.

Han vil lage et regneark som vist nedenfor.

	A	B	C	D
1	ÅR	KPI	VEKST (I POENG) FRA ÅRET FØR	VEKST (I PROSENT) FRA ÅRET FØR
2	2010	92,1		2,4 %
3	2011	93,3		
4	2012	93,9		
5	2013	95,9		
6	2014	97,9		
7	2015	100		
8	2016	103,6		
9	2017	105,5		
10	2018	108,4		
11	2019	110,8		
12	2020	112,2	1,4	

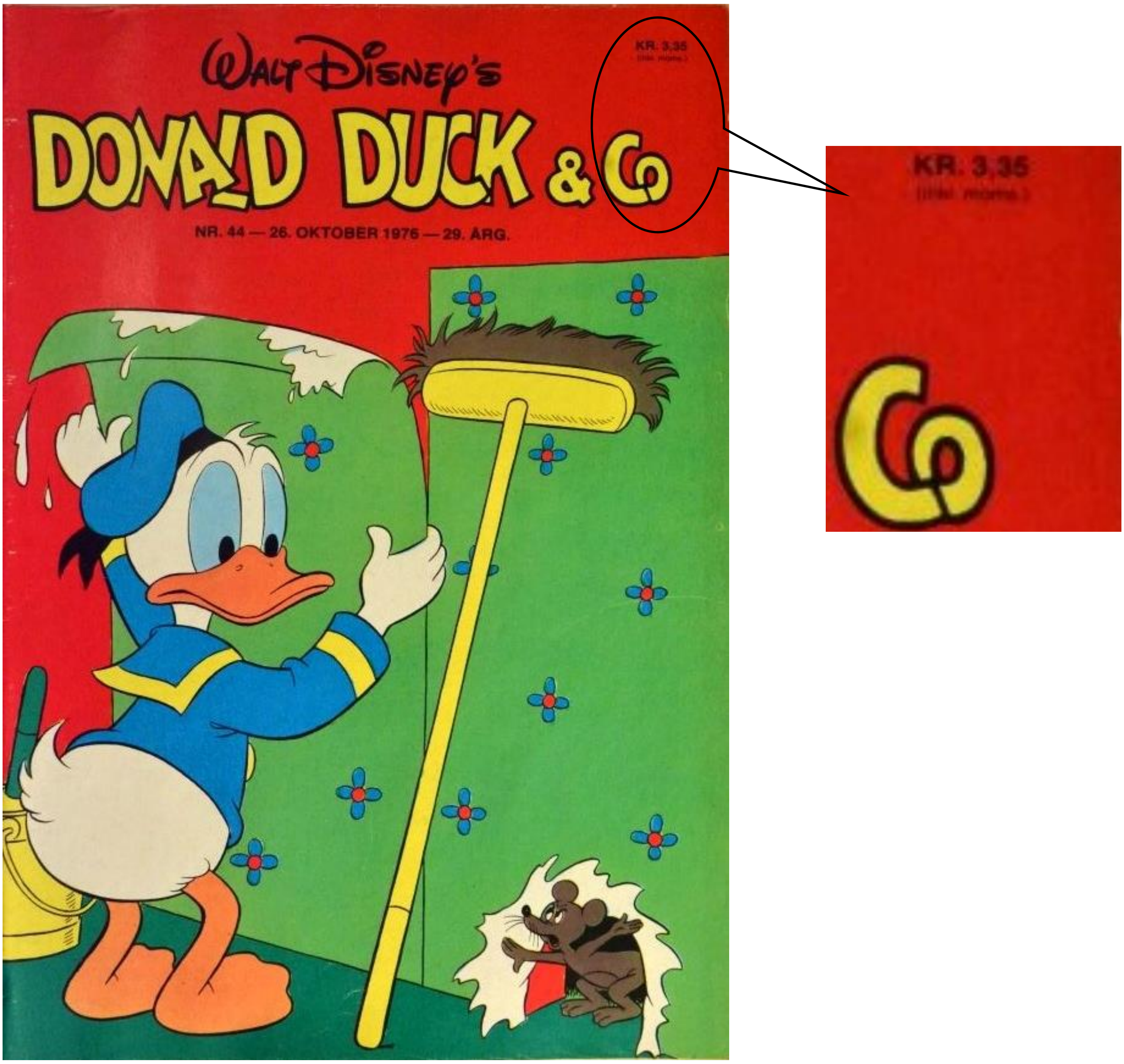
a) Lag regnearket. Bruk formler i de grønne cellene, slik at du får fylt ut tabellen.
b) Hvilket tall skal stå i celle C2?
c) Hvor mange poeng og hvor mange prosent har konsumprisindeksen i gjennomsnitt økt med per år i perioden 2011 – 2020?

I 2020 hadde Isak en nominell lønn på 450 000 kroner.

d) Gjør antakelser og beregninger slik at du kan si noe om hva Isaks nominelle lønn bør være i 2025, dersom han skal ha samme kjøpekraft da som i 2020.

Kroneverdi

Nedenfor ser du et Donald-blad fra 26. oktober 1976. Til høyre ser du prisen på bladet.



I 1976 måtte vi betale kr. 3,35 for et Donald-blad. I 2015 et tilsvarende blad kr. 41,90. Det betyr at vi i 2015 måtte å betale flere kroner enn tidligere år for det samme produktet, og prisøkningen skyldes ikke at Donald-bladene har blitt større eller bedre.

Vi fikk mer for 1 krone i 1976 enn vi fikk for 1 krone i 2015, og vi kan dermed si at 1 krone var mer verdt i 1976 enn den var i 2015.

For å kunne sammenligne verdien av 1 krone til forskjellige tider bruker vi begrepet **kroneverdi**.

Kroneverdien er omvendt proporsjonal med KPI, og beregnes etter formelen

$$Kroneverdi = \frac{100}{\text{KPI}}$$

I basisåret vil 1 krone ha verdien 1, fordi:

$$Kroneverdi\ basisår = \frac{100}{\text{KPI basisår}} = \frac{100}{100} = 1$$

KPI i 1976 var 21. Det gir denne kroneverdien:

$$Kroneverdi\ 1976 = \frac{100}{\text{KPI 1976}} = \frac{100}{21} = 4{,}76$$

Det betyr at 1 krone i 1976 var omtrent 5 ganger så mye verdt som 1 krone i 2015.

KPI i 2020 var 112,2. Det gir denne kroneverdien:

$$Kroneverdi\ 2020 = \frac{100}{\text{KPI 2020}} = \frac{100}{112{,}2} = 0{,}89$$

Det betyr at 1 krone i 2020 var 11 % mindre verdt i forhold til 1 krone i 2015.

Hva betyr dette i praksis? Tenk deg at du i 2015 hadde lagt en bunke med sedler i en bankboks, og åpnet bankboksen i 2020. I 2020 ville du fått handlet 11 % mindre for disse pengene enn dersom du hadde brukt dem i 2015.

Dette er viktig å tenke på når du skal spare penger. Penger som står på konto med lavere årlig rente sammenlignet med årlig økning i KPI taper verdi, selv om beløpet stiger!

Oppgave 10

Fyll inn kroneverdien i tabellen nedenfor.

År	1980	1990	2000	2010	2015	2017
KPI	28,7	59,9	75,5	92,1	100	105,5
Kroneverdi						

Oppgave 11

I 1950 var kroneverdien 18,87. Regn ut KPI i 1950.

Løsningsforslag

Oppgave 1

År	2014	2015	2018	2020
Pris	378	399	420	478
Prisindeks	94,7	100	105,3	119,8

2015 regnes som basisår for denne varen.

Oppgave 2

2016 regnes som basisår for denne varen

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	År	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
2	Pris kr	445	453	463	498	506	520	535
3	Prisindeks	96,1	97,9	100	107,6	109,3	112,4	115,6
4	Prosentvis endring i kroner		1,9 %	2,1 %	7,6 %	1,6 %	2,8 %	2,8 %
5	Prosentvis endring i prisindeks		1,9 %	2,1 %	7,6 %	1,6 %	2,8 %	2,8 %

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	År	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
2	Pris kr	445	=D2*C3/100	463	498	=D2*F3/100	=D2*G3/100	535
3	Prisindeks	=B2/D2*100	97,9	100	=E2/D2*100	109,3	112,4	=H2/D2*100
4	Prosentvis endring i kroner		=C2/B2-1	=D2/C2-1	=E2/D2-1	=F2/E2-1	=G2/F2-1	=H2/G2-1
5	Prosentvis endring i prisindeks		=C3/B3-1	=D3/C3-1	=E3/D3-1	=F3/E3-1	=G3/F3-1	=H3/G3-1

Oppgave 3

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		Pris				Indeks			
2	År	2015	2016	2017	2018	2015	2016	2017	2018
3	Bukse	593	649	684	756	100	109,4	115,3	127,5
4	Kjøttdeig	58,6	62,4	53,25	57,8	100	106,5	90,9	98,6
5	Brus	17,9	19,5	21,9	23,5	100	108,9	122,3	131,3
6	Brettspill	357	363	379	399	100	101,7	106,2	111,8
7	Kjøleskap	4670	4891	5213	5488	100	104,7	111,6	117,5

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		Pris				Indeks			
2	År	2015	2016	2017	2018	2015	2016	2017	2018
3	Bukse	593	649	684	756	100	=C3/$B$3*100	=D3/$B$3*100	=E3/$B$3*100
4	Kjøttdeig	58,6	62,4	53,25	57,8	100	=C4/$B$4*100	=D4/$B$4*100	=E4/$B$4*100
5	Brus	17,9	19,5	21,9	23,5	100	=C5/$B$5*100	=D5/$B$5*100	=E5/$B$5*100
6	Brettspill	357	363	379	399	100	=C6/$B$6*100	=D6/$B$6*100	=E6/$B$6*100
7	Kjøleskap	4670	4891	5213	5488	100	=C7/$B$7*100	=D7/$B$7*100	=E7/$B$7*100

Oppgave 5

Kr. 560

Oppgave 6

	A	B	C	D	E	F	G
1	År	2015	2016	2017	2018	2019	2020
2	Pris	405	419,58	427,28	439	452,68	463,89
3	Prisindeks	100	103,6	105,5	108,4	111,8	114,5

	A	B	C	D	E	F	G
1	År	2015	2016	2017	2018	2019	2020
2	Pris	405	419,58	427,28	439	452,68	463,89
3	Prisindeks	100	=C2/$B$2*100	=D2/$B$2*100	=E2/$B$2*100	=F2/$B$2*100	=G2/$B$2*100

Varen følger utviklingen i KPI frem til 2018.

