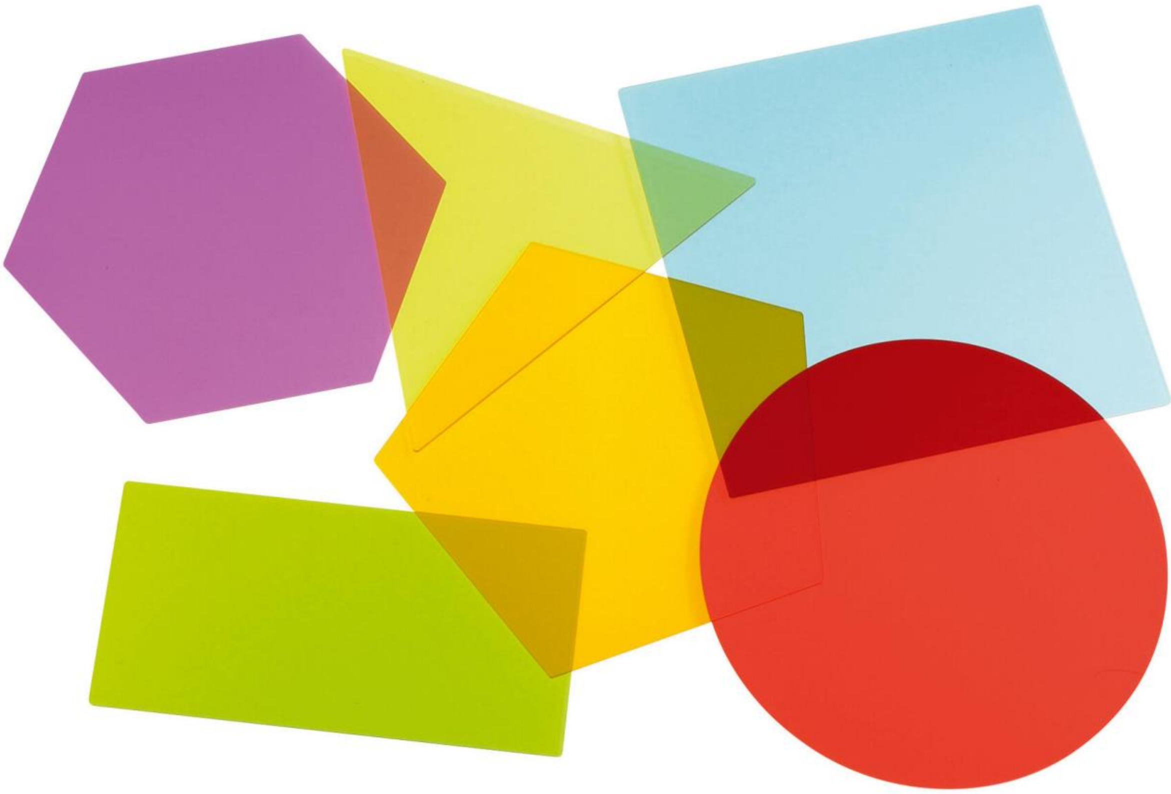
Geometri



Målet for opplæringen er at eleven skal kunne:

- Utforske og forklare hvordan formlikhet, målestokk og egenskaper ved geometriske figurer kan brukes i beregninger og praktisk arbeid

