Likninger og ulikheter

Målet for opplæringen er at eleven skal kunne:

- Utforske strategier for å løse likninger, likningssystem og ulikheter, og argumentere for tankemåtene sine

Å finne en ukjent størrelse

Å løse likninger går ut på å lære regneteknikker for å løse ukjente størrelser i et oppstilt regnestykke. I dette kapittelet skal du først få en trening i å formulere tankemåter i arbeid med relativt enkle oppgaver. Vi har forsøkt å gjøre oppgavene enkle ved å gi informasjon gjennom bruk av bilder. Deretter blir oppgavene vanskeligere, ved at informasjonen er gitt gjennom en tekst. Mot slutten av kapittelet skal du lære å regne teoretiske likninger. Underveis skal du løse likninger både ved hjelp av GeoGebra og CAS.

Informasjon gitt gjennom bilder

Oppgave 1

Hvor mye inneholder pengesekken?

+ 720 kr = 2 000 kr

Tenk deg at du skulle forklare tankemåten din til en som ikke har funnet løsningen. Hvordan ville du ha ordlagt deg? Skriv tankemåten din nedenfor:

Oppgave 2

Hvor mye inneholder pengesekken?

- 720 kr = 400 kr

Tenk deg at du skulle forklare tankemåten din til en som ikke har funnet løsningen. Hvordan ville du ha ordlagt deg?

Oppgave 3

Hvor mye inneholder pengesekken?

950 kr = 4 500 kr − 

Tenk deg at du skulle forklare tankemåten din til en som ikke har funnet løsningen. Hvordan ville du ha ordlagt deg? Skriv tankemåten din nedenfor:

Oppgave 4

Hvor mye inneholder pengesekken?

 + 2 000 kr = 4 500 kr

Tenk deg at du skulle forklare tankemåten din til en som ikke har funnet løsningen. Hvordan ville du ha ordlagt deg? Skriv tankemåten din nedenfor:

Oppgave 5

Hvor mye inneholder pengesekken?

 + 1 500 kr = 4 500 kr + 

Tenk deg at du skulle forklare tankemåten din til en som ikke har funnet løsningen. Hvordan ville du ha ordlagt deg? Skriv tankemåten din nedenfor:

Oppgave 6

Hvor mye inneholder pengesekken?

 + 1 500 kr = 4 500 kr – 

Tenk deg at du skulle forklare tankemåten din til en som ikke har funnet løsningen. Hvordan ville du ha ordlagt deg? Skriv tankemåten din nedenfor:

Informasjon gitt gjennom tekst

Oppgave 7

To familier drar med bil fra hver sin by. Avstanden mellom de to byene er 245 km. Når de møtes, leser sjåføren i den ene bilen av at de har kjørt 127 km. Sjåføren i den andre bilen har ikke sett på km-måleren. Hvor langt har bil 2 kjørt?

Tenk deg at du skulle forklare tankemåten din til en som ikke har funnet løsningen. Hvordan ville du ha ordlagt deg? Skriv tankemåten din nedenfor:

Oppgave 8

Et basseng skal fylles med 10 800 liter vann. Ut av hageslangen kommer det 12 liter i minuttet. Hvor lang tid tar det å fylle bassenget?

Tenk deg at du skulle forklare tankemåten din til en som ikke har funnet løsningen. Hvordan ville du ha ordlagt deg? Skriv tankemåten din nedenfor:

Oppgave 9

En skolebolle på tilbud koster 2,50 kroner mindre enn normal pris. Nå kan du kjøpe 7 skoleboller for 94,50 kroner. Hva er normal pris på en skolebolle?

Tenk deg at du skulle forklare tankemåten din til en som ikke har funnet løsningen. Hvordan ville du ha ordlagt deg? Skriv tankemåten din nedenfor:

Oppgave 10

Charlotte sitter barnevakt, og får 65 kr/time. I tillegg får hun 50 kroner ekstra dersom klokken er over midnatt. En kveld arbeidet hun til kl. 02.00 og tjente 490 kroner. Hvor mange timer satt Charlotte barnevakt denne kvelden?

Tenk deg at du skulle forklare tankemåten din til en som ikke har funnet løsningen. Hvordan ville du ha ordlagt deg? Skriv tankemåten din nedenfor:

Oppgave 11

Charlie leser 102 sider av en bok. Det er 4 sider færre enn $\frac{1}{3}$ av hele boka. Hvor mange sider er det i boka?

Tenk deg at du skulle forklare tankemåten din til en som ikke har funnet løsningen. Hvordan ville du ha ordlagt deg? Skriv tankemåten din nedenfor:

Matematisering av opplysninger

I neste del av kapittelet skal du lære å løse **likninger** ved hjelp av **CAS**, en funksjon i GeoGebra. **CAS** er et tillatt hjelpemiddel på tentamen og eksamen.

For å kunne benytte **CAS** som et hjelpemiddel, må du oversette en tekst- eller billedoppgave til en **likning** du kan skrive inn i **CAS**. Denne oversettelsen kaller vi **matematisering** av opplysninger.

En **likning** kan være et matematisk **uttrykk** med bokstaver der målet er å finne bokstavenes **verdier**. En l**ikning** kan også være en **formel** som viser at to matematiske **uttrykk** er like store. I dette kapittelet skal vi konsentrere oss om den første varianten.

Du kan selv velge hvilke bokstaver du ønsker å bruke når du lager en **likning**, men dersom du vil bruke **CAS** som et hjelpemiddel til å løse **likningen** kan det være lurt å bruke bokstavene x når det er en ukjent, x og y når det er to ukjente, og x, y og z når det er tre ukjente. Dersom du skal løse en likning i **GeoGebra**, må du bruke bokstavene x, y og z.

Tenk deg følgende situasjon:

En elev går med avisa, og har fast lønn på 430 kr per måned. I tillegg får eleven 8 kr per avis han selger. En måned fikk han utbetalt 974 kroner. Hvor mange aviser solgte eleven denne måneden?

Matematisk kan dette skrives på følgende måte:

$430\ kr + 8 \cdot antall\ solgte\ aviser = 974\ kr$

Det som skal regnes ut i denne situasjonen er antall solgte aviser, som vi derfor kaller x. Det er lurt å skrive dette på en oversiktlig måte, for eksempel slik:

$Antall\ solgte\ aviser = x$

Deretter kan vi lage en likning hvor x er det som skal regnes ut. I likninger bruker vi ikke benevning.

$430 + 8x = 974$

Oppgave 12

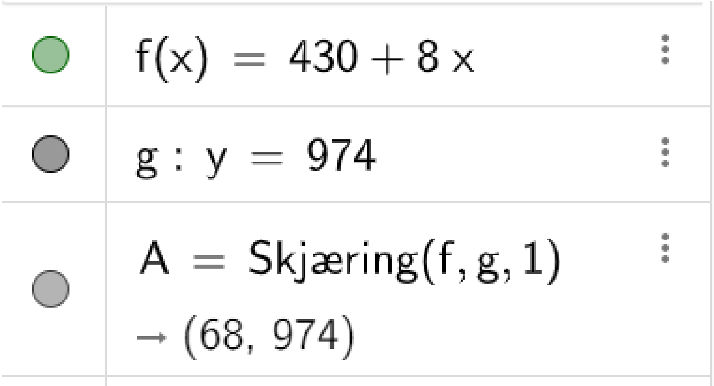
Velg to av billedoppgavene og to av tekstoppgavene. Lag **likninger** hvor du erstatter det som skal regnes ut med x. Husk å vise hvilke oppgaver du har valgt, og hva x erstatter.