Oppgave 7

	A	B	C	D
1		Gjennomsnittlig månedslønn		Prosentvis lønnsvekst
2	Yrkesgruppe	2015	2019	2015-2019
3	Ledere	63400	70150	10,6 %
4	Akademiske yrker	49620	54970	10,8 %
5	Kontoryrker	36840	41000	11,3 %
6	Salg og service	32510	36140	11,2 %
7	Håndverker	36080	40210	11,4 %

	A	B	D
1		Gjennomsnittlig månedslønn	Prosentvis lønnsvekst
2	Yrkesgruppe	2015	2015-2019
3	Ledere	63400	=C3/B3-100%
4	Akademiske yrker	49620	=C4/B4-100%
5	Kontoryrker	36840	=C5/B5-100%
6	Salg og service	32510	=C6/B6-100%
7	Håndverker	36080	=C7/B7-100%

Fra 2015 til 2019 har prisnivået i Norge økt med 10,8 %. Det betyr at ledere har hatt en relativt sett negativ lønnsvekst, lønnsnivået til akademiske yrker har stått stille. De andre yrkesgruppene har hatt en liten lønnsvekst i forhold til prisutviklingen.

Oppgave 8

	A	B	C	D	E
1		Nominiell lønn		Reallønn	
2	Yrke/årstall	2019	2020	2019	2020
3	Jordmor	560 592	565 344	505 949	503 872
4	Farmasøyt	642 000	644 400	579 422	574 332
5	Grunnskolelærer	554 040	557 550	500 036	496 925
6	App-programmerer	685 440	713 014	618 628	635 485

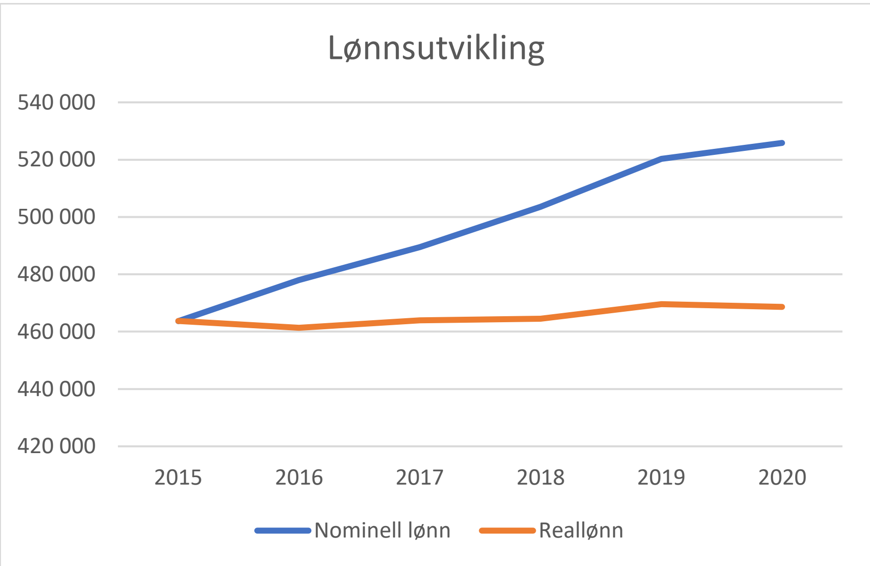
	A	B	C	D	E
1		Nominiell lønn		Reallønn	
2	Yrke/årstall	2019	2020	2019	2020
3	Jordmor	560592	565344	=B3/110,8*100	=C3/112,2*100
4	Farmasøyt	642000	644400	=B4/110,8*100	=C4/112,2*100
5	Grunnskolelærer	554040	557550	=B5/110,8*100	=C5/112,2*100
6	App-programmerer	685440	713014	=B6/110,8*100	=C6/112,2*100

Utregning av reallønn viser at alle yrkesgruppene bortsett fra app-programmerere har hatt en negativ lønnsutvikling fra 2019 til 2020

Oppgave 9

	A	B	C	D	E	F	G
1	År	2015	2016	2017	2018	2019	2020
2	Nominell lønn	463 680	477 960	489 480	503 520	520320	525 840
3	Prosentvs endring		3,1 %	2,4 %	2,9 %	3,3 %	1,1 %
4	KPI	100	103,6	105,5	108,4	110,8	112,2
5	Reallønn	463 680	461 351	463962	464502	469 603	468663
6	Prosentvs endring		-0,5 %	0,6 %	0,1 %	1,1 %	-0,2 %

	A	B	C	D	E	F	G
1	År	2015	2016	2017	2018	2019	2020
2	Nominell lønn	463680	477960	=D5*D4/100	=E5*E4/100	520320	=G5*G4/100
3	Prosentvs endring		=C2/B2-1	=D2/C2-1	=E2/D2-1	=F2/E2-1	=G2/F2-1
4	KPI	100	103,6	105,5	108,4	110,8	112,2
5	Reallønn	=B2	=C2/C4*100	463962	464502	=F2/F4*100	468663
6	Prosentvs endring		=C5/B5-1	=D5/C5-1	=E5/D5-1	=F5/E5-1	=G5/F5-1



Diagrammet og prosentutregningen viser det samme: selv om den nominelle lønna har økt i hvert år, har det vært liten vekst i reallønna. Bibliotekarer har altså omtrent ikke fått økt kjøpekraft i perioden.

<table>
<tr><th>Nominell lønn</th><th>KPI</th><th>Reallønn</th></tr>
<tr>
<td><table><tr><th></th><th>A</th><th>B</th></tr><tr><td>1</td><td>2015</td><td>463680</td></tr><tr><td>2</td><td>2019</td><td>525840</td></tr></table></td>
<td><table><tr><th></th><th>A</th><th>B</th></tr><tr><td>1</td><td>2015</td><td>100</td></tr><tr><td>2</td><td>2019</td><td>112.2</td></tr></table></td>
<td><table><tr><th></th><th>A</th><th>B</th></tr><tr><td>1</td><td>2015</td><td>463680</td></tr><tr><td>2</td><td>2019</td><td>468663</td></tr></table></td>
</tr>
<tr><td>1,032 = 103,2 % -> + 3,2 %</td><td>1,029 = 102,9 % -> + 2,9 %</td><td>1,003 = 100,3 % -> + 0,3 %</td></tr>
</table>

Vi kan se at årlig økning i reallønn er forskjellen mellom årlig økning i nominell lønn og KPI.

Eksamensoppgave side 151

	A	B	C	D
1	År	KPI	Vekst i poeng	Vekst i prosent
2	2010	92,1	2,2	2,4 %
3	2011	93,3	1,2	1,3 %
4	2012	93,9	0,6	0,6 %
5	2013	95,9	2	2,1 %
6	2014	97,9	2	2,1 %
7	2015	100	2,1	2,1 %
8	2016	103,6	3,6	3,6 %
9	2017	105,5	1,9	1,8 %
10	2018	108,4	2,9	2,7 %
11	2019	110,8	2,4	2,2 %
12	2020	112,2	1,4	1,3 %
13				
14	Gjennomsnittlig økning per år fra 2011 til 2020:		2,1	2,07 %

	C	D
1	Vekst i poeng	Vekst i prosent
2	=B2-(B2/(100%+D2))	0,024
3	=B3-B2	=C3/B2
4	=B4-B3	=C4/B3
5	=B5-B4	=C5/B4
6	=B6-B5	=C6/B5
7	=B7-B6	=C7/B6
8	=B8-B7	=C8/B7
9	=B9-B8	=C9/B8
10	=B10-B9	=C10/B9
11	=B11-B10	=C11/B10
12	1,4	=C12/B11
13		
14	=GJENNOMSNITT(C4:C12)	=GJENNOMSNITT(D4:D12)

Dersom Isak skal ha lik kjøpekraft, må reallønna være like høy i 2025 som i 2020.

Vi antar at utviklingen i KPI frem til 2025 vil være eksponentiell. Forventet KPI i 2025 blir da:

$112{,}2 \cdot 1{,}0207^5 = 124{,}3$

	A	B	C
1	År	2020	2025
2	Nominell lønn	kr 450 000	kr 498 529
3	KPI	112,2	124,3
4	Reallønn	kr 401 070	kr 401 070

	A	B	C
1	År	2020	2025
2	Nominell lønn	450000	=C4*C3/100
3	KPI	112,2	124,3
4	Reallønn	=B2*100/B3	=B4