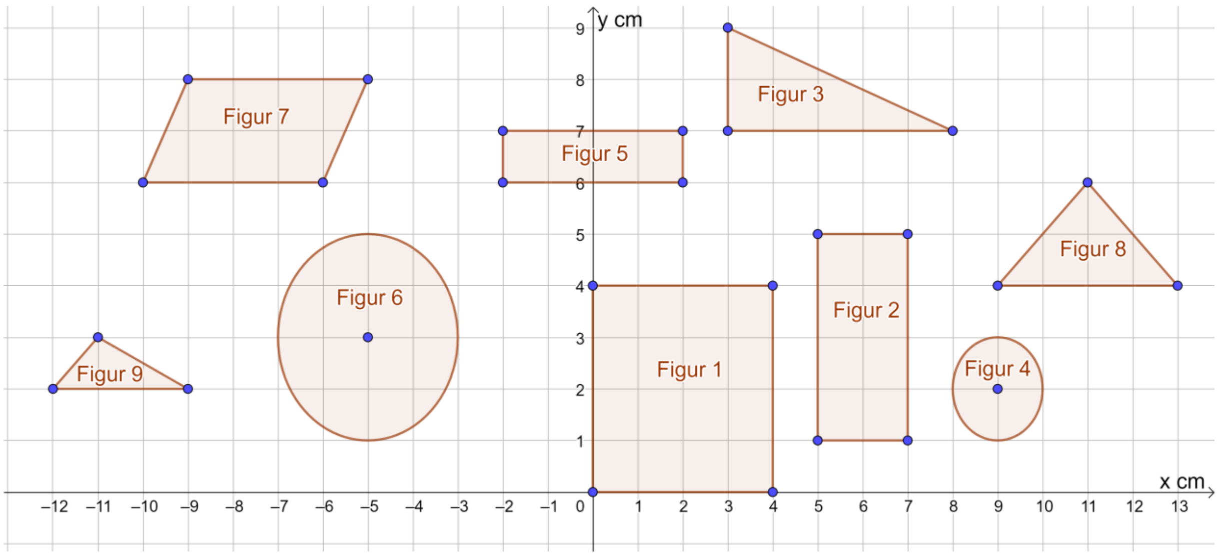
Areal og omkrets

Oppgave 1

Fyll ut tabellen nedenfor. Hva beskriver formlene i kolonnen til høyre?

Formel	Hva regnes ut	Skisse med mål
$lengde \cdot bredde$		
$side^2$		
$\frac{lengde \cdot bredde}{2}$		
πr^2		
$side1 + side2 + side3 + side4$		
$side \cdot 4$		
$side1 + side2 + side3$		
$2r\pi$		

Oppgave 2

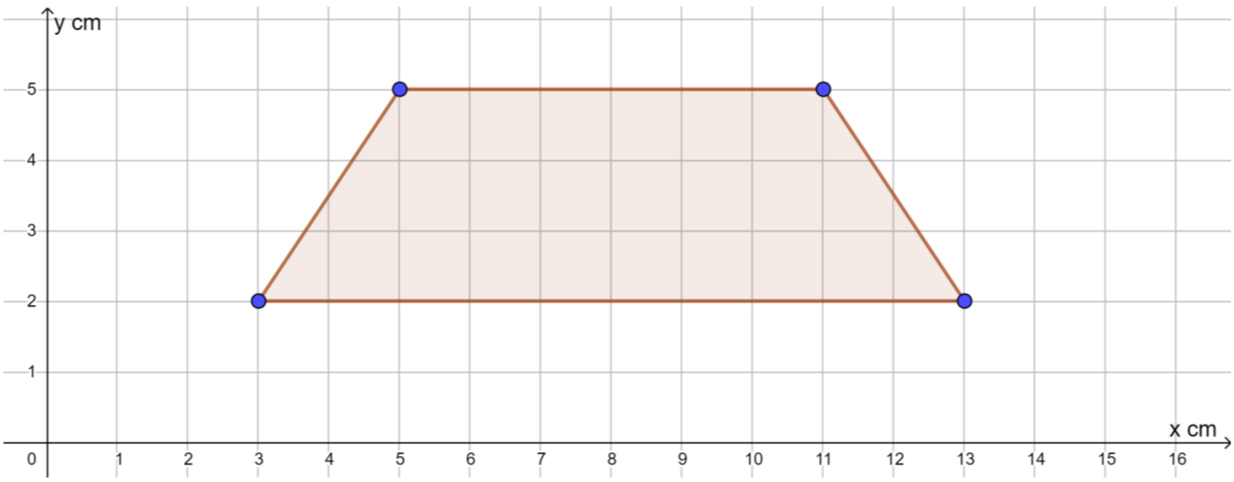


a) Regn arealet til figurene ovenfor.

b) Regn omkretsen til figurene 1, 2, 4, 5 og 6.