Likninger i GeoGebra: grafisk løsning av likningen

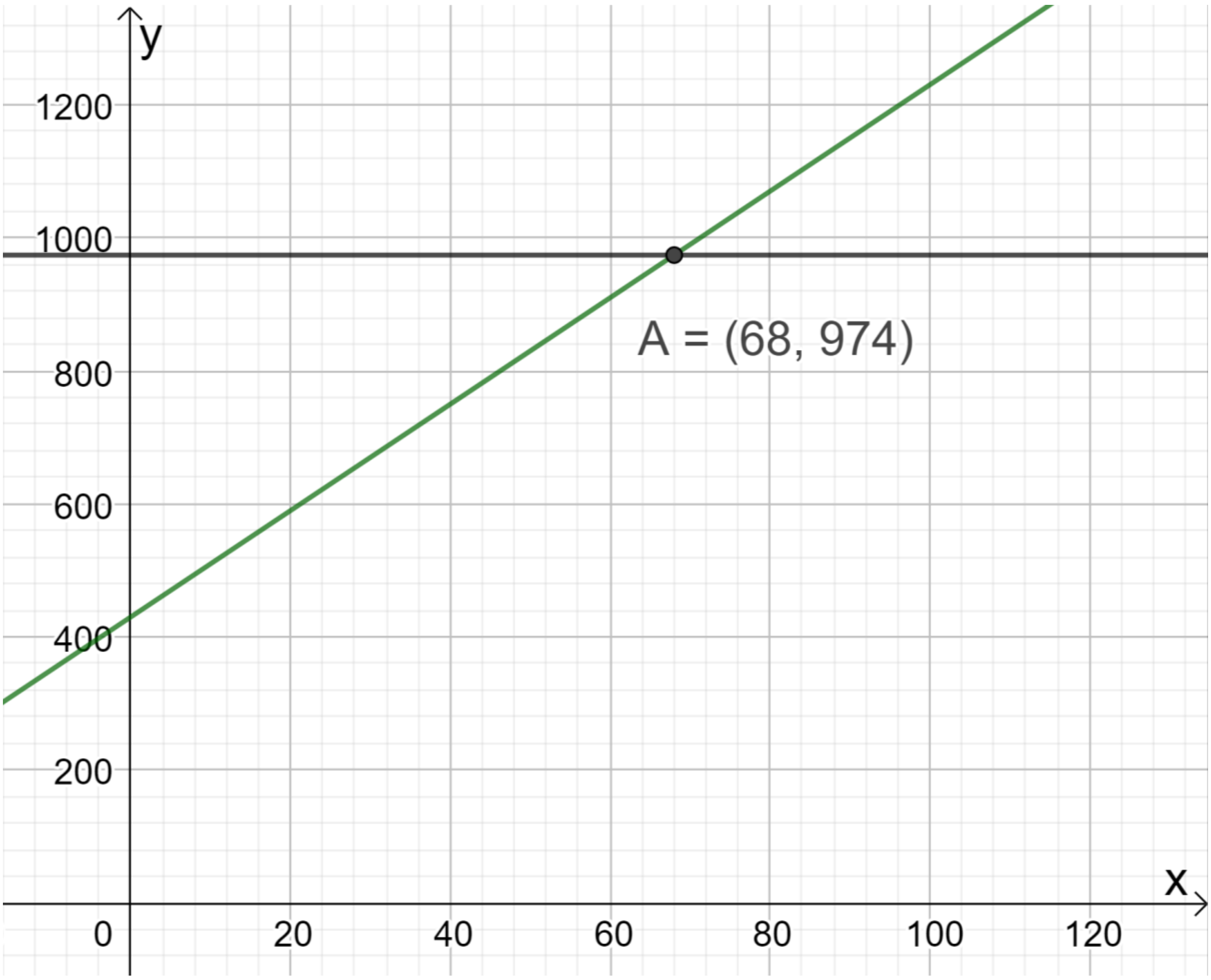
Dersom vi ønsker å løse en likning grafisk, kan dette gjøres ved hjelp av **GeoGebra**. For å gjøre dette må vi utføre operasjonene nedenfor:

Operasjon

1. Skriv venstre side av likhetstegnet i inntastingsfeltet.
2. Skriv $y =$ høyre side av likhetstegnet i inntastingsfeltet.
3. Finn skjæringspunktet mellom linjene, og les av x-verdien.



Det gir dette grafikkbildet:



Løsningen på likningen er x-verdien i skjæringspunktet. I dette tilfellet er $x = 68$ løsning på likningen.

Likninger i CAS (Computer Algebra System)

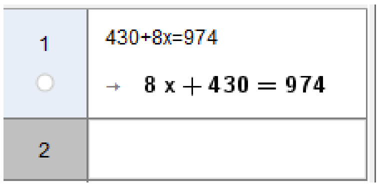
Som nevnt i delkapittelet «Matematisering» kan vi løse **likninger** ved hjelp av **CAS**, som du finner ved å åpne GeoGebra. I eksempelet nedenfor bruker vi **likningen** fra eksempelet på forrige side:

$430 + 8x = 974$.

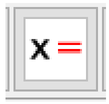
Hvordan kan vi bruke **CAS** til å finne verdien til x, som har erstattet antall solgte aviser?

Trykk «Oppsett», og velg CAS

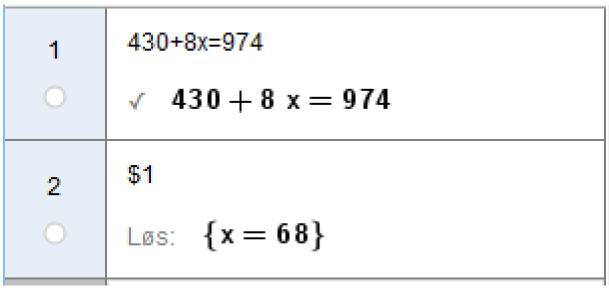
Skriv inn **likningen**, og trykk «Enter»



Velg «Løs»



CAS finner denne løsningen:



som betyr at eleven solgte 68 aviser denne måneden.

Oppgave 13

Bruk **CAS** og **GeoGebra** til å finne verdien til x i **likningene** du laget i oppgave 12. Hvilket hjelpemiddel liker du best?

Likninger uten digitale hjelpemidler

Formålet med å løse en likning er å finne den **verdien** for x som gjør at **uttrykket** på venstre side av **likhetstegnet** får lik **verdi** som **uttrykket** på høyre side av **likhetstegnet**.

Ved hjelp av metodene beskrevet nedenfor ønsker vi å fjerne alle x-ledd fra høyre side av **likhetstegnet**, og alle tall fra venstre side av **likhetstegnet**. Til slutt skal vi ende med et **uttrykk** på formen

$$x = et\ tall$$

hvor $tallet$ er løsningen på **likningen**.

Felles for alle metodene er at de brukes når vi ønsker å fjerne **verdier** fra **likningen**. Hvilke metoder du skal bruke avhenger av hvilke **verdier** vi ønsker å fjerne. Innenfor matematikk sier vi at vi har **omvendte operasjoner:**

- Addisjon og subtraksjon er **omvendte operasjoner**
- Multiplikasjon og divisjon er **omvendte operasjoner**
- Potenser og røtter er **omvendte operasjoner**

Ofte må du bruke flere metoder for å løse en oppgave. Metodene bør brukes i rekkefølgen vi har beskrevet nedenfor:

1. **Multiplikasjonsmetoden**
2. **Addisjons- og subtraksjonsmetoden**, også kalt **flytte/bytte-metoden**
3. **Divisjonsmetoden**
4. **Rotmetoden**

Multiplikasjonsmetoden

Vi kan fjerne en **nevner** fra en **likning** ved å multiplisere alle **ledd** i **likningen** med **nevneren**. Dersom **likningen** inneholder ulike **nevnere**, multipliserer vi med **minste felles nevner**.

Eksempel:

Vi ønsker å fjerne nevnerne fra likningene nedenfor ved å multiplisere alle ledd med minste felles nevner

$$\begin{aligned} \frac{x}{3} + 4 &= 6 \\ \frac{x}{3} \cdot 3 + 4 \cdot 3 &= 6 \cdot 3 \\ x + 12 &= 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{x} - 1 &= 8 \\ \frac{2}{x} \cdot x - 1 \cdot x &= 8 \cdot x \\ 2 - x &= 8x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{4} &= 3 - \frac{x}{6} \\ \frac{x}{4} \cdot 12 &= 3 \cdot 12 - \frac{x}{6} \cdot 12 \\ 3x &= 24 - 2x \end{aligned}$$

Spør læreren din dersom du trenger en forklaring på brøkregningen i noen av eksemplene ovenfor.

Addisjonsmetoden

Vi kan legge ønsket **verdi** til **likningen**, så lenge vi legger til den samme **verdien** på hver side av **likhetstegnet**.

Eksempel:

Vi ønsker å fjerne -3 i likningen nedenfor. Derfor legger vi til 3 på begge sider av likhetstegnet:

$$\begin{aligned} x-3 &= 8 \\ x-3+3 &= 8+3 \\ x &= 11 \end{aligned}$$

Vi ønsker å fjerne $-x$ i likningen nedenfor. Derfor legger vi til x på begge sider av likhetstegnet:

$$\begin{aligned} 2x &= -9-x \\ 2x+x &= -9x-x+x \\ 3x &= -9 \end{aligned}$$

Subtraksjonsmetoden

Vi kan trekke ønsket **verdi** fra **likningen**, så lenge vi trekker fra den samme **verdien** på hver side av **likhetstegnet**.

Eksempel:

Vi ønsker å fjerne 3 i likningen nedenfor. Derfor trekker vi fra 3 på begge sider av likhetstegnet:

$$\begin{aligned} -x+3 &= 8 \\ -x-3-3 &= 8-3 \\ -x &= 5 \end{aligned}$$

Vi ønsker å fjerne x i likningen nedenfor. Derfor trekker vi fra x på begge sider av likhetstegnet:

$$\begin{aligned} 2x &= 9+x \\ 2x-x &= 9x+x-x \\ x &= 9 \end{aligned}$$

Flytte/bytte-metoden

En snarvei på addisjons- og subtraksjonsmetoden kalles **flytte/bytte-metoden**. Ser du at det vi ønsker å fjerne fra den ene siden i likningene ender opp på motsatt side av likhetstegnet med motsatt fortegn? Vi sier at vi *flytter* det uønskete **leddet** til motsatt side av **likhetstegnet**, og *bytter* fortegn. Du må gjerne bruke denne snarveien, men det er viktig at du forstår hvorfor den kan brukes.

Eksempel:

$$\begin{aligned} x-3 &= 8 \\ x &= 8+3 \\ x &= 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x &= -9-x \\ 2x+x &= -9 \\ 3x &= -9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x+3 &= 8 \\ -x &= 8-3 \\ -x &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x &= 9+x \\ 2x-x &= 9 \\ x &= 9 \end{aligned}$$

Divisjonsmetoden

Vi kan fjerne en **faktor** fra en **likning** ved å dividere alle **ledd** i **likningen** med **faktoren**.