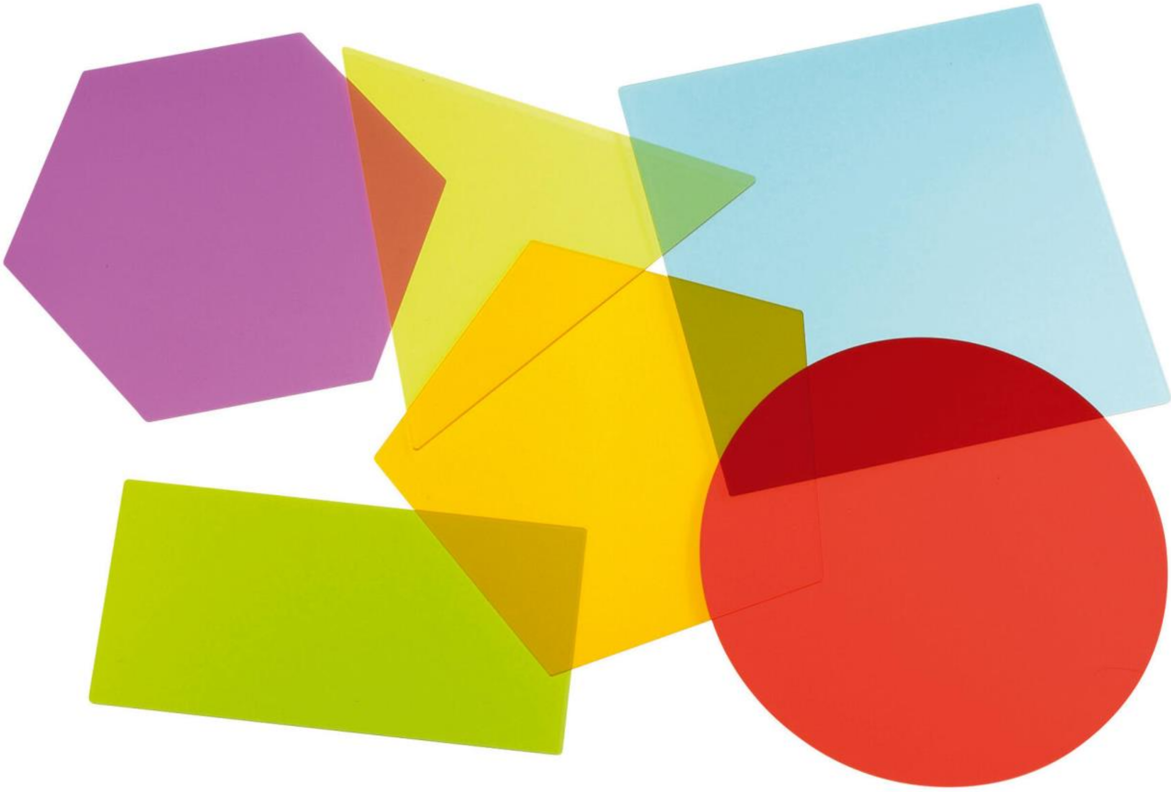
Oppgave 10

År	1980	1990	2000	2010	2015	2017
KPI	28,7	59,9	75,5	92,1	100	105,5
Kroneverdi	3,48	1,67	1,32	1,09	1,00	0,95

Oppgave 11

KPI 1950 = 5,3

Geometri



Målet for opplæringen er at eleven skal kunne:

- Utforske og forklare hvordan formlikhet, målestokk og egenskaper ved geometriske figurer kan brukes i beregninger og praktisk arbeid

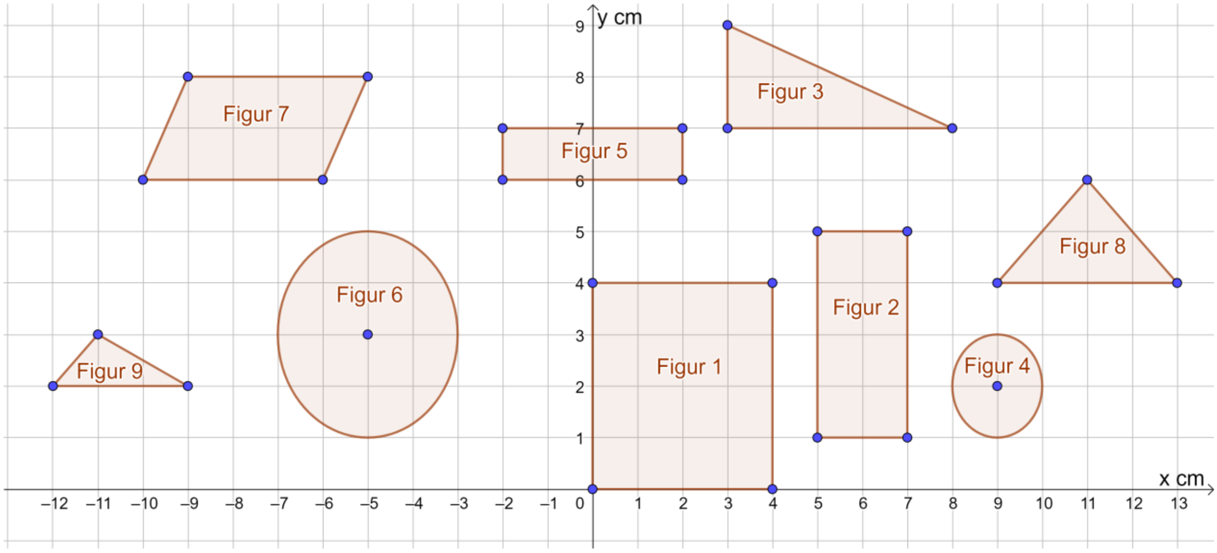
Areal og omkrets

Oppgave 1

Fyll ut tabellen nedenfor. Hva beskriver formlene i kolonnen til høyre?

Formel	Hva regnes ut	Skisse med mål
$lengde \cdot bredde$		
$side^2$		
$\frac{lengde \cdot bredde}{2}$		
πr^2		
$side1 + side2 + side3 + side4$		
$side \cdot 4$		
$side1 + side2 + side3$		
$2r\pi$		

Oppgave 2

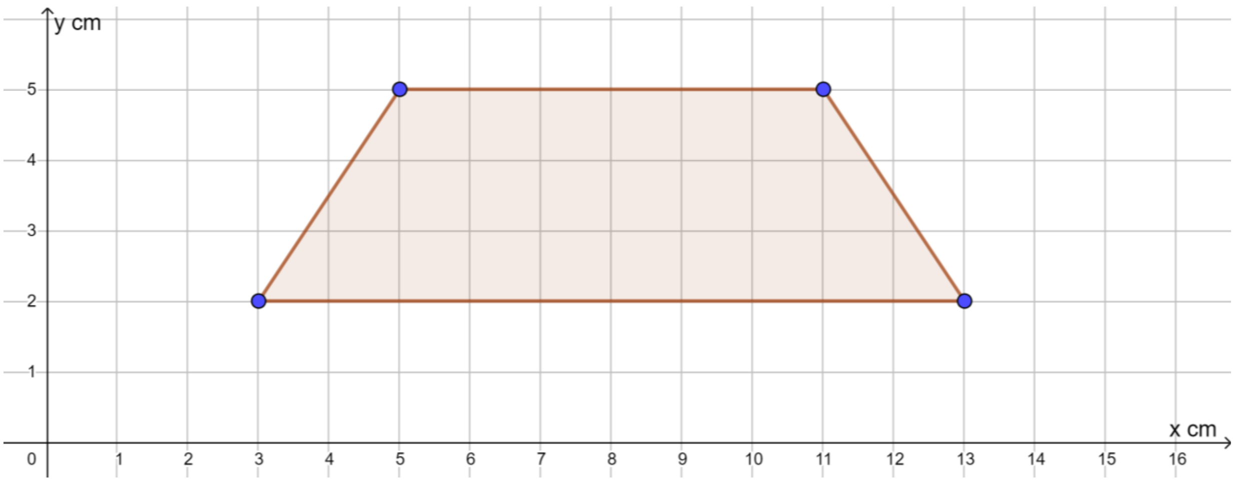


a) Regn arealet til figurene ovenfor.

b) Regn omkretsen til figurene 1, 2, 4, 5 og 6.

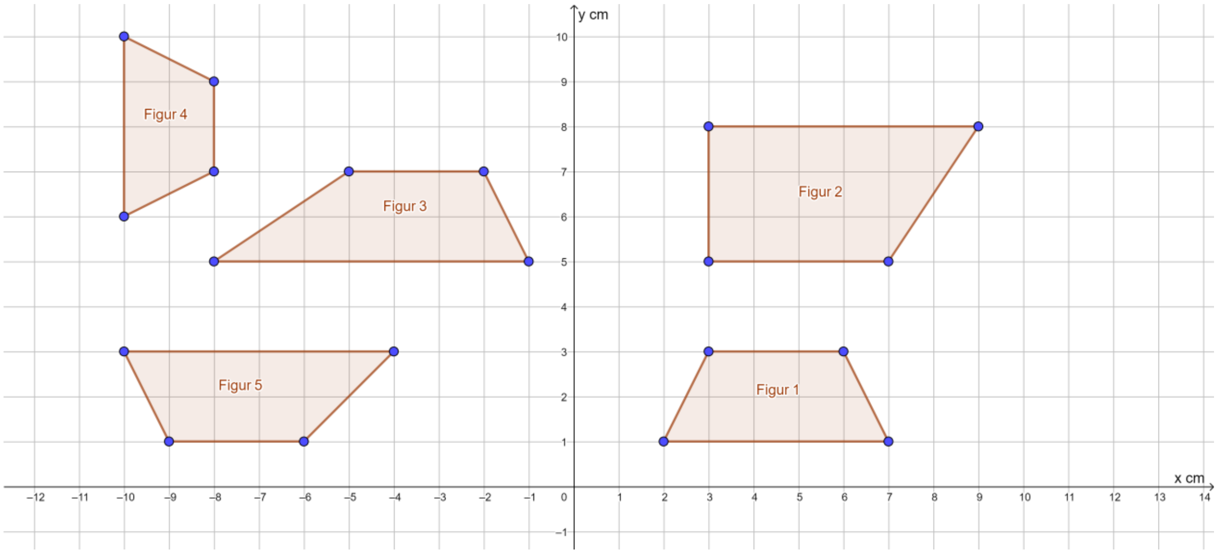
Oppgave 3

Hvordan kan vi regne arealet til figuren nedenfor?