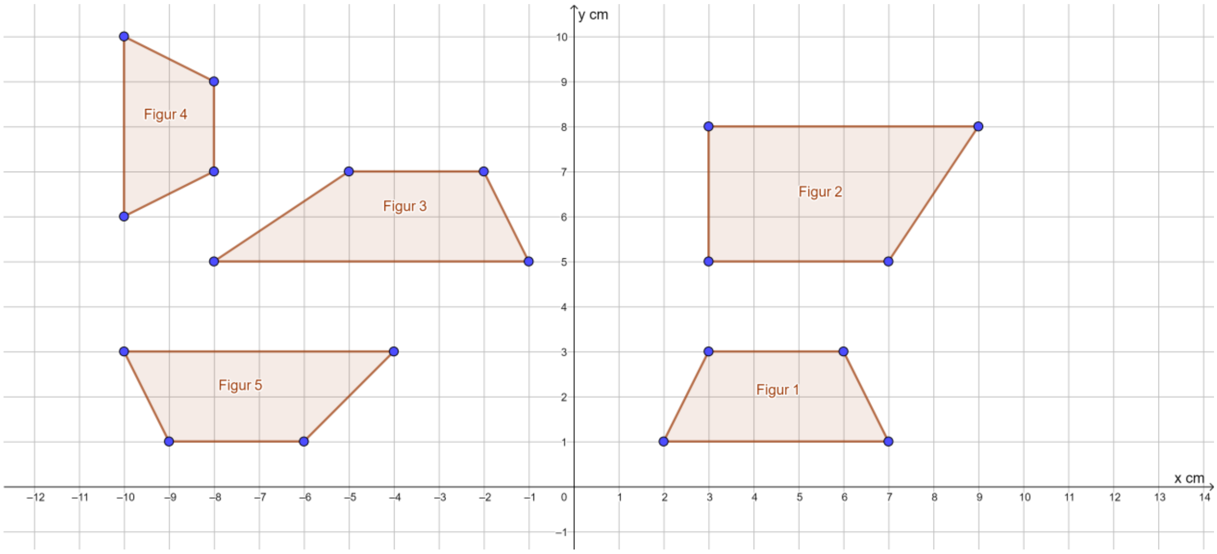
Oppgave 3

Hvordan kan vi regne arealet til figuren nedenfor?



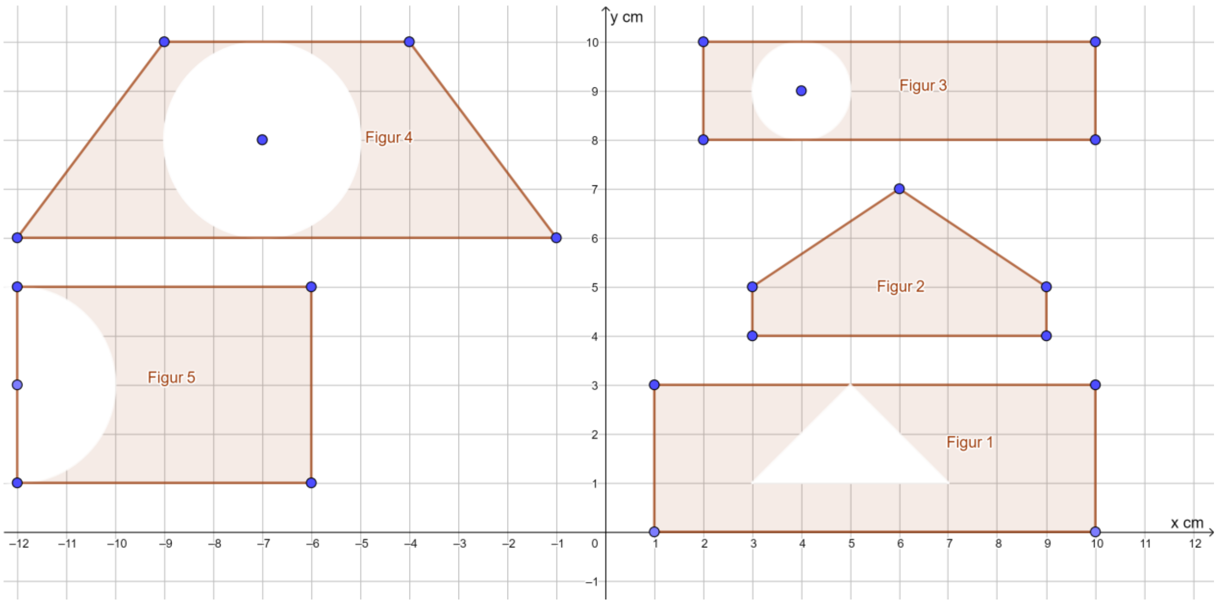
Oppgave 4

Regn arealet til figurene nedenfor.



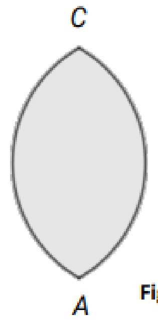
Oppgave 5

Finn arealet til det fargelagte området i figurene nedenfor.