Eksempel:

Vi ønsker å fjerne faktoren 4 i likningen nedenfor. Derfor dividerer vi alle ledd med 4:

$$\begin{aligned} 4x &= 20 \\ \frac{4x}{4} &= \frac{20}{4} \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Vi ønsker å fjerne faktoren 2 i likningen nedenfor. Derfor dividerer vi alle ledd med 2:

$$\begin{aligned} 2x &= 17 \\ \frac{2x}{2} &= \frac{17}{2} \\ x &= 8{,}5 \text{ eller } \frac{17}{2} \end{aligned}$$

Dersom svaret ikke blir et helt tall må du selv avgjøre om du ønsker å svare med desimaltall eller med brøk. Desimaltall er ofte en avrunding, mens brøk er alltid nøyaktig. Dersom du velger å svare med brøk bør brøken forkortes.

Metoden brukes også dersom **faktoren** er **negativ**.

Eksempel:

Vi ønsker å fjerne faktoren -4 i likningen nedenfor. Derfor dividerer vi alle ledd med -4:

$$\begin{aligned} -4x &= -20 \\ \frac{-4x}{-4} &= \frac{-20}{-4} \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Vi ønsker å fjerne faktoren -1 i likningen nedenfor. Derfor dividerer vi alle ledd med -1:

$$\begin{aligned} -x &= 5 \\ \frac{-x}{-1} &= \frac{5}{-1} \\ x &= -5 \end{aligned}$$

Rotmetoden

Vi kan fjerne en **potens** fra en **likning** ved å finne den tilsvarende **roten**.

Eksempel:

Vi ønsker å fjerne potensen 2 i likningen nedenfor. Derfor finner vi kvadratroten til alle ledd:

$$\begin{aligned} x^2 &= 49 \\ \sqrt{x^2} &= \sqrt{49} \\ x &= \pm 7 \end{aligned}$$

Vi ønsker å fjerne potensen 3 i likningen nedenfor. Derfor finner vi tredjeroten til alle ledd:

$$\begin{aligned} x^3 &= 27 \\ \sqrt[3]{x^3} &= \sqrt[3]{27} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Partallsrøtter har alltid 2 svar, fordi løsningen kan være både positiv og negativ. Oddetallsrøtter har kun ett svar. Roten vil ha samme fortegn som verdien du finner roten til.

Eksempel:

$\sqrt[3]{64} = 4$

$\sqrt[3]{-64} = -4$

Eksempel på en likning hvor vi får bruk for alle metodene:

Løs likningen

$$\frac{5x^2}{3} + 2x - 3 \quad = \quad x^2 + 2x + 3$$

Løsning:

Venstre side		Høyre side	Regning	Metode
$\frac{5x^2}{3} + 2x - 3$	$=$	$x^2 + 2x + 3$	$\cdot 3$	Multiplikasjonsmetoden
$5x^2 + 6x - 9$	$=$	$3x^2 + 6x + 9$		Flytte/bytte-metoden
$5x^2 - 3x^2 + 6x - 6x$	$=$	$9 + 9$		Regner like ledd
$2x^2$	$=$	18	$:3$	Divisjonsmetoden
x^2	$=$	9	$\sqrt{\ }$	Rotmetoden
x	$=$	± 3		

Oppgave 14

Finn verdien til x

a) $4x - 5 = 2x + 3$
b) $7 + x = -3x - 1$
c) $2x - 8 = -3x + 2$
d) $-3x - 2 = -5x + 4$
e) $2x + 4 = 3x - 1$
f) $7x - 5 = -x + 11$
g) $8x + 3 = 4x + 13$
h) $11x + 3 = 8x - 1$

Oppgave 15

Finn verdien til x

a) $\frac{x}{2} + 3 = -2x + 8$
b) $\frac{x}{3} + 1 = x + 3$
c) $\frac{x}{2} + 3 = 2x + 12$
d) $\frac{x}{4} - 8 = -x + 3$
e) $\frac{x}{4} + 6 = -\frac{x}{4} + 3$
f) $\frac{x}{2} + \frac{1}{2} = -x + 2$
g) $\frac{x}{3} = -2x + 7$
h) $\frac{x}{3} + \frac{2}{3} = -x + \frac{1}{3}$

Oppgave 16

Jeg tenker på et tall. Jeg legger 4 til tallet, og dividerer summen på 2. Deretter multipliserer jeg svaret med 3 og trekker fra 1. Da får jeg 14.

Hvilket tall tenkte jeg på?

Klarer du å stille opp informasjonen som en likning?

Oppgave 17

Finn verdien til x

a) $\frac{x}{3} + \frac{1}{2} = -\frac{2x}{4} + 8$

b) $\frac{x}{3} + 2 + \frac{x}{2} = -\frac{2x}{6} + 9$

c) $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 5 + \frac{x}{6}$

d) $-\frac{x}{2} = 5 + \frac{x}{3}$

e) $-\frac{x}{4} - 2 = -3 + \frac{2x}{5}$

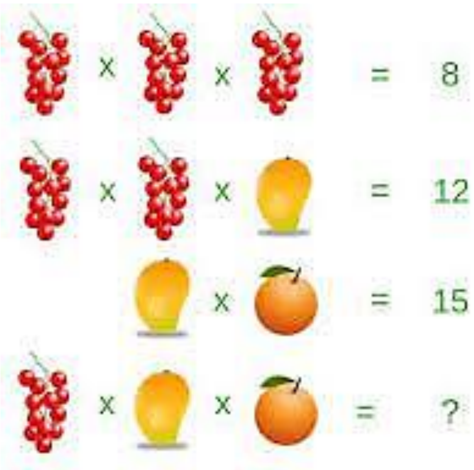
f) $\frac{x}{3} - 2 = -\frac{x}{5} - 1$

g) $\frac{3x}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{x}{6} + \frac{1}{3}$

h) $\frac{2x}{7} - \frac{2}{3} = -\frac{4x}{7} - \frac{1}{3}$

Oppgave 18

Hva blir svaret på likningen?



Tenk deg at du skulle forklare tankemåten din til en som ikke har funnet løsningen. Hvordan ville du ha ordlagt deg?

Oppgave 19

Finn verdien til x

a) $2x^2 - 20 = 30$

b) $3x^2 - 100 = 47$

c) $5x^2 + 25 = 105$

d) $2x^3 + 8 = 24$

e) $2x^2 - x - 8 = -x + 10$

f) $2x^3 + 2x^2 - 175 = -x^3 + 2x^2 + 200$

g) $\frac{x^2}{2} - 15 = 17$

h) $2x^3 + 3x + 9 = 2x^3 + x - 3$

Ulikheter

Dersom vi ønsker å uttrykke at en størrelse er større eller mindre enn en annen størrelse, kan vi gjøre dette ved å bruke **ulikheter**.

For eksempel kan vi skrive at

$3 \cdot 4 > 3 \cdot 3$ eller at $3 \cdot 4 < 3 \cdot 5$

Den første **ulikheten** uttales «$3 \cdot 4$ er større enn $3 \cdot 3$», mens den andre uttales «$3 \cdot 4$ er mindre enn $3 \cdot 5$». Dette er to helt åpenbare **ulikheter**, og vi sier at de er **sanne**.

Vi kan også skrive at

$3x > 3 \cdot 3$ eller at $3x < 3 \cdot 5$

Den første **ulikheten** er **sann** så lenge vi velger x-verdier som gjør at $3x\ er\ større\ enn\ 9$. Den andre **ulikheten** er **sann** så lenge vi velger x-verdier som gjør at $3x\ er\ mindre\ enn\ 15$. Som du kanskje har funnet ut finnes det ikke kun en x-verdi som gjør **ulikhetene sanne**; det finnes faktisk uendelig mange x-verdier som gjør **ulikhetene sanne**!

Vi kan også ønske å uttrykke at en størrelse er større eller lik en annen størrelse. For eksempel må du være minst 18 år for å kjøre opp til førerkort. Matematisk kan dette skrives slik:

$$alder \geq 18 \text{ år}$$

Ulikheten uttales «alder er større eller lik 18 år», som er kravet for å kjøre opp til førerkort.

Det samme gjelder dersom en størrelse er mindre eller lik en annen størrelse. For eksempel kan det være plass til maksimalt 5 personer i en heis. Matematisk kan dette skrives slik:

$$antall\ personer\ i\ heisen \leq 5$$

Ulikheten uttales «antall personer i heisen er mindre eller lik 5».

Oppsummering

$x < 3$ betyr at x kan være alle tall som er lavere enn tre
$x \leq 3$ betyr at x kan være alle tall fra og med 3 og lavere

$x > 3$ betyr at x kan være alle tall som er høyere enn tre
$x \geq 3$ betyr at x kan være alle tall fra og med 3 og høyere

Ulikheter i CAS

Vi kan løse **ulikhetene** ved hjelp av **CAS**:

	Eksempel 1	Eksempel 2
Vi skriver ulikheten inn i **CAS**, og trykker «Løs»	1: 3x>3*3 → $3x > 9$ 2: $1 Løs: $\{x > 3\}$	1: 3x<3*5 → $15 > 3x$ 2: $1 Løs: $\{x < 5\}$
Ulikheten er **sann** dersom:	x er større enn 3	x er mindre enn 5

De fleste som reiser ofte med kollektivtransport velger å kjøpe 30-dagersbillett, men hvor mange reiser må man foreta for at det skal lønne seg å kjøpe 30-dagersbillett istedenfor enkeltbilletter?