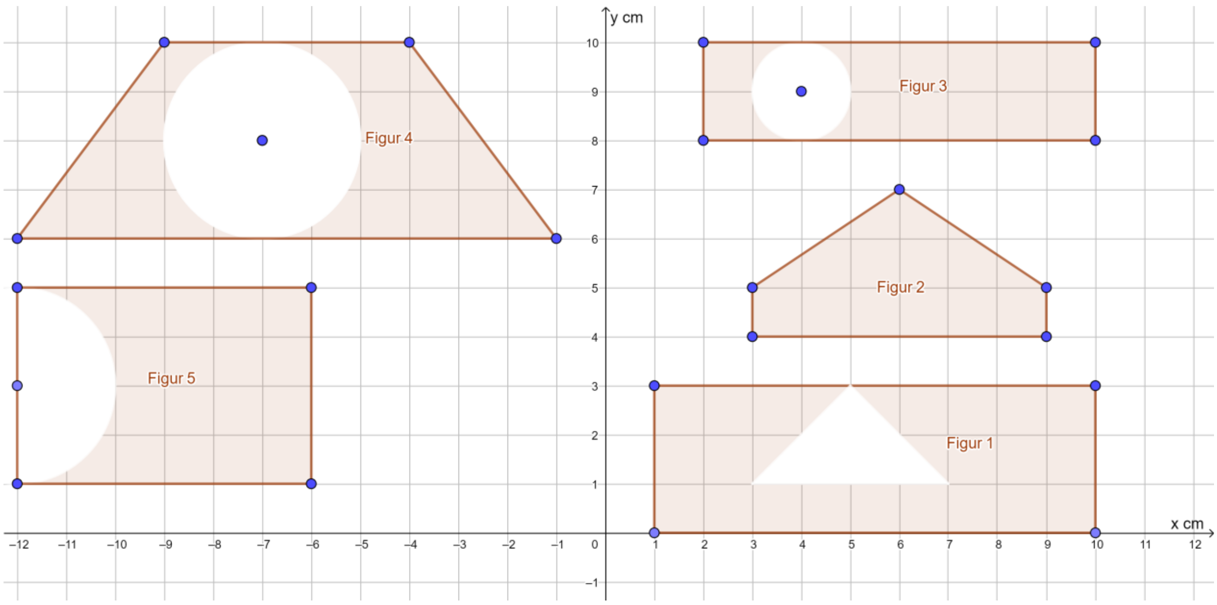
Oppgave 4

Regn arealet til figurene nedenfor.



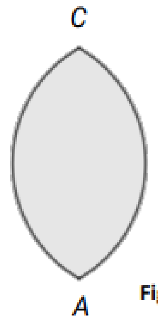
Oppgave 5

Finn arealet til det fargelagte området i figurene nedenfor.



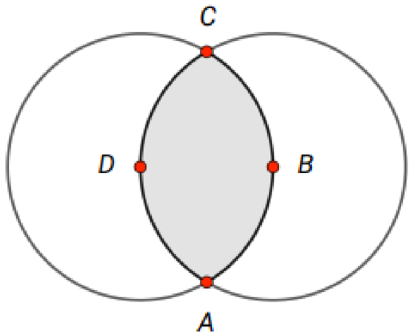
En eksamensoppgave

Laila er billedkunstner og har fått i oppdrag å dekorere inngangspartiet i et rådhus. Hun har bestemt seg for å bruke geometriske figurer.
Til høyre ser du en av figurene hun vil bruke.

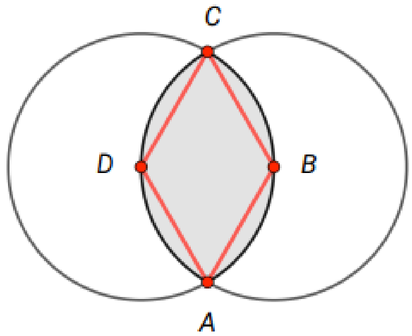


Figur 1

Hun tegner figuren ved hjelp av to like store sirkler med sentrum i B og D.
Se nedenfor.



Figur 2



Figur 3

Laila påstår at de fire røde linjestykkene i figur 3 har samme lengde.

a) Forklar at dette er riktig.

Arealet av figur 1 er gitt ved

$$A = \left(\frac{4 \cdot \pi - 3 \cdot \sqrt{3}}{6} \right) \cdot r^2$$

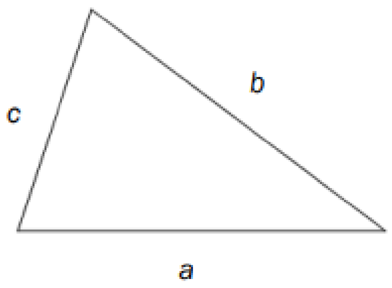
der r er radius i sirklene Laila tegner.

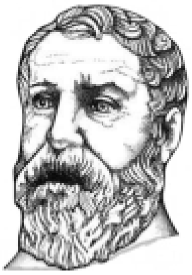
Laila vil lage figurene ut fra sirkler med radius $r = 0{,}5$ m. Hun har et spann med 5 L maling. På spannet står det at 1 L maling vil dekke 1 m^2.

b) Har Laila nok maling til å male 16 figurer?

En eksamensoppgave

Heron fra Alexandria levde i det første århundret av vår tidsregning.
Han har fått en formel oppkalt etter seg.



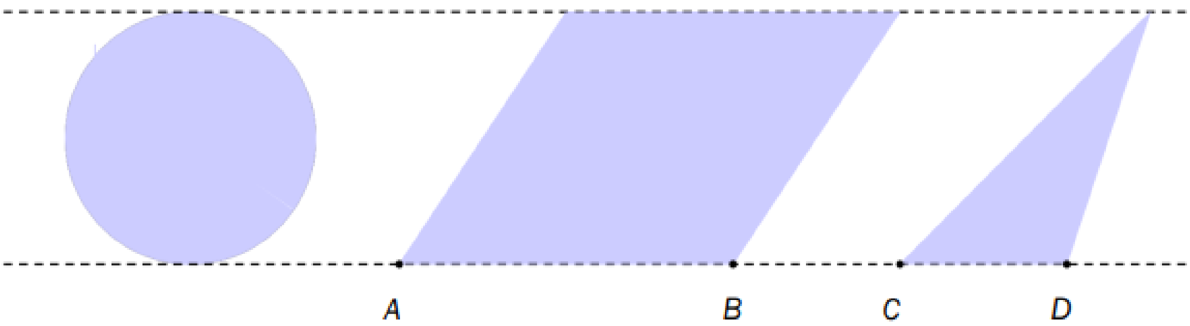


Vi kan bruke Herons formel til å regne ut arealet T av en trekant med sider a, b og c.

Arealet er $T=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ der $s=\dfrac{a+b+c}{2}$

Bruk Herons formel til å bestemme arealet av en trekant med sider 6, 10 og 14 cm.

En eksamensoppgave

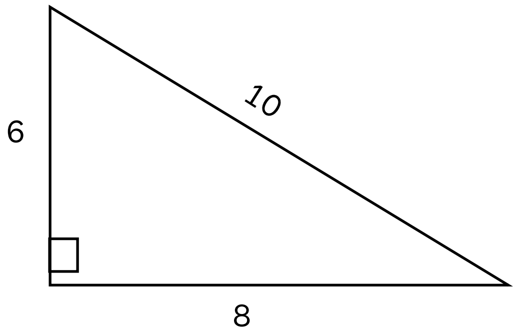


Ovenfor ser du to parallelle linjer, en sirkel, et parallellogram og en trekant.
$AB=8$ og $CD=4$. Sirkelen har areal 9π.

Bestem arealet av parallellogrammet og av trekanten.

Rettvinklet trekant - Pytagoras

Utgangspunkt



I flere tusen år har vi hatt kunnskap om at det er en sammenheng mellom de korte sidene i en rettvinklet trekant og den lange siden.

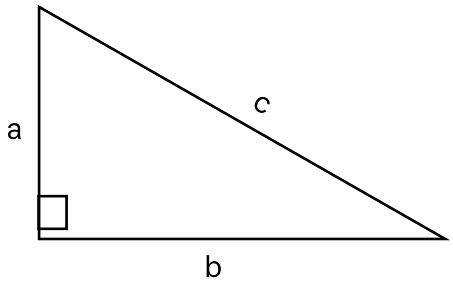
La oss først sammenligne lengdene til sidene:

6 + 8 = 14. Dette er ikke det samme som den

La oss deretter sammenligne kvadrattallet til sidene:

$6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$ $10^2 = 100$.

Her ser vi at svarene blir like, og det er ikke en tilfeldighet. Det viser seg at kvadrattallet til de to korte sidene lagt sammen blir like mye som kvadrattallet til den lange siden. Matematisk skriver vi denne sammenhengen slik:



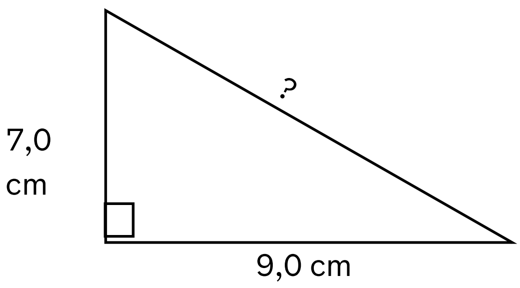
$a^2 + b^2 = c^2$

eller

$c^2 = a^2 + b^2$

I skolematematikken kaller vi ofte de korte sidene for katet (k) og den lange siden hypotenus (h). Vi bruker denne kunnskapen til å beregne ukjente sider i rettvinklede trekanter.

Å finne den lange siden (hypotenus)



Vi kan finne kvadrattallet til den lange siden ved å legge sammen kvadrattallene til de to korte sidene:

$7^2 + 9^2 = 49 + 81 = 130$

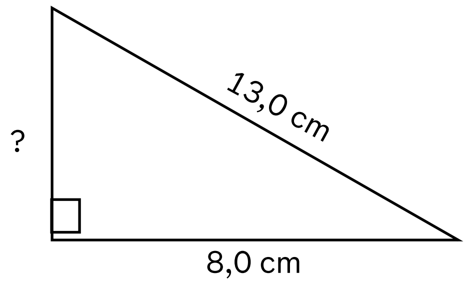
Nå vet vi at kvadrattallet til den lange siden blir 130. For å finne lengden til den lange siden må vi bruke kvadratrot:

$\sqrt{130} = 11,4$

Det betyr at lengden på den lange siden er 11,4 cm.

'

Å finne en av de korte sidene (katet)



Vi kan finne kvadrattallet til den korte siden ved å regne kvadrattallet til de to kjente sidene, og deretter trekke det minste fra det største:

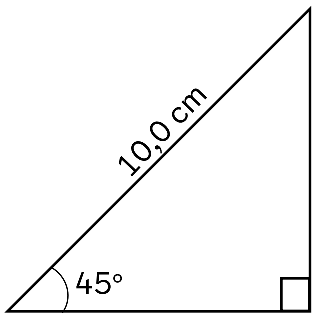
$13^2 - 8^2 = 169 - 64 = 105$

Nå vet vi at kvadrattallet til den andre korte siden blir 105. For å finne lengden til den ukjente siden må vi bruke kvadratrot:

$\sqrt{105} = 10,2$

Det betyr at lengden på den korte siden er 10,2 cm.