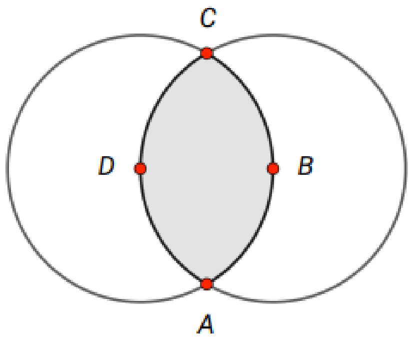
En eksamensoppgave

Laila er billedkunstner og har fått i oppdrag å dekorere inngangspartiet i et rådhus. Hun har bestemt seg for å bruke geometriske figurer.
Til høyre ser du en av figurene hun vil bruke.

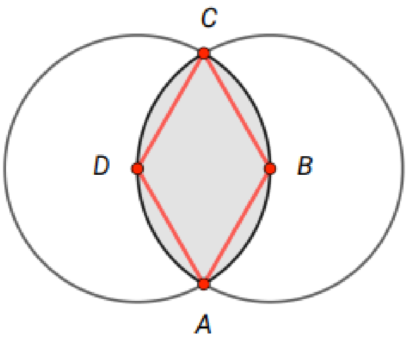


Figur 1

Hun tegner figuren ved hjelp av to like store sirkler med sentrum i B og D.
Se nedenfor.



Figur 2



Figur 3

Laila påstår at de fire røde linjestykkene i figur 3 har samme lengde.

a) Forklar at dette er riktig.

Arealet av figur 1 er gitt ved

$$A=\left(\frac{4\cdot\pi-3\cdot\sqrt{3}}{6}\right)\cdot r^2$$

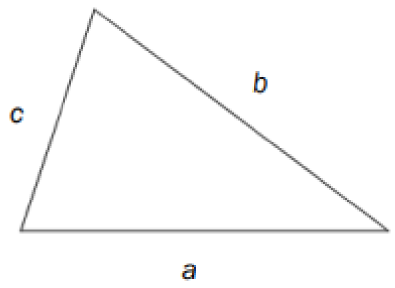
der r er radius i sirklene Laila tegner.

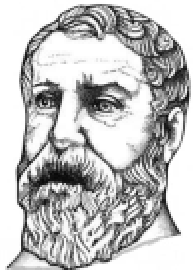
Laila vil lage figurene ut fra sirkler med radius $r=0{,}5$ m. Hun har et spann med 5 L maling. På spannet står det at 1 L maling vil dekke 1 m^2.

b) Har Laila nok maling til å male 16 figurer?

En eksamensoppgave

Heron fra Alexandria levde i det første århundret av vår tidsregning.
Han har fått en formel oppkalt etter seg.



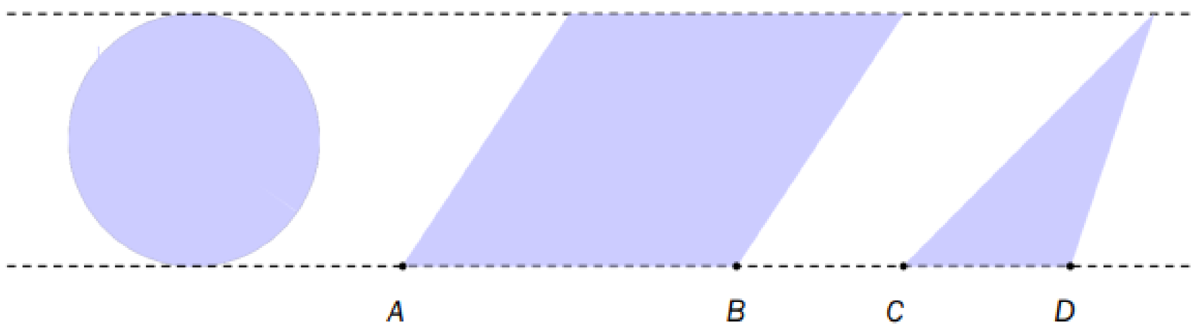


Vi kan bruke Herons formel til å regne ut arealet T av en trekant med sider a, b og c.

Arealet er $\quad T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad$ der $\quad s = \dfrac{a+b+c}{2}$

Bruk Herons formel til å bestemme arealet av en trekant med sider 6, 10 og 14 cm.