For å betale for alle reiser de neste 30 dagene kan man enten betale en fast pris uavhengig av antall reiser, eller betale for hver tur. For at det skal lønne seg å kjøpe 30-dagersbillett må prisen for denne billetten være lavere enn den totale summen for enkeltbilletter. Dette kan skrives slik:

$$pris\ for\ 30\text{-}dagersbillett < pris\ for\ enkeltbillett \cdot antall\ enkeltbilletter$$

På ruter.no kan vi finne både prisen for 30-dagersbillet (398 kr) og for enkeltbilletter (19 kr). Det som imidlertid er ukjent, er hvor mange enkeltbilletter man kjøper de neste 30 dagene. Vi erstatter dette med x:

$Antall\ enkeltbilleter = x$ og får denne **ulikheten**: $398\ kr < 19x$ Vi ønsker å finne x, og skriver: $19x > 398$	1: 19x>398 → $19x > 398$ 2: $1 Løs: $\left\{x > \frac{398}{19}\right\}$	Vi løser **ulikheten** i **CAS**, som forteller at $x > \frac{398}{19}$ Vi regner brøken med kalkulator, og får 20,95 som svar.

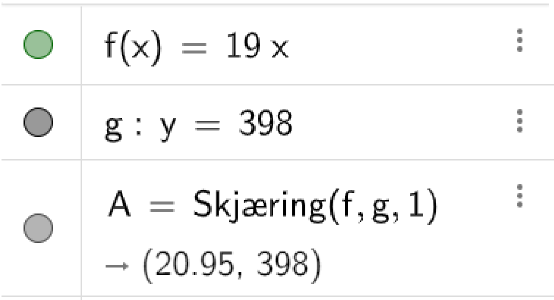
Man bør kjøpe 30-dagersbillett dersom man foretar *mer* enn 20 reiser i løpet av perioden.

Ulikheter i GeoGebra: grafisk løsning av ulikheter

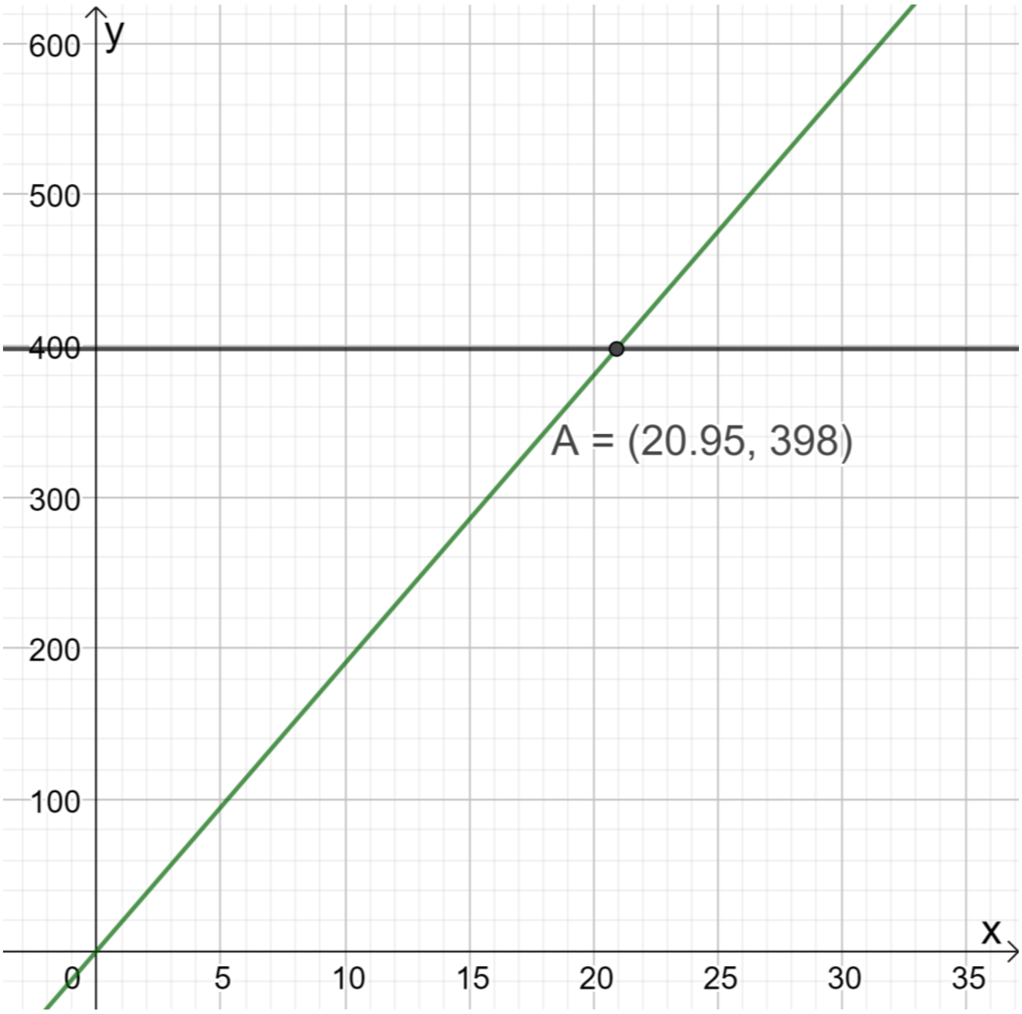
På samme måte som ved likninger, kan ulikheter løses grafisk ved hjelp av **GeoGebra.** For å gjøre dette må vi utføre operasjonene nedenfor:

Operasjon

1. Skriv venstre side av ulikheten i inntastingsfeltet.
2. Skriv $y =$ høyre side av ulikheten i inntastingsfeltet.
3. Finn skjæringspunktet mellom linjene, og les av x-verdien.



Det gir dette skjermbildet:



Løsningen på ulikheten finner vi ved å tolke x-verdien i skjæringspunktet. Her er $x = 20{,}95$, som betyr at man bør kjøpe 30-dagersbillett dersom man foretar *mer* enn 20 reiser i løpet av perioden.

Oppgave 20

Når Jonas blir 18 år er faren hans *mer* enn dobbelt så gammel som ham.

Bruk opplysningene ovenfor til å sette opp en ulikhet. Hva kan du si om alderen til faren til Jonas?

Oppgave 21

Ved skolestart i 2020 begynte 650 elever på Hellerud vgs. Ved skolestart 2021 hadde skolens elevtall økt til over 700.

Bruk opplysningene ovenfor til å sette opp en ulikhet. Hva kan du si om hvor mange flere elever som begynte på Hellerud i 2021 sammenlignet med 2020.

Oppgave 22

En bedrift ønsker å arrangere juleavslutning for sine ansatte, og henter inn tilbud fra ulike arrangører. Bedriften er usikker på hvor mange av de ansatte som ønsker å være med på juleavslutningen.

Nedenfor finner du de to beste tilbudene:

	Tilbud 1	Tilbud 2
Leie av lokalet	10 0000 kr	17 000 kr
Pris per deltaker (x)	800 kr	500 kr

Bruk opplysningene ovenfor til å sette opp en ulikhet. Hvor mange av de ansatte må bli med på avslutningen for at hvert av tilbudene skal være det billigste?

Oppgave 23

Hellerud vgs. ønsker å reise på togtur med elevene på vg2, og de kontakter VY for å få tilbud. Reiseselskapet presenterer to ulike tilbud.

Tilbud 1	Tilbud 2
Fast pris på 8 000 kr for alle reisende	115 kr per reisende

a) Sett opp en ulikhet som kan brukes til å avgjøre hvilket av tilbudene skolen burde velge for at turen skal bli så billig som mulig for skolen, og si noe om hva skolen bør velge.

Anta at elevene skal betale for turen selv

b) Sett opp en ulikhet som kan brukes til å avgjøre hvilket av tilbudene skolen burde velge for at turen skal bli så billig som mulig for hver enkelt elev, og si noe om hva skolen burde velge.

Oppgave 24

Firmaet «Reiselyst» leier ut leiligheter til kunder i utlandet. Kunder som ønsker å leie en leilighet må betale en fast pris per år. I tillegg må de betale for hvert døgn de bruker leiligheten. Kundene kan velge mellom to ulike leieavtaler:

Avtale 1	**Avtale 2**
Fast pris per år: 22 000 kroner	Fast pris per år: 28 000 kroner
Pris per døgn: 1200 kroner	Pris per døgn: 600 kroner

Sett opp en ulikhet som kan brukes til å avgjøre hvilket av tilbudene en kunde burde velge for at leia skal bli lavest mulig, og si noe om hva kundene burde velge.

Oppgave 25

Wenche har en bil, hvor bensintanken rommer 50 liter.

Wenche har to betalingskort som hun kan bruke til å kjøpe drivstoff, og begge betalingskortene gir henne en rabatt når hun bruker dem.

Det ene kortet gir 4 % rabatt på kjøpesummen.

Det andre kortet gir 1 % rabatt på kjøpesummen og i tillegg 50 øre rabatt per liter drivstoff.

Sett opp en ulikhet som kan brukes til å avgjøre hvilket av betalingskortene hun bør bruke avhengig av prisen per liter bensin, og si noe om hva hun burde velge.

Hint: du kan selv velge hvor mange liter Wenche fyller. Skillet mellom kortene går uansett ved den samme prisen per liter bensin.

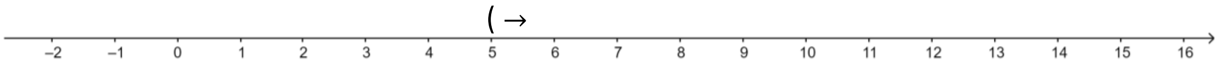
Ulikheter uten digitale hjelpemidler

Når vi skal løse ulikheter bruker vi de samme metodene som beskrevet under delkapittelet «**Likninger uten digitale hjelpemidler**».