90° - 45°- 45° - trekant



I en rettvinklet trekant hvor de to andre vinklene er 45° vil katetene være like lange. Det vil si at kvadrattallet til hvert av katetene er halvparten av kvadrattallet til hypotenusen.

$10^2 : 2 = 100 : 2 = 50$

Nå vet vi at kvadrattallet til begge katetene er 50. For å finne lengden til hver av katetene må vi bruke kvadratrot:

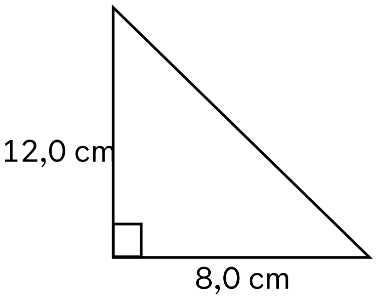
$\sqrt{50} = 7,1$

Det betyr at lengden på katetene er 7,1 cm.

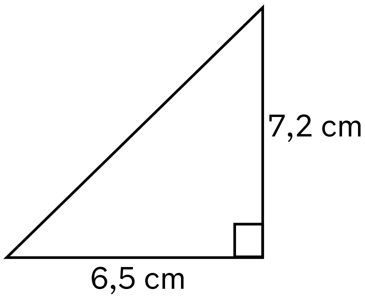
Oppgave 6

Finn den ukjente siden i trekantene nedenfor.

a)



b)



c)

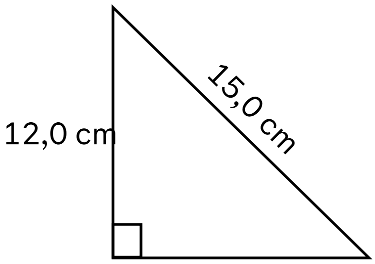
I en rettvinklet trekant er lengdene på de to katetene 14,7 cm og 19,2 cm.

Lag en hjelpetegning av figuren og regn ut lengden på hypotenusen.

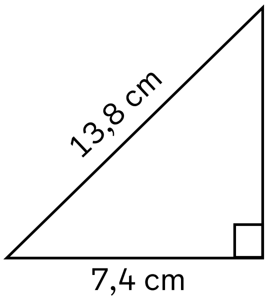
Oppgave 7

Finn den ukjente siden i trekantene nedenfor.

a)



b)



c)

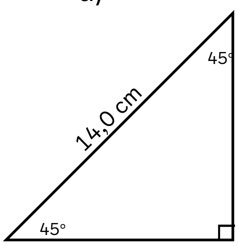
I en rettvinklet trekant er lengdene på hypotenusen 3,8 m og det ene katetet 1,7 m.

Lag en hjelpetegning av figuren og regn ut lengden på det andre katetet.

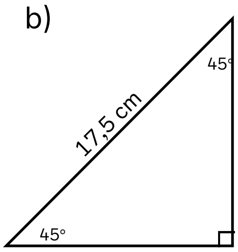
Oppgave 8

Finn de ukjente sidene i trekantene nedenfor.

a)



b)



c)

I en rettvinklet trekant hvor vinkelen mellom hypotenusen og hver av katetene er 45° er lengden på hypotenusen 8 m.

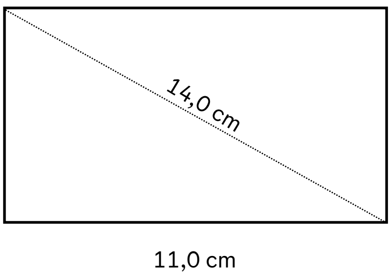
Lag en hjelpetegning av figuren og regn ut lengden på hver av katetene.

Praktisk bruk av Pytagoras' setning

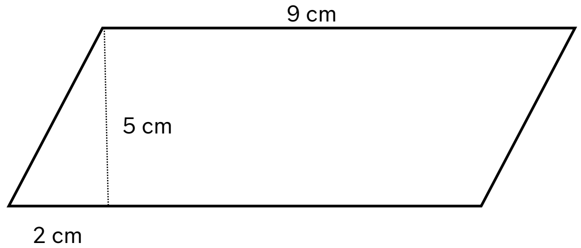
Oppgave 9

Regn areal og omkrets av figurene nedenfor

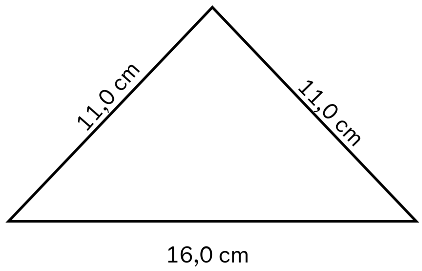
a)



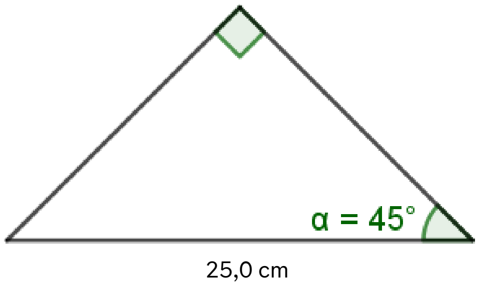
b)



c)



d)



En eksamensoppgave

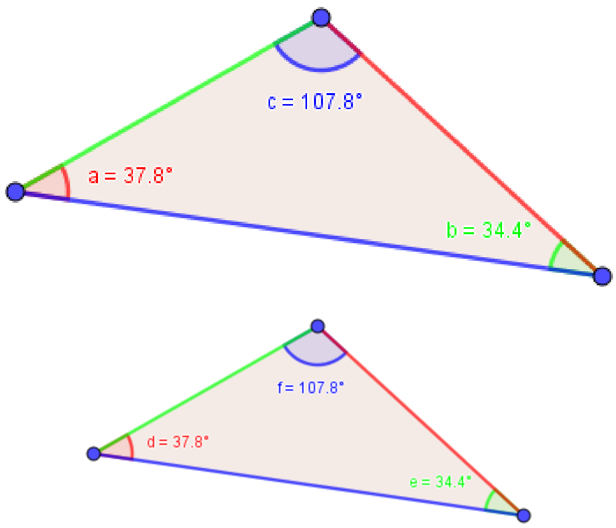
Cathrine skal fra A til B. Se kartet til venstre. Hun kan velge å gå fra A til B, eller hun kan sykle fra A til C og så videre fra C til B.
Avstanden fra A til C er 400 m, og avstanden fra C til B er 300 m.

a) Hvor langt er det fra A til B?
b) Hvor mange prosent lengre er sykkelturen sammenlignet med gåturen?

På kartet til Cathrine er Sjøsanden 4,0 cm lang. I virkeligheten er Sjøsanden 0,8 km lang.

c) Bestem målestokken til kartet.

Formlike trekanter



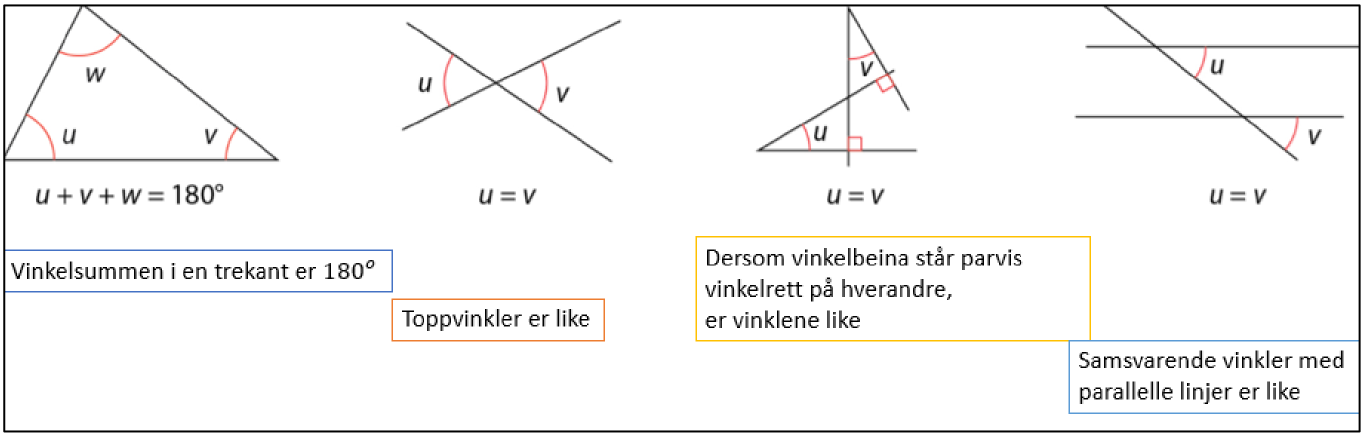
Dersom vinklene i to trekanter er identiske, er trekantene formlike. Vi sier at vinklene er parvis like store. Du kan tenke på det som om den ene trekanten er en mindre eller en større kopi av den andre.

De to trekantene til venstre er formlike hverandre. De like vinklene er markert med farger. De kalles samsvarende vinkler.

Sider som ligger på samme plass i de to trekantene kalles samsvarende sider. De samsvarende sidene er markert med farger.

Hvordan avgjøre om to trekanter er formlike hverandre?

I rammen nedenfor finner du fire matematiske sannheter du skal støtte deg på når du skal avgjøre om to trekanter er formlike hverandre. Alle begrunnelser tar utgangspunkt i at vinkelsummen i en trekant er 180°, og at dersom du vet størrelsen på to av vinklene kan du regne ut den siste.