En eksamensoppgave

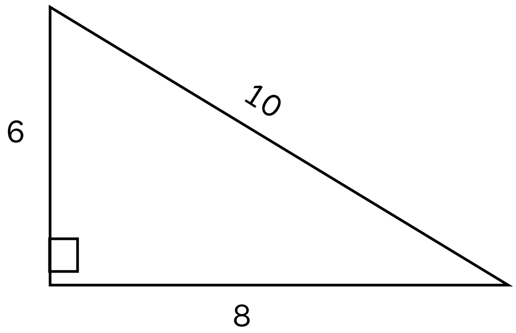


Ovenfor ser du to parallelle linjer, en sirkel, et parallellogram og en trekant.
$AB = 8$ og $CD = 4$. Sirkelen har areal 9π.

Bestem arealet av parallellogrammet og av trekanten.

Rettvinklet trekant - Pytagoras

Utgangspunkt



I flere tusen år har vi hatt kunnskap om at det er en sammenheng mellom de korte sidene i en rettvinklet trekant og den lange siden.

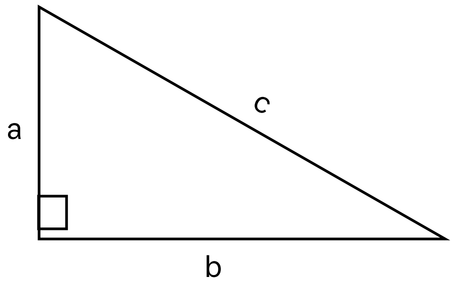
La oss først sammenligne lengdene til sidene:

6 + 8 = 14. Dette er ikke det samme som den

La oss deretter sammenligne kvadrattallet til sidene:

$6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$ $\qquad$ $10^2 = 100$.

Her ser vi at svarene blir like, og det er ikke en tilfeldighet. Det viser seg at kvadrattallet til de to korte sidene lagt sammen blir like mye som kvadrattallet til den lange siden. Matematisk skriver vi denne sammenhengen slik:



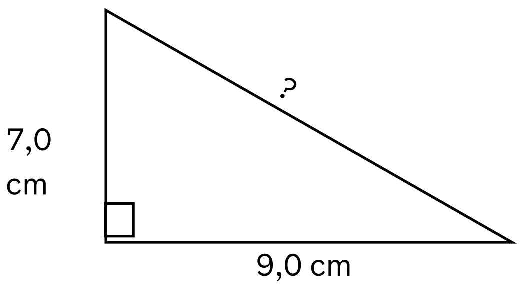
$a^2 + b^2 = c^2$

eller

$c^2 = a^2 + b^2$

I skolematematikken kaller vi ofte de korte sidene for katet (k) og den lange siden hypotenus (h). Vi bruker denne kunnskapen til å beregne ukjente sider i rettvinklede trekanter.

Å finne den lange siden (hypotenus)



Vi kan finne kvadrattallet til den lange siden ved å legge sammen kvadrattallene til de to korte sidene:

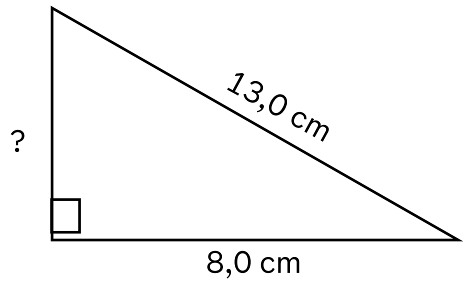
$7^2 + 9^2 = 49 + 81 = 130$

Nå vet vi at kvadrattallet til den lange siden blir 130. For å finne lengden til den lange siden må vi bruke kvadratrot:

$\sqrt{130} = 11{,}4$

Det betyr at lengden på den lange siden er 11,4 cm.

Å finne en av de korte sidene (katet)



Vi kan finne kvadrattallet til den korte siden ved å regne kvadrattallet til de to kjente sidene, og deretter trekke det minste fra det største:

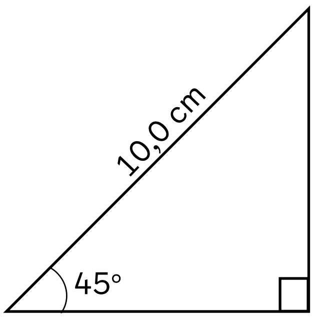
$13^2 - 8^2 = 169 - 64 = 105$

Nå vet vi at kvadrattallet til den andre korte siden blir 105. For å finne lengden til den ukjente siden må vi bruke kvadratrot:

$\sqrt{105} = 10{,}2$

Det betyr at lengden på den korte siden er 10,2 cm.

90° - 45°- 45° - trekant



I en rettvinklet trekant hvor de to andre vinklene er 45° vil katetene være like lange. Det vil si at kvadrattallet til hvert av katetene er halvparten av kvadrattallet til hypotenusen.