Det er imidlertid viktig å være klar over følgende:

Dersom $x > 5$, så vil $-x < -5$.

Hvorfor? Se på tallinjene nedenfor.

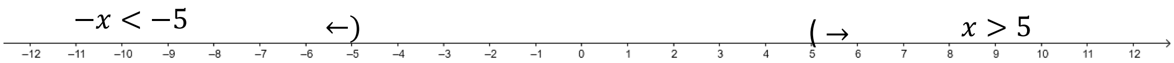


$x > 5$ betyr at x kan være alle tall til høyre for 5 på tallinja

Velg et hvilket som helst tall til høyre for 5 på tallinja, for eksempel 7.
Vi erstatter x med 7 i ulikheten, og skrive at
$7 > 5$

Hva skjer dersom vi forandrer fortegnet til begge tallene i ulikheten? Da får vi tallene -7 og -5, og vi må nå skrive at
$-7 < -5$

Dette vil gjelde uansett hvilket tall vi velger. Vi kan vise dette på tallinjen:



Effekten av dette er at dersom vi endrer fortegnet til x ved å multiplisere eller dividere med et negativt tall, må vi snu ulikhetstegnet. Se eksempelet på nedenfor.

Eksempel på en ulikhet hvor vi må snu ulikhetstegnet:

Løs ulikheten

$$2x + 4 \quad \leq \quad 4x + 10$$

Løsning:

Venstre side		Høyre side	Regning	Metode
$2x + 4$	$\leq$	$4x + 10$	$-4-4x$	Flytte/bytte-metoden
$2x - 4x$	$\leq$	$10 - 4$		Regner like ledd
$-2x$	$\leq$	6	$:(-2)$	Divisjonsmetoden
x	$\geq$	-3		

Oppgave 26

Løs ulikhetene

a) $3x + 2 > 8$

b) $-2x + 5 \geq x - 1$

c) $x - 3 < -3x - 1$

d) $2(x - 1) \geq 3(x - 6)$

e) $2x - 5 \geq 4x + 1$

f) $2(x - 3) < 2 + 3(x - 1)$

g) $\frac{2}{3} - \frac{5}{2}x \leq \frac{1}{3} - x$

h) $\frac{5}{3}x - \frac{1}{4} > -\frac{7}{4} + \frac{8}{3}x$

Oppgave 27

Velg noen av oppgavene ovenfor, og løs dem ved hjelp av CAS og GeoGebra.

Oppgave 28

Et taxi-selskap beregner pris for en kjøretur ved hjelp av følgende formel:

$$pris = 15\ kr\ per\ km + 90\ kr\ i\ startpris$$

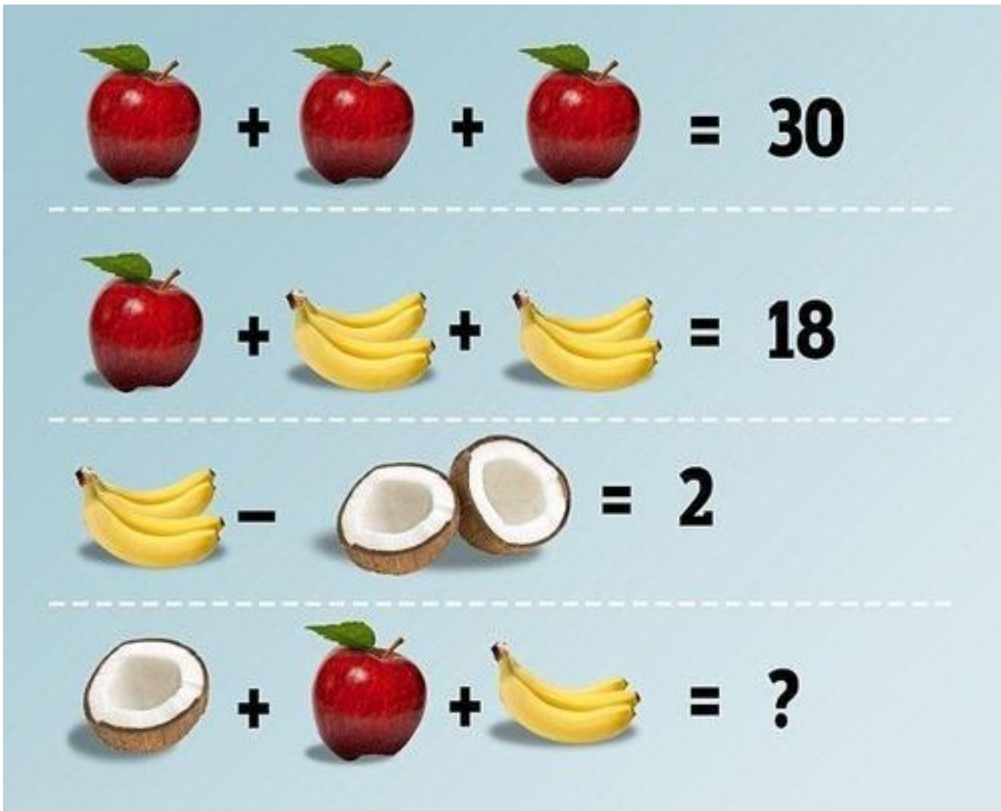
a) Hvor lang kan turen være dersom kunden skal betale mindre enn 211 kroner?
b) Hvor lang må turen være dersom kunden skal betale minst 345 kroner?

Likninger med flere ukjente

På abcnyheter.no kan vi finne en artikkel med denne innledningen:

Mattenøtten ser enkel ut, men får Facebook til å koke

Elisabeth Bergskaug /ABC Nyheter
18. feb. 2016 14:46 – Oppdatert 18. feb. 2016 14:46



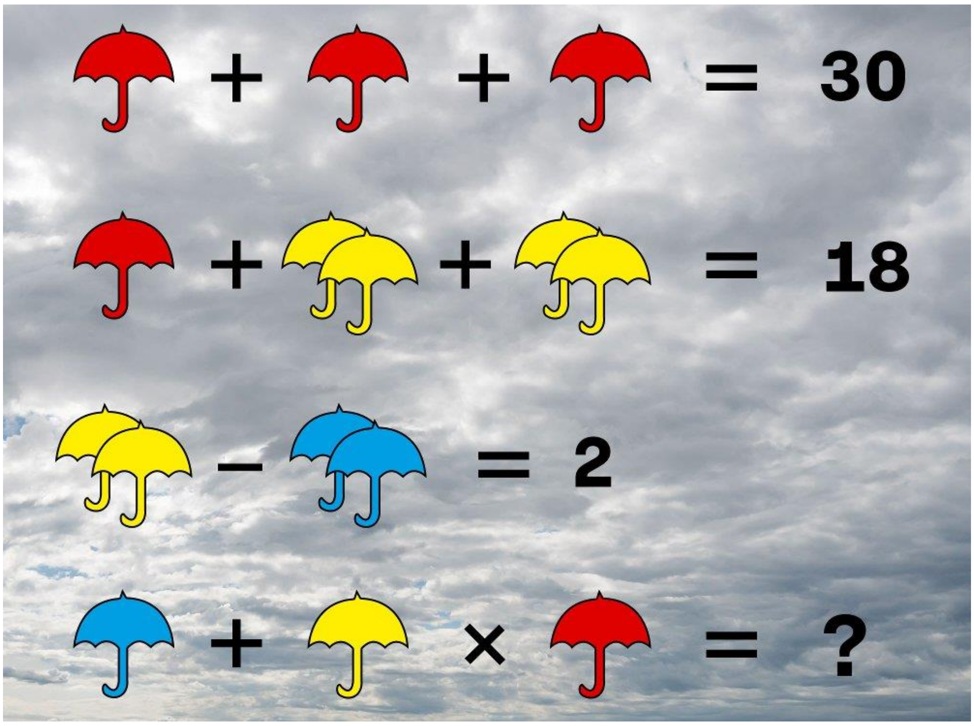
Blir svaret på likningen 14, 15 eller 16? Debatten raser på Facebook. Hva tror du?

Hva mener du er riktig løsning på likningen?

Hvorfor blir det diskusjon rundt svaret på likningen?

Oppgave 29

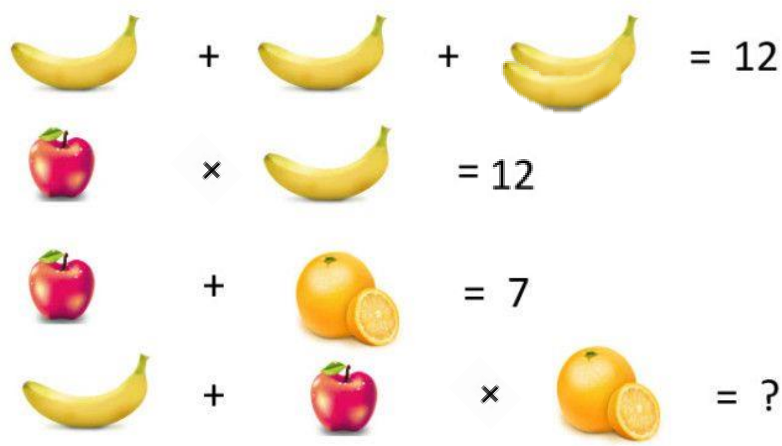
Hva blir svaret på likningen?



Tenk deg at du skulle forklare tankemåten din til en som ikke har funnet løsningen. Hvordan ville du ha ordlagt deg?