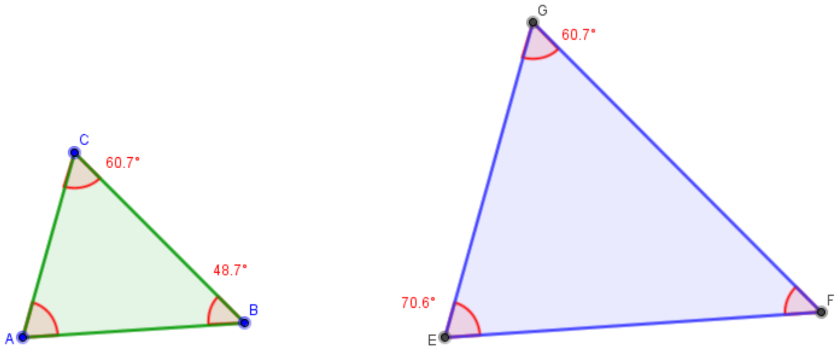


I oppgaver er ofte trekantene tegnet på en slik måte at det er lett å bli forvirret. De kan være tegnet speilvendt, rotert, liggende oppå hverandre eller på andre måter som skaper vansker.

Det er derfor helt nødvendig å tegne dem ved siden av hverandre med samsvarende vinkler og samsvarende sider på samme plass.

Eksempel:

Forklar at △ABC er formlik △EFG



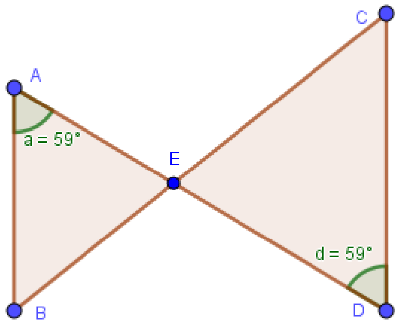
∠A = 180° - 48,7° - 60,7° = 70,6° = ∠E

∠F = 180° - 70,6° - 60,7° = 48,7° = ∠B

∠C = 60,7° = ∠G

Har nå vist at trekantene har parvis like store vinkler. Derfor er △ABC formlik △EFG.

Forklar at △ABE er formlik △CDE



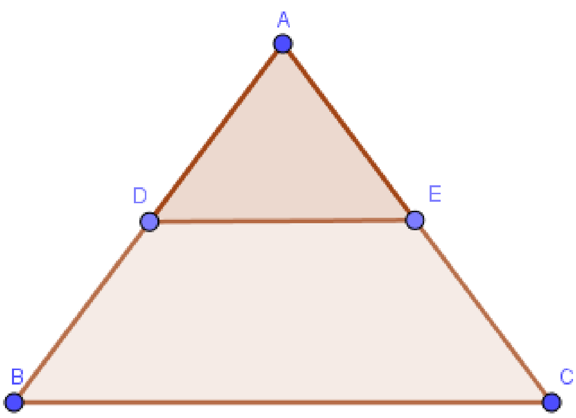
∠A = ∠D

∠CED og ∠AEB er toppvinkler, og dermed like

Da må ∠B = ∠C

Har nå vist at trekantene har parvis like store vinkler. Derfor er △ABE formlik △CDE.

Linjestykkene BC og DE er parallelle. Forklar at △ABC er formlik △ADE



∠A er lik i begge trekanter.

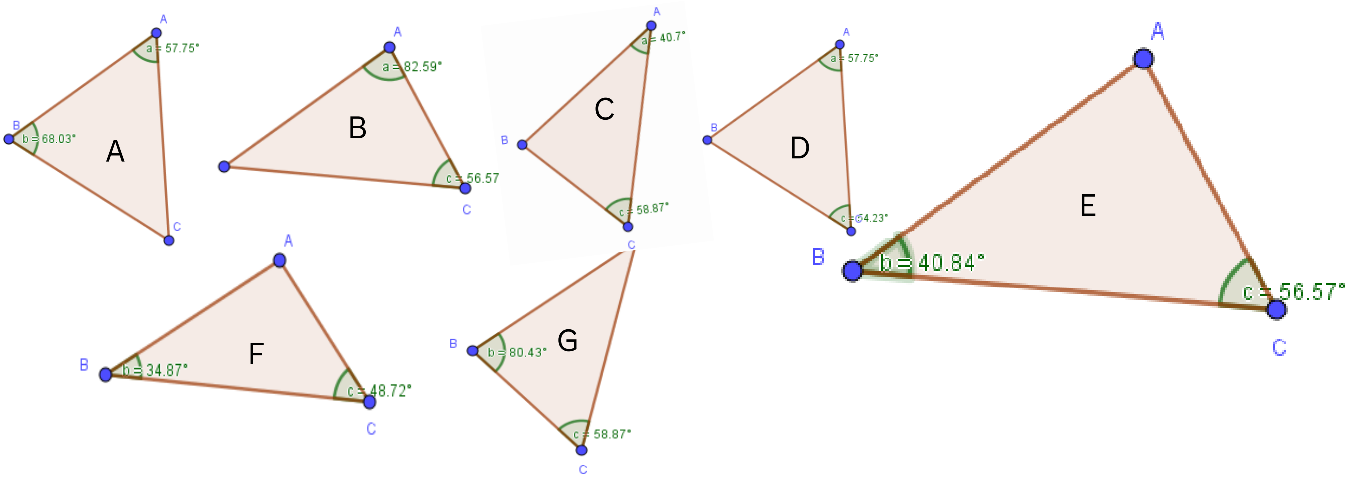
∠D og ∠B samsvarende vinkler med parallelle linjer. De er derfor like store.

∠E og ∠C samsvarende vinkler med parallelle linjer. De er derfor like store.

Har nå vist at trekantene har parvis like store vinkler. Derfor er △ABC formlik △ADE.

Oppgave 10

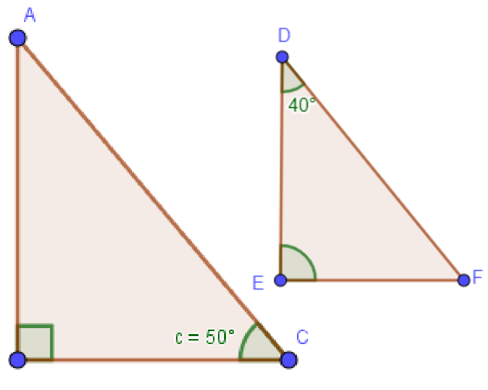
Nedenfor ser du trekantene A – G. Det er 3 par av formlike trekanter. Hvilke av trekantene er formlike? Tegn de formlike trekantene ved siden av hverandre, skriv på størrelsen på vinklene, og marker samsvarende sider.



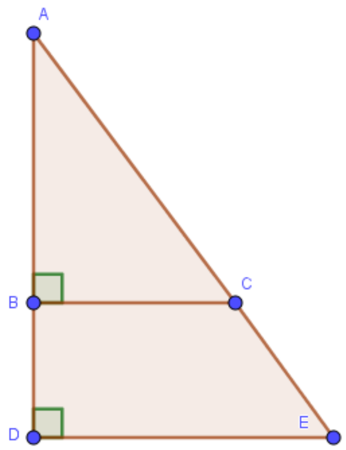
Oppgave 11

Forklar hvorfor trekantene er formlike.

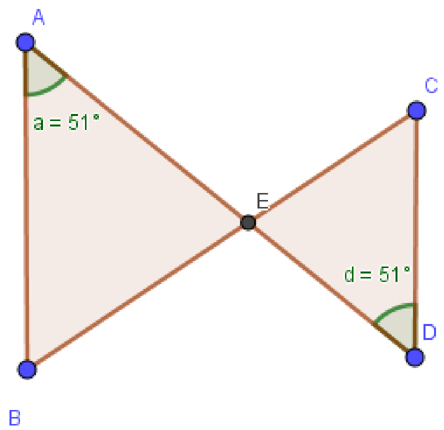
a)



b)



c)



Tegn trekantene ved siden av hverandre og marker samsvarende sider.

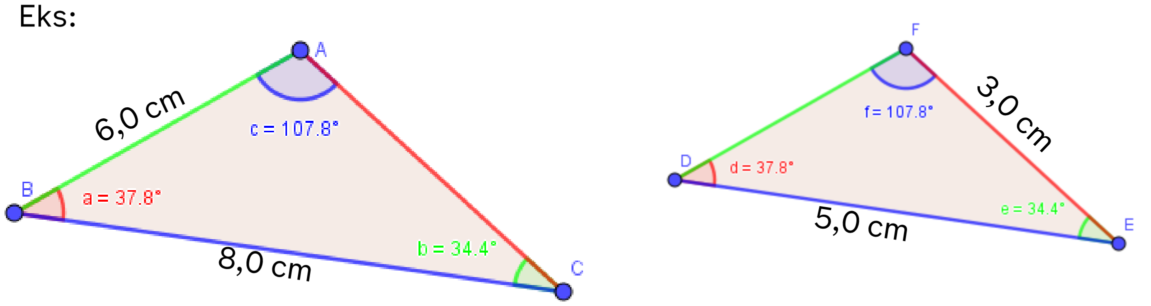
Hvordan bruke formlike trekanter til å finne ukjente lengder?

Dersom to trekanter er formlike vil forholdet mellom de samsvarende sidene være likt, og forholdet vil være proporsjonale størrelser.

Dersom vi vet forholdstallet mellom trekantene kan vi bruke forholdstallet til å regne ut de ukjente sidene, enten ved å multiplisere eller dividere med forholdstallet.

Vi kan også sette opp en forholdsligning, eller tegne en lineær graf.

Eks:



Finn lengden AC og lengden DF

<u>Ved bruk av forholdstall</u>

Vi finner først forholdstallet ved å dividere de kjente samsvarende sidene.

$$\frac{BC}{DE} = \frac{8\ cm}{5\ cm} = 1{,}6$$

Vi multipliserer med forholdstallet, dersom vi ønsker en lengre lengde:

$$AC = EF \cdot 1{,}6 = 3{,}0\ cm\ \cdot 1{,}6 = 4{,}8\ cm$$

Vi dividerer med forholdstallet, dersom vi ønsker en kortere lengde:

$$DF = \frac{AB}{1{,}6} = \frac{6{,}0\ cm}{1{,}6} = 3{,}8\ cm$$

Dette kan også føres i en tabell:

Eksempel	Samsvarende sider	Samsvarende sider	Samsvarende sider
ΔABC	BC = 8 cm	AC = 3,0 cm · 1,6 = 4,8 cm	AB = 6,0 cm
ΔDEF	DE = 5 cm	EF = 3,0 cm	DF = 6,0 cm : 1,6 = 3,8 cm
Forholdstall	$\frac{8}{5}$ = 1,6		

Ved bruk av forholdsligning

Vi sammenligner alltid med de kjente samsvarende sidene. De ukjente sidene løses som x.