$10^2 : 2 = 100 : 2 = 50$

Nå vet vi at kvadrattallet til begge katetene er 50. For å finne lengden til hver av katetene må vi bruke kvadratrot:

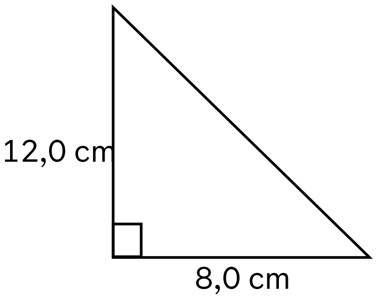
$\sqrt{50} = 7{,}1$

Det betyr at lengden på katetene er 7,1 cm.

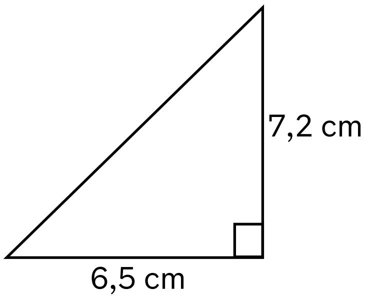
Oppgave 6

Finn den ukjente siden i trekantene nedenfor.

a)



b)



c)

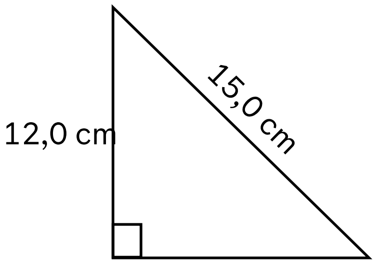
I en rettvinklet trekant er lengdene på de to katetene 14,7 cm og 19,2 cm.

Lag en hjelpetegning av figuren og regn ut lengden på hypotenusen.

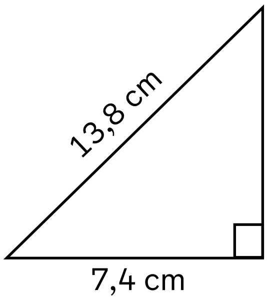
Oppgave 7

Finn den ukjente siden i trekantene nedenfor.

a)



b)



c)

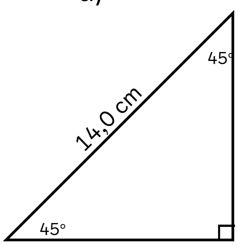
I en rettvinklet trekant er lengdene på hypotenusen 3,8 m og det ene katetet 1,7 m.

Lag en hjelpetegning av figuren og regn ut lengden på det andre katetet.

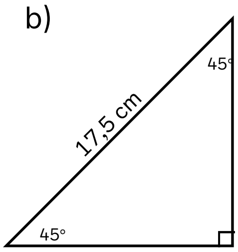
Oppgave 8

Finn de ukjente sidene i trekantene nedenfor.

a)



b)



c)

I en rettvinklet trekant hvor vinkelen mellom hypotenusen og hver av katetene er 45° er lengden på hypotenusen 8 m.

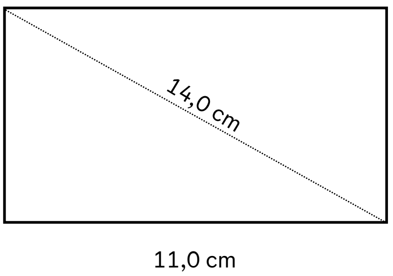
Lag en hjelpetegning av figuren og regn ut lengden på hver av katetene.

Praktisk bruk av Pytagoras' setning

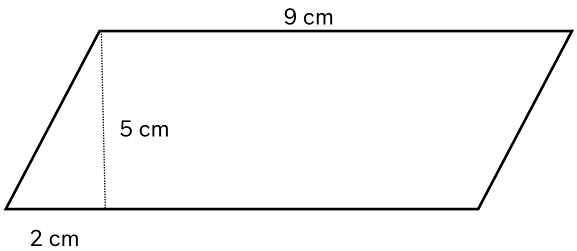
Oppgave 9

Regn areal og omkrets av figurene nedenfor

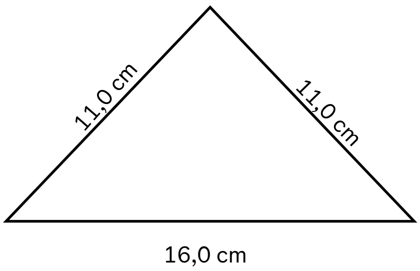