Oppgave 30

Hva blir svaret på likningen?



Tenk deg at du skulle forklare tankemåten din til en som ikke har funnet løsningen. Hvordan ville du ha ordlagt deg?

Oppgave 31

En bondegård har 45 dyr som enten er sauer eller høner.
Dyrene har til sammen 108 bein.
Hvor mange høner og hvor mange sauer er det på gården?
Tenk deg at du skulle forklare tankemåten din til en som ikke har funnet løsningen. Hvordan ville du ha ordlagt deg?

Oppgave 32

På en hamburgerrestaurant kjøper en familie 4 hamburgere og 5 brus, og betaler til sammen 470 kroner.
En annen familie kjøpte 3 hamburgere og to brus, og betalte 321 kroner.
Hvor mye kostet en hamburger?
Tenk deg at du skulle forklare tankemåten din til en som ikke har funnet løsningen. Hvordan ville du ha ordlagt deg?

Oppgave 33

Henrik og Jakob fører treningsdagbok. Etter en uke har Henrik jogget 42 km, mens Jakob har registrert 104 km. I ukene etter løper Henrik 5 km hver dag, mens Jakob roer ned og løper 3 km per dag.
Hvor langt har de jogget den dagen de har løpt like langt?
Tenk deg at du skulle forklare tankemåten din til en som ikke har funnet løsningen. Hvordan ville du ha ordlagt deg?

Oppgave 34

En avisselger har fått inn 590 kr i tikroninger og tjuekroninger. Selgeren har fått 13 flere tikroninger enn tjuekroninger.
Hvor mange tikroninger og hvor mange tjuekroninger har selgeren fått inn?
Tenk deg at du skulle forklare tankemåten din til en som ikke har funnet løsningen. Hvordan ville du ha ordlagt deg?

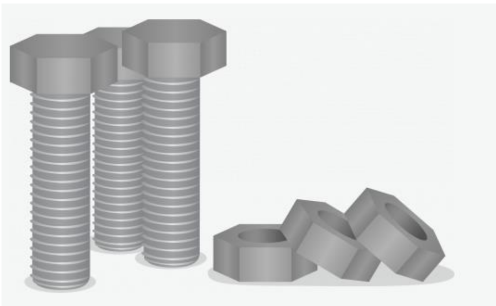
Oppgave 35

I et lokaloppgjør i fotball ble det solgt 246 billetter totalt. Billettprisen for voksne var kr. 70, mens barnebilletten kostet 35 kroner. Billettinntektene ble til sammen 12 425 kroner. Hvor mange voksne og barn hadde kjøpt billett?

Tenk deg at du skulle forklare tankemåten din til en som ikke har funnet løsningen. Hvordan ville du ha ordlagt deg?

Oppgave 36

En jernvarehandel selger poser med skruer og muttere.



Det viser seg at en pose med to skruer og to muttere veier 39,0 gram, mens en annen pose med en skrue og tre muttere veier 28,9 gram.

Hvor mye veier en skrue og hvor mye veier en mutter?

Tenk deg at du skulle forklare tankemåten din til en som ikke har funnet løsningen. Hvordan ville du ha ordlagt deg?

Oppgave 37

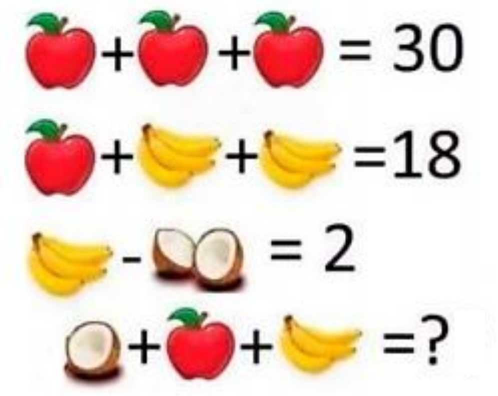
En kaffegrossist har kjøpt inn to typer kaffe; hverdagskaffe og selskapskaffe.

Hvis han blander en del hverdagskaffe med tre deler selskapskaffe, blir prisen 45 kr per kg. Hvis han blander to deler hverdagskaffe med tre deler selskapskaffe, blir prisen 42 kr per kg. Hva er kiloprisen på hverdagskaffe og selskapskaffe i ublandet tilstand?

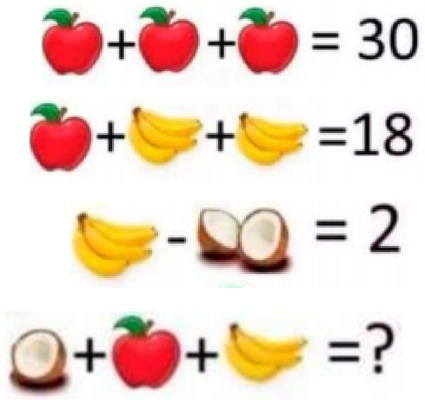
Tenk deg at du skulle forklare tankemåten din til en som ikke har funnet løsningen. Hvordan ville du ha ordlagt deg?

Matematisering av opplysninger

Du har tidligere lært at du kan løse **likninger** ved hjelp av **CAS** dersom du **matematiserer** opplysningene som er gitt i oppgaven.
Da vi løste **likninger** med èn ukjent, valgte vi å la x representere det ukjente. I eksempelet nedenfor skal vi løse en **likning** med tre ukjente. Vi velger derfor å erstatte de ukjente med bokstavene x, y og z.
Hva er svaret på **likningen** nedenfor?



Denne oppgaven kan ha flere løsningsmetoder, alt ettersom hvordan vi tolker informasjonen som er gitt. Derfor er det viktig å være tydelig på hva x, y og z representerer:
$Eple = x$
$Tre\ bananer = y$
$Halv\ kokosnøtt = z$



Informasjon	Matematisering	Løsning i CAS
	$3x = 30$	1 3x=30 → $3x = 30$
	$x + y + y = 18$	2 x+y+y=18 → $x + 2y = 18$
	$y - 2z = 2$	3 y-2z=2 → $y - 2z = 2$
	$z + x + y = ?$	4 {$1, $2, $3} Løs: $\{\{x = 10, y = 4, z = 1\}\}$

Marker alle radene med opplysninger, i dette tilfellet radene 1 til 3. Trykk deretter på «Løs».
Når vi har funnet **verdien** til alle ukjente, kan vi løse oppgaven:
$z + x + y = 1 + 10 + 4 = 15$
Til diskusjon:
Ville vi fått et annet svar dersom vi valgte at $y = en\ banan$, eller at $z = 2\ kokosnøtter$? Gjør en ny matematisering med disse representasjonene, og regn ut svaret på oppgaven.

Grafisk løsning – to ukjente

Vi kan også løse likninger med to ukjente ved hjelp av GeoGebra. Dersom informasjonen kommer i form av tekst må vi først **matematisere** opplysningene uttrykt ved x og y. Deretter skriver vi inn opplysningene i GeoGebra, som lager to grafer for oss. Løsningen finner vi ved å tolke skjæringspunktet mellom de to grafene.

Eksempel:

En kiosk selger pølser til 30 kroner og is til 20 kroner. En ettermiddag solgte kiosken 85 produkter, og hadde en inntekt på 2 150 kroner.

Utfra disse opplysningene kan vi bruke funksjonsverktøyet i GeoGebra til å finne ut hvor mange pølser og hvor mange is kiosken solgte i løpet av ettermiddagen. Først må vi tydeliggjøre hva x og y skal representere. Deretter må vi **matematisere** opplysningene:

$Antall\ solgte\ pølser = x$
$Antall\ solgte\ is = y$

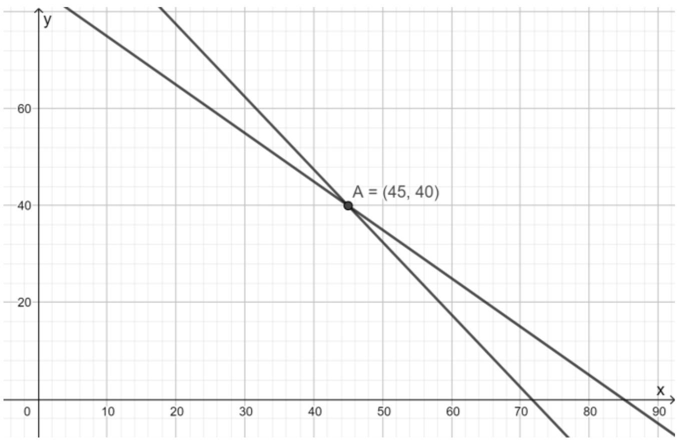
Opplysning I: $x + y = 85$
Opplysning II: $30x + 20y = 2150$

Vi skriver opplysningene inn i GeoGebra:

eq1 : $x + y = 85$

eq2 : $30\,x + 20\,y = 2150$

og får dette skjermbildet:



Skjæringspunkt A forteller oss at antall solgte pølser (x) er 45, mens antall solgte is (y) er 40.

Oppgave 38

Velg minst tre av oppgavene 31 - 37. Matematiser opplysningene, og løs likningssettene digitalt. Prøv både CAS og funksjonsverktøyet i GeoGebra.

Likningssett uten digitale hjelpemidler

Formålet med å løse en likning er å finne den **verdien** for x og den verdien for y som løser begge likningene i likningssettet. På de neste sidene viser vi tre ulike metoder vi kan bruke for å løse likningssett; **innsettingsmetoden**, **addisjonsmetoden**, og **grafisk løsning**. Det er lurt å lære alle metodene, slik at du kan bruke den metoden som passer best når du skal løse et likningssett.