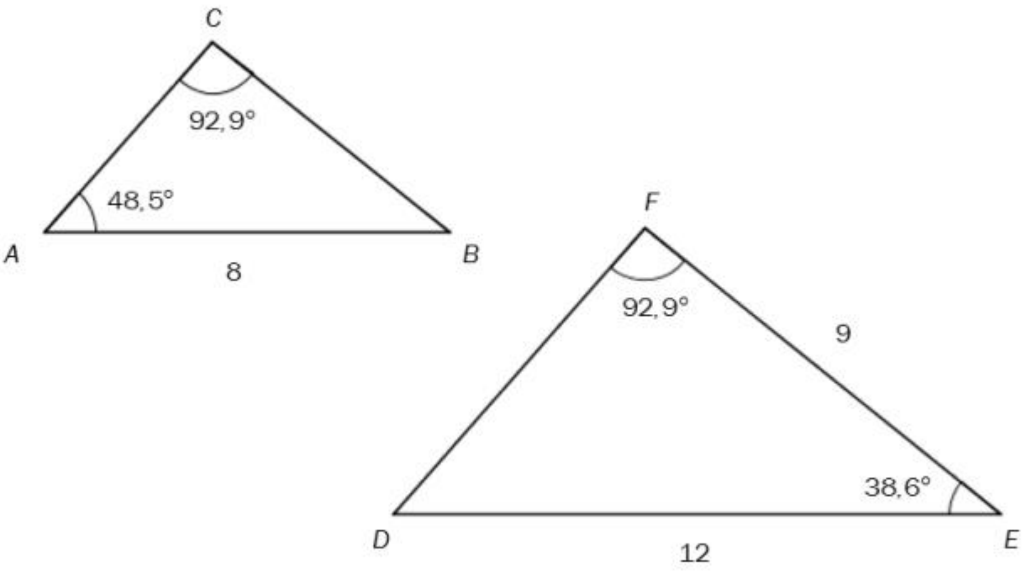
Eksempel	Samsvarende sider	Samsvarende sider	Samsvarende sider
∆ABC	BC = 8 cm	AC = x cm	AB = 6,0 cm
∆DEF	DE = 5 cm	EF = 3,0 cm	DF = x cm

AC: $\frac{8}{5} = \frac{x}{3} \rightarrow \frac{x}{3} = \frac{8}{5} \rightarrow x = \frac{8 \cdot 3}{5} = 4{,}8 \qquad \rightarrow \qquad$ AC = 4,8 cm

DF: $\frac{8}{5} = \frac{6}{x} \rightarrow \frac{x}{6} = \frac{5}{8} \rightarrow x = \frac{5 \cdot 6}{8} = 3{,}75 \qquad \rightarrow \qquad$ DF = 3,8 cm

De påfølgende oppgaver er tidligere eksamensoppgaver. I slike oppgaver må du være forberedt på at du må bruke både formlikhet og Pytagoras' setning. Tegnene I og II angir om oppgaven ble gitt på del 1 (I) eller del 2 (II)

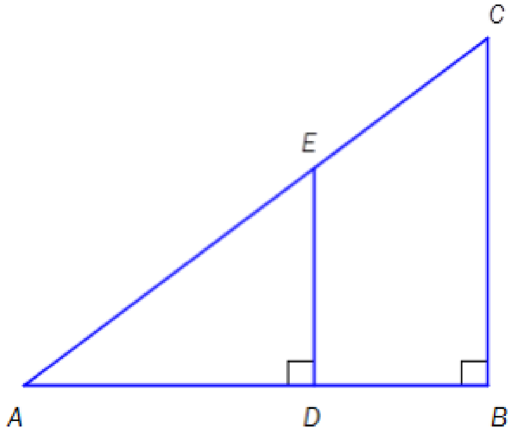
Oppgave 12 - I



a) Forklar at de to trekantene ovenfor er formlike.

b) Bestem lengden av siden BC ved regning.

Oppgave 13 - II



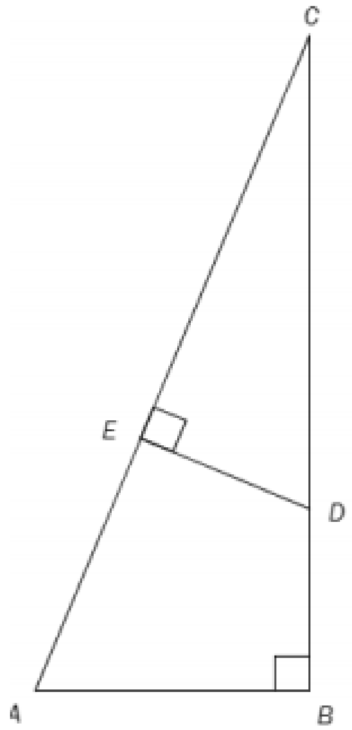
$\triangle ABC$ og $\triangle ADE$ er gitt som vist på skissen ovenfor. $AD = 5{,}0\,\text{m}$, $BD = 3{,}0\,\text{m}$ og $BC = 6{,}0\,\text{m}$.

a) Bestem lengden AC ved regning.

b) Forklar hvorfor $\triangle ABC$ og $\triangle ADE$ er formlike og bestem lengden DE ved regning.

c) Bestem arealet av $\square DBCE$ ved regning.

Oppgave 14 – II

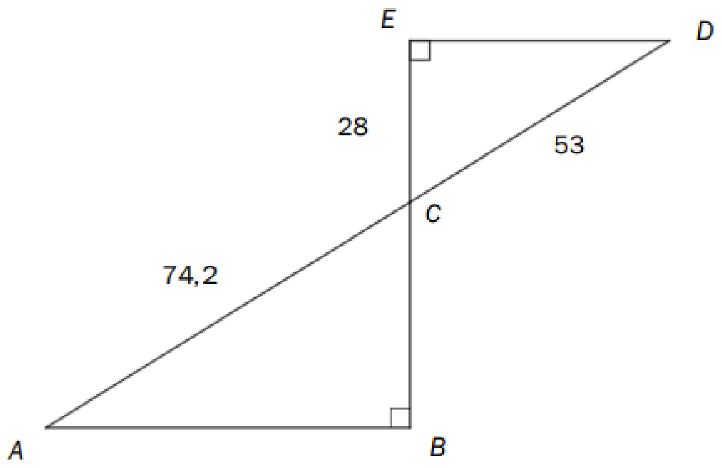


Gitt $\triangle ABC$ og $\triangle CED$. Se figuren til høyre.

$BC = 36$, $AC = 39$ og $CD = 26$.

a) Forklar hvorfor $\triangle ABC$ og $\triangle CED$ er formlike
b) Bestem lengden av CE
c) Vis at forholdet mellom arealet av $\triangle ABC$ og arealet av $\triangle CED$ er $\frac{9}{4}$

Oppgave 15 - II



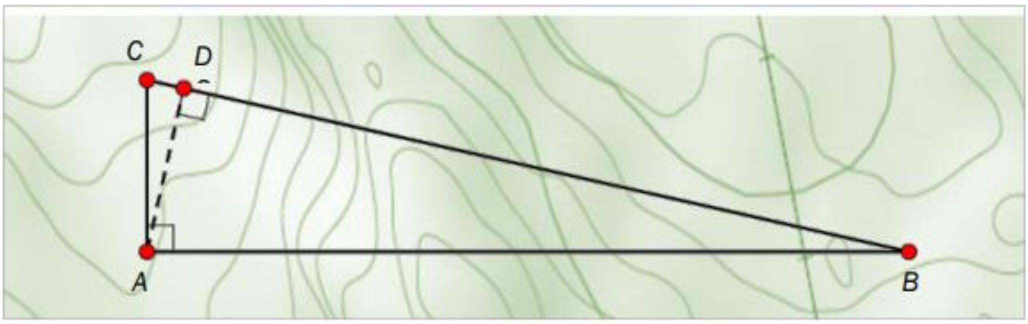
Gitt figuren ovenfor. C er skjæringspunktet mellom AD og BE.
$AC = 74{,}2$, $CD = 53$, $CE = 28$ og $\angle ABC = \angle DEC = 90°$

a) Forklar at ΔABC og ΔCDE er formlike.

b) Bestem lengden av BC og lengden av AB.

c) Bestem forholdet mellom arealet av ΔABC og arealet av ΔCDE.

Oppgave 16



Et område har form som vist på kartet ovenfor.

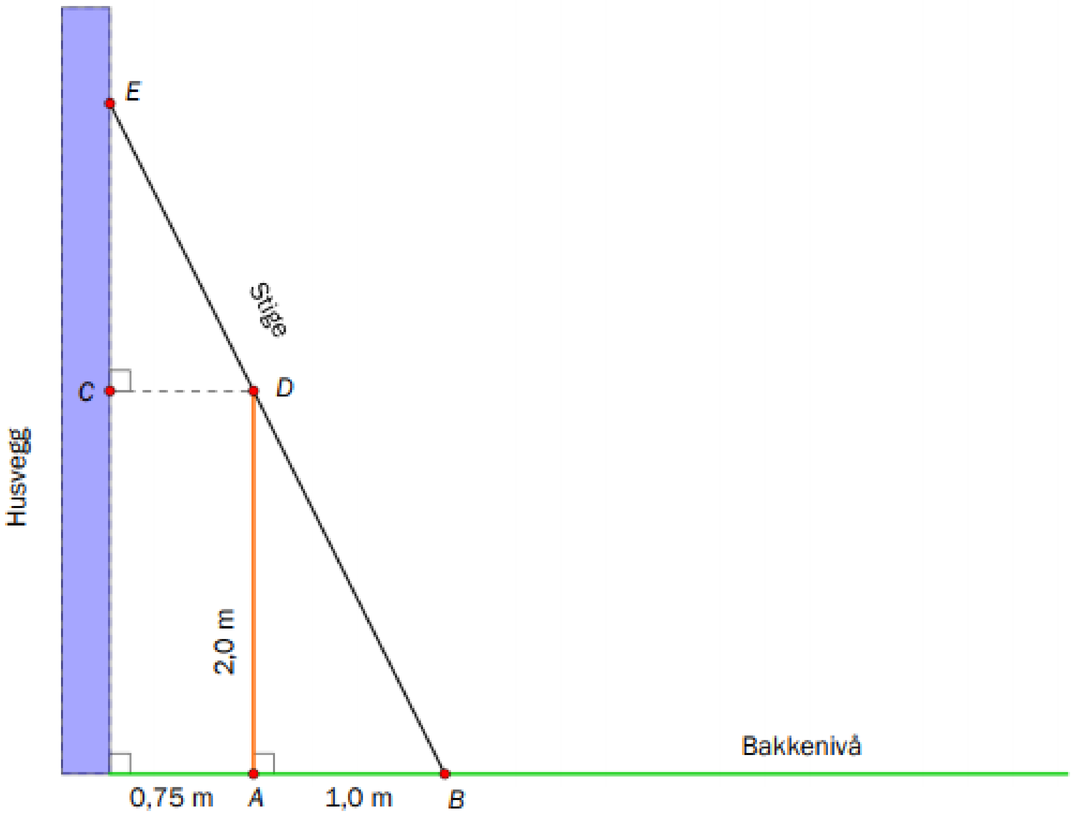
a) Forklar at ΔABC og ΔABD er formlike.