Eksempel:

Løs likningssettet

I: $3x - y = 0$
II: $\mathrm{x} - \mathrm{y} = 4$

Legg merke til at vi bruker romertallet I og II for å nummerere **betingelsene**. Dersom du bruker tallene 1 og 2 skjer det fort at disse tallene blandes inn i oppgaven.

Innsettingsmetoden

Denne metoden går ut på å finne et uttrykk for enten x eller y i en av **betingelsene**, og deretter sette dette uttrykket inn for den valgte **variabelen** (x eller y) i den andre **betingelsen**. Vi vil nå ha en likning med kun én ukjent.

Ved å bruke likningsreglene fra delkapittelet «Likninger uten digitale hjelpemidler» vil vi da kunne regne verdien til den andre variabelen, som vi kan sette inn i en av de opprinnelige **betingelsene**. Dette gjør at vi kan regne verdien av den første **variabelen**.

Løs likningssettet ved hjelp av innsettingsmetoden

I: $3x - y = 0$
II: $\mathrm{x} - \mathrm{y} = 4$

Løsning:

Bet.	Regning	Forklaring
I:	$3x - y = 0$	Skriver opp begge betingelsene, og nummererer
II:	$\mathrm{x} - \mathrm{y} = 4$	dem ved hjelp av romertall
II:	$\mathrm{x} = 4 + \mathrm{y}$	Finner et uttrykk for x i betingelse II
I:	$3(4 + \mathrm{y}) - \mathrm{y} = 0$	Erstatter x med uttrykket i betingelse I, og løser
	$12 + 3y - y = 0$	likningen med hensyn på y.
	$2y = -12$	
	$y = -6$	Finner at $y = -6$
II:	$x - (-6) = 4$	Erstatter y med (-6) i en av de opprinnelige
	$x + 6 = 4$	betingelsene, og løser likningen med hensyn på x
	$x = 4 - 6$	
	$x = -2$	Finner at $x = -2$

Addisjonsmetoden
Denne metoden går også ut på å finne et uttrykk for enten x eller y i en av **betingelsene**, men på en annen måte enn ved **innsettingsmetoden**. Vi bruker **addisjonsmetoden** når vi på en enkel måte kan forandre en av **betingelsene**, for så legge sammen **betingelsene**. Vi vil nå ha en likning med kun én ukjent.
Ved å bruke likningsreglene fra delkapittelet «Likninger uten digitale hjelpemidler» vil vi da kunne regne verdien til den andre variabelen, som vi kan sette inn i en av de opprinnelige **betingelsene**. Dette gjør at vi kan regne verdien av den første **variabelen**.

Løs likningssettet ved hjelp av addisjonsmetoden:

I: $3x - y = 0$
II: $\mathrm{x} - \mathrm{y} = 4$

Løsning:

Bet.	Regning		Forklaring
I:	$3x - y = 0$		
II:	$\mathrm{x} - \mathrm{y} = 4$	$\mid \cdot (-1)$	Multipliserer alle ledd med (-1)
I:	$3x - y = 0$		Legger sammen betingelsene
II:	$\underline{-x + y = -4}$		
	$2x = -4$		Løser likningen med hensyn på x
	$x = -2$		Finner at $x = -2$
II:	$(-2) - y = 4$		Erstatter x med (-2) i en av de opprinnelige betingelsene, og løser likningen med hensyn på y
	$-y = 4 + 2$		
	$-y = 6$		
	$y = -6$		Finner at $y = -6$

Oppgave 39

Løs likningssettene nedenfor. Velg den metoden du syns passer best.

a)
$3x + y = 18$
$x + 2y = 11$

b)
$2x + y = 10$
$-3x + 2y = -1$

c)
$x + y = 1$
$2y - x = 2$

d)
$5y - x = 4$
$x + 4y = 5$

Oppgave 40

Løs likningssettene nedenfor. Velg den metoden du syns passer best.

a)
$\frac{1}{2}x + y = 3$
$-5x - 3y = -2$

b)
$-2x - y = 3$
$\frac{1}{2}x - y = -\frac{7}{2}$

c)
$-x + \frac{1}{2}y = 10$
$2x - 5y = 4$

d)
$-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y = 5$
$\frac{3}{2}x - \frac{5}{2}y = -4$

En eksamensoppgave (del 1)

Løs likningen

$$(x-3)(x+1)x=0$$

En eksamensoppgave (del 2)

Begrunn hvorfor $x^2 > x^3$ når $x < 0$

En eksamensoppgave (del 2)

Fredrik og Cecilie har fått i oppgave å løse ulikheten $x^2 \le 3x$

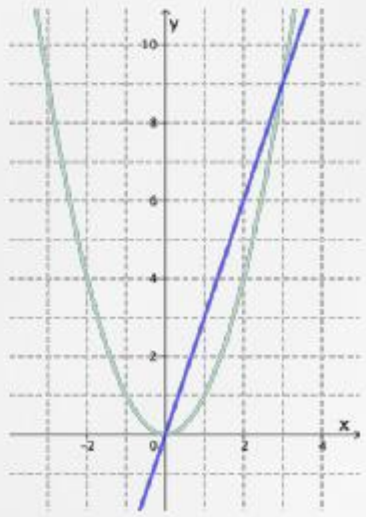
Fredrik har levert denne besvarelsen.

$$x^2 \le 3x$$

$$\frac{x^2}{x} \le \frac{3x}{x}$$

$$\underline{x \le 3}$$

Cecilie har levert denne besvarelsen.



Vurder begge besvarelsene.

Å uttrykke en størrelse ved hjelp av en annen

I noen situasjoner er opplysningene gitt på en slik måte at en **størrelse** beskrives i forhold til en annen **størrelse**. Vi kan få vite at en bror er et bestemt antall år eldre eller yngre enn søsteren sin, at det er dobbelt så mange innbyggere i ett land i forhold til et annet land, eller at inntekten til en husstand er halvparten av inntekten til en annen husstand.
I slike tilfeller kan det være lurt å først velge hvem eller hva vi ønsker skal erstattes av x. Deretter uttrykker vi de andre ukjente i forhold til x. Nedenfor finner du noen eksempler på dette.

Eksempel 1: en bror er 3 år eldre enn sin søster.

Vi kan *enten* skrive
$Søsterens\ alder = x$
$Brorens\ alder = (x + 3)$

eller vi kan skrive
$brorens\ alder = x$
$søsterens\ alder = (x - 3)$

Eksempel 2: det bor omtrent dobbelt så mange innbyggere i Sverige som i Norge.

Vi kan *enten* skrive
$innbyggertall\ Norge = x$
$innbyggertall\ Sverige = 2x$

eller vi kan skrive
$innbyggertall\ Sverige = x$
$innbyggertall\ Norge = \frac{x}{2}$

Felles for begge eksemplene er at vi mangler minst en opplysning for å regne ut verdien til x. I situasjoner med to ukjente *må* vi ha minst to opplysninger.

I eksempel 1 kunne vi fått vite alderen til broren eller søsteren, mens vi i eksempel 2 kunne fått vite innbyggertallet i Norge eller Sverige. Imidlertid får vi som regel en annen opplysning; hvor mye de er til sammen.

Eksempel 1: til sammen er søsknene 27 år. Hvor gammel er hver av dem?

Eksempel 2: til sammen bor det 15 millioner mennesker i Norge og Sverige. Hvor mange mennesker bor det i hvert av landene?

På neste side viser vi hvordan vi kan **matematisere** disse opplysningene, og hvordan vi kan bruke **CAS** til å finne svaret på spørsmålet.

	Eksempel 1	Eksempel 2
Opplysning 2:	Til sammen er søsknene 27 år	Til sammen bor det 15 millioner mennesker i Norge og Sverige
Matematisering:	$søster + bror = 27$ år $x + (x + 3) = 27$	$Norge + Sverige = 15\ millioner$ $x + 2x = 15\,000\,000$
Utregning i CAS:	1 x + (x+3)=27 → $2x + 3 = 27$ 2 \$1 Løs: $\{x = 12\}$	1 x+2x=15000000 → $3x = 15000000$ 2 \$1 Løs: $\{x = 5000000\}$
Løsning	$Søsterens\ alder = x = 12$ år $Brorens\ alder = (x + 3) = 15$ år	$Innb. Norge = x = 5\,000\,000$ $Innb. Sverige = 2x = 10\,000\,000$

Oppgave 41

Erik og Petter var på fisketur. Erik fikk dobbelt så mange fisk som Petter. Til sammen fikk de 51 fisker.

Hvor mange fisker fikk hver av dem?

Oppgave 42

På vg2 er det 142 elever. Det er 14 flere jenter enn gutter på trinnet.

Hvor mange elever er det av hvert kjønn på vg2?

Oppgave 43

Lise har 4 ganger så mye penger i banken som lillebroren sin. Til sammen har de 7 500 kr i banken.

Hvor mye har hver av dem på kontoen sin?

Oppgave 44

Bestefaren til Endre er akkurat 6 ganger så gammel som Endre. Til sammen er de 63 år.

Hvor gammel er Endre, og hvor gammel er bestefar?

Oppgave 45

Tre musikkinteresserte brødre samler på gitarer. Til sammen har de 25 gitarer. Den eldste har 3 ganger så mange gitarer som den yngste. Den mellomste har 5 flere gitarer enn den yngste.

Hvor mange gitarer har hver av brødrene?

Oppgave 46

En familie på fire er til sammen 80 år. Far er eldst, og mor er tre år yngre. Den eldste av barna er $\frac{1}{3}$ av alderen til mor, og den yngste er 7 år.

Finn alderen til hvert av familiemedlemmene.

Oppgave 47

Tre barn, Alf, Line og Kari var på blåbærtur i skogen. De hadde hvert sitt spann til å plukke bærene i. I løpet av 6 timer plukket de i alt 17 liter blåbær.

Alf plukket halvparten av det Line plukket. Kari plukket 2 liter mer enn det Line gjorde.

Hvor mange liter blåbær plukket hver av barna?

Oppgave 48

Person A, B og C har tippet sammen, og skal dele premien i forhold til innsatsen hver av personene har betalt.

Person A skal ha halvparten av det person B skal ha. Person C skal ha 3000 kr mindre enn det person B skal ha. Premien var på 46 300 kr.

Regn ut hvor mye hver av personene skal ha av premien.

Oppgave 49

3 russ kjøpte russebil sammen.

Person B betalte en femdel av kjøpesummen. Person A betalte en fjerdedel av kjøpesummen, og person C betalte 13 000 kr.

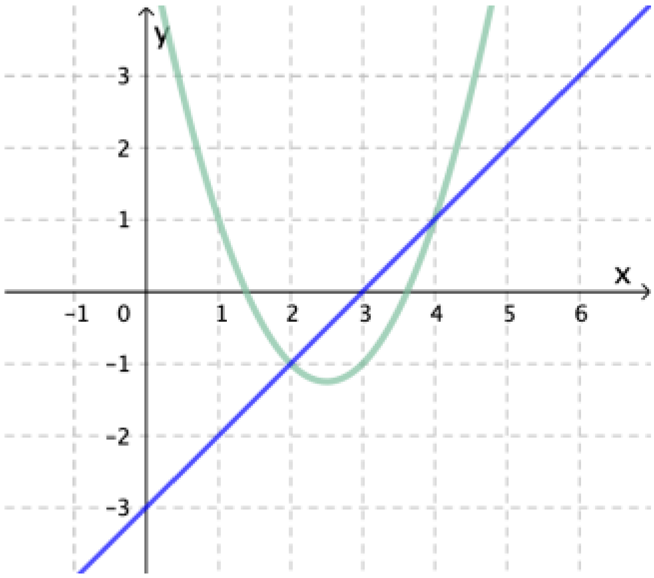
Hvor mye kostet russebilen, og hvor mye betalte person A og person B?

En eksamensoppgave

I koordinatsystemet nedenfor ser du grafene til en andregradsfunksjon f og en lineær funksjon g. Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^2 - 5x + 5$$

Bruk grafene til å sette opp en ulikhet som har løsningen $2 < x < 4$.
Husk å begrunne svaret.



Løsningsforslag

Oppgave	Svar
1	1 280 kr
2	1 120 kr
3	3 350 kr
4	1 250 kr
5	3 000 kr
6	1 000 kr
7	118 km
8	900 min = 15 timer
9	16 kr
10	6 timer
11	318 sider
14	a) $x = 4$ b) $x = \frac{3}{2}$ c) $x = 2$ d) $x = 3$ e) $x = 5$ f) $x = 2$ g) $x = \frac{5}{2}$ h) $x = -\frac{2}{3}$
15	a) $x = 2$ b) $x = -\frac{5}{2}$ c) $x = -6$ d) $x = 7$ e) $x = -6$ f) $x = 1$ g) $x = 3$ h) $x = -\frac{1}{4}$
16	$\frac{x+4}{2} \cdot 3 - 1 = 14$ $x = 6$
17	a) $x = 9$ b) $x = 6$ c) $x = -\frac{5}{2}$ d) $x = -10$ e) $x = \frac{20}{13}$ f) $x = \frac{15}{8}$

Oppgave	Svar
20	$Fars\ alder > 2 \cdot 18$ Faren til Jonas er mer enn 36 år når Jonas blir 18 år.
21	$650 + x > 700$ $x > 50$
22	$10\,000 + 800x > 15\,000 + 500x$ Tilbud 1 er billigst opp til 23 deltakere. Ved flere enn 23 deltakere vil tilbud 2 være billigst.
23	a) $115x > 8\,000$. Det må være flere enn 53 reisende for at skolen skal velge tilbud 1 b) $\frac{8\,000}{x} > 115$. Også her går skillet på 53 reisende. Det må være flere enn 53 reisende for at tilbud 1 skal være billigst.
24	$22\,000 + 1\,200x \geq 28\,000 + 600x$ Tilbudene er like gode etter 10 døgn. Ved færre døgn er tilbud 1 best, og ved flere døgn er tilbud 2 best.
25	Vi velger at hun fyller 30 l bensin: $30x \cdot 0{,}96 \leq 30x \cdot 0{,}99 - 0{,}5 \cdot 30$

	g) $x = \frac{7}{8}$ h) $x = \frac{7}{6}$		$x \geq 16{,}67$ Dersom bensinprisen er lavere enn 16,67 kr bør Wenche bruke kort nr. 1. Ved høyere bensinpris bør hun bruke kort nr. 2.
18	$? = 30$		
19	a) $x = \pm 5$ b) $x = \pm 7$ c) $x = \pm 4$ d) $x = 2$ e) $x = \pm 3$ f) $x = 5$ g) $x = \pm 8$ h) $x = -5$		
26	a) $x > 2$ b) $x \leq \frac{4}{3}$ c) $x < \frac{1}{2}$ d) $x \leq 16$ e) $x \leq -3$ f) $x > -5$ g) $x \geq \frac{2}{9}$ h) $x < \frac{3}{2}$	**40**	a) $x = -2,\ y = 4$ b) $x = -\frac{13}{5},\ y = \frac{11}{5}$ c) $x = -13,\ y = -6$ d) $x = \frac{13}{2},\ y = \frac{11}{2}$
28	a) $Turen < 7{,}4\ km$ b) $Turen > 17\ km$	**41**	Petter fikk 17 fisk, Erik fikk 34 fisk
29	21	**42**	64 gutter, 78 jenter
30	15	**43**	Lillebror: 1 500 kr, Lise: 6 000 kr
31	9 sauer og 36 høner	**44**	Endre: 9 år, bestefar: 54 år
32	Hamburger: 95 kr, brus: 18 kr.	**45**	Yngste: 4 gitarer, mellomste: 9 gitarer eldste: 12 gitarer
33	36 dager		
34	11 tikroninger og 24 tjuekroninger	**46**	Yngste barn: 7 år, eldste barn: 10 år mor: 30 år, far: 33 år
35	137 barnebilletter og 109 voksenbilletter		
36	Skrue: 14,8 g, mutter: 4,7 g	**47**	Line: 6 l, Alf: 3 l, Kari: 8 l
37	Hverdagskaffe: 30 kr/kg Selskapskaffe: 50 kr/kg	**48**	A: 9 800 kr, B: 19 600 kr, C: 16 600 kr
39	a) $x = 5,\ y = 3$ b) $x = 3,\ y = 4$ c) $x = 0,\ y = 1$ b) $x = 1,\ y = 1$	**49**	Bilen kostet 20 000 kr. Person A betalte 5 000 kr, person B betalte 4 000 kr.

Eksamensoppgave side 35

For å løse oppgaven enklest mulig må vi betrakte hver av parentesene som et tall. For eksempel betyr parentesen $(x-3)$ et tall som er 3 lavere enn x. Dette betyr at likningen består av 3 tall som multiplisert med hverandre skal gi 0 som svar, og det vil kun skje dersom minst ett av tallene er 0.

For at $(x-3)$ skal være 0 må x ha verdien 3.
For at $(x+1)$ skal være 0 må x ha verdien -1.
I tillegg vil også $x=0$ gjøre at svaret blir 0.

Likningen har 3 løsninger: $3, (-1)\ og\ 0$.

Eksamensoppgave side 135

x^2 vil alltid ha positiv verdi, mens verdien til x^3 vil ha samme fortegn som x.Dersom x har negativ verdi vil x^3 også ha negativ verdi.

Dersom x har negativ verdi vil x^2 ha positiv verdi, mens x^3 vil ha negativ verdi.

Derfor vil x^2 være større enn x^3 når x er mindre enn 0.

Eksamensoppgave side 35

For at ulikheten skal være sann må x ligge i intervallet $[0{,}3]$, altså fra og med 0 og til og med 3.

Fredrik har kun funnet en del av løsningen. Han har kun funnet at x må være mindre eller lik 3. Dersom x har negativ verdi vil ulikheten ikke være sann. Dette fordi x^2 alltid vil være positiv, mens $3x$ vil ha samme fortegn som x. Dette betyr at x^2 vil være større enn $3x$ når x er negativ.

Cecilie har riktig start på løsningen ved å skrive inn de to uttrykkene på hver side av ulikhetstegnet. Hun har imidlertid ikke funnet skjæringspunktene mellom de to uttrykkene, og har derfor ikke besvart oppgaven.

Eksamensoppgave side 39

I området $2 < x < 4$, er funksjonsverdiene til andregradsfunksjonen f, mindre enn funksjonsverdiene til den lineære funksjonen g.

Ulikheten som har denne løsningen kan uttrykkes på flere måter:

$f(x) < g(x)$

$x^2 - 5x + 5 < x - 3$

$x^2 - 6x + 8 < 0$

$(x-2)(x-4) < 0$