Avstanden fra A til D er 18,0 km. Avstanden fra B til D er 80,0 km.

b) Tegn en skisse av de to trekantene ΔABD og ΔABC ved siden av hverandre, og marker samsvarende sider.
Hvor langt er det fra A til C?

Oppgave 17 - II

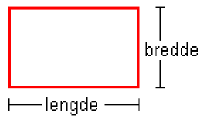
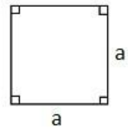
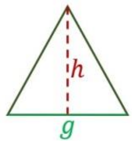
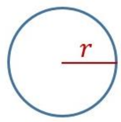
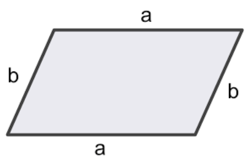
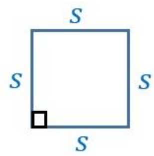
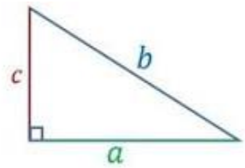
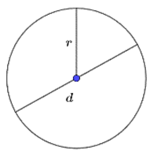
En stige står på skrå mot en husvegg. Stigen berører et gjerde. Gjerdet er 2,0 m høyt og står 0,75 m fra husveggen. Stigen er plassert 1,0 m fra gjerdet. Se figuren nedenfor



a) Forklar at $\triangle ABD$ og $\triangle CDE$ er formlike.

b) Hvor lang er stigen?

Løsningsforslag

Formel	Hva regnes ut	Skisse med mål
$lengde \cdot bredde$	Areal firkant	
$side^2$	Areal kvadrat	
$\frac{lengde \cdot bredde}{2}$	Areal trekant	
πr^2	Areal sirkel	
$side1 + side2 + side3 + side4$	Omkrets firkant	
$side \cdot 4$	Omkrets kvadrat	
$side1 + side2 + side3$	Omkrets trekant	
$2r\pi$	Omkrets sirkel	

Oppgave 2			Oppgave 4		Oppgave 5	
Figur nr.	Areal	Omkrets	Figur nr.	Areal	Figur nr.	Areal
1	$16\ cm^2$	$16\ cm$	1	$8\ cm^2$	1	$26\ cm^2$
2	$8\ cm^2$	$12\ cm$	2	$15\ cm^2$	2	$12\ cm^2$
3	$5\ cm^2$		3	$10\ cm^2$	3	$12{,}86\ cm^2$
4	$3{,}14\ cm^2$	$6{,}28\ cm$	4	$6\ cm^2$	4	$19{,}44\ cm^2$
5	$4\ cm^2$	$10\ cm$	5	$9\ cm^2$	5	$27{,}14\ cm^2$
6	$12{,}56\ cm^2$	$12{,}56\ cm$				
7	$8\ cm^2$					
8	$4\ cm^2$					
9	$1{,}5\ cm^2$					

Oppgave 3

Dette er også en firkant, slik at arealet regnes ved formelen $lengde\ \cdot bredde$. Bredden er avstanden mellom de parallelle linjene, altså 3 cm i denne figuren. Den øverste lengden er 6 cm, mens den nederste lengden er 10 cm.

Regnestykket $6\ cm \cdot 3\ cm$ gir et areal som er for lite, mens regnestykket $10\ cm\ \cdot 3\ cm$ gir et areal som er for høyt. Det riktige arealet finner vi ved å velge en lengde som er gjennomsnittet av de to målte lengdene, altså 8 cm i denne figuren. Formelen blir derfor:

$$\frac{lengde\ 1 + lengde2}{2} \cdot bredde = \frac{6\ cm + 10\ cm}{2} \cdot 3\ cm = 8\ cm\ \cdot 3\ cm = 24\ cm^2$$

Eksamensoppgave side 160

a)

Avstanden mellom D, B og C er alle en radius. Det samme med A, B og D. Årsaken til det er at punktene ligger enten på sikelpereferier (A og C) eller i sentrum og på sirkelfereferier (B og D). Begge sirkler har radus r, altså er avstanden mellom alle punktene r.

b)

Trekantene ABD og BCD er likesidede og vinklene er 60 grader. Vinkel A og vinkel C er da 60 grader, mens vinkel D og vinkel B er 120 grader.

c)

Hun har nok maling til å male $5m^2$. Arealet av figurene blir:

$$16A = 16 \cdot (\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{6})0,5^2 = 4,91$$

Ja, hun har nok maling, dersom hun ikke søler mye.

Eksamensoppgave side 161

Sider i trekanten: 6, 10 og 14.

$s = \frac{6+10+14}{2} = 15$

$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{15 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 1} = 25,98 \approx 26$

Eksamensoppgave side 161

Siden arealet av en sirkel er $A = \pi r^2 = 9\pi$, må radius i sirkelen være 3 og avstanden mellom de to paralelle linjene lik seks. Dette utgjør høyden i parallellogrammet og i trekanten.

Areal paralellogram: $A = g \cdot h = 8 \cdot 6 = 48$

Areal trekant: $A = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12$

Oppgave	Svar	Oppgave	Svar
6	a) 14,4 cm b) 9,7 cm c) 24,2 cm	**9**	a) $A = 95{,}3\ cm^2, O = 39{,}4\ cm$
7	c) 9 cm b) 11,6 cm c) 3,4 m		b) $A = 45\ cm^2, O = 27{,}2\ cm$
8	a) 9,9 cm b) 12,4 cm c) 5,7 m		c) $A = 121\ cm^2, O = 38\ cm$
			d) $A = 92\ cm^2, O = 60{,}4\ cm$

Eksamensoppgave side 165

a)

Bruker Pytagoras og finner at avstanden AB er : $AB = \sqrt{300^2 + 400^2} = 500$ meter.

b)

$\frac{700-500}{500} = \frac{2}{5} = 40\%$. Sykkelturen er 40% lengre.

c)

Målestokk:

$\frac{4{,}0cm}{0{,}8km} = \frac{4}{80000} = \frac{1}{20000}$

Målestokken er 1:20 000 som betyr at 1cm på kartet er 20 000 cm i virkeligheten, altså tilsvarer 1 cm på kartet 200 meter i virkeligheten.

Oppgave	**Svar**
10	$\Delta A \sim \Delta D \quad \Delta B \sim \Delta E \quad \Delta C \sim \Delta G$
11	a) $\angle A$ = 180° − 140° = 40° =$\angle D$ $\angle B = 90° = \angle E$ Trekantene har parvis like store vinkler, og er dermed formlike. b) $\angle A$ er felles i begge trekanter $\angle B = 90° = \angle E$ Trekantene har parvis like store vinkler, og er dermed formlike. c) $\angle A = \angle D$ $\angle A$ er toppvinkel, og dermed like stor i begge trekanter. Trekantene har parvis like store vinkler, og er dermed formlike.
12	a) $\angle C = \angle F$ $\angle B = 180° - 141{,}4° = 38{,}6° = \angle E$ Trekantene har parvis like store vinkler, og er dermed formlike. b)$BC = 6$
13	a) $AC = 10\ cm$ b) $\angle A$ er felles i begge trekanter $\angle B = 90° = \angle D$ Trekantene har parvis like store vinkler, og er dermed formlike. c) $A \approx 14{,}6\ cm^2$
14	a) $\angle C$ er felles i begge trekanter $\angle B = 90° = \angle E$ Trekantene har parvis like store vinkler, og er dermed formlike. b) $CE = 24$ c) Arealet til en trekant er $\frac{g \cdot h}{2}$. Siden forholdet mellom lengdene i trekantene er $\frac{3}{2}$ kan vi lage følgende formel: $Areal\ \triangle ABC = \frac{\left(DE \cdot \frac{3}{2}\right) \cdot \left(CE \cdot \frac{3}{2}\right)}{2} = \frac{DE \cdot CE \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}}{2} = \frac{DE \cdot CE \cdot \frac{9}{4}}{2} = \frac{DE \cdot CE}{2} \cdot \frac{9}{4} = Areal \triangle CED \cdot \frac{9}{4}$

15	a) $\angle B = 90° = \angle E$ $\angle C$ er toppvinkel, og dermed like stor i begge trekanter. Trekantene har parvis like store vinkler, og er dermed formlike. b) $BC = 39{,}2 \quad AB = 63$ c) Forholdet mellom lengdene er $\frac{7}{5}$. Forholdet mellom arealet blir dermed $\frac{7}{5} \cdot \frac{7}{5} = \frac{49}{25} = 1{,}96$
16	a) $\angle B$ er felles i begge trekanter $\angle A = 90° = \angle D$ Trekantene har parvis like store vinkler, og er dermed formlike. b) $AC = 18\ km$
17	a) $\angle ABD\ og\ \angle CDE$ er samsvarende vinkler med parallelle linjer. $\angle A = 90° = \angle C$ Trekantene har parvis like store vinkler, og er dermed formlike. b) Stigen er 3,9 m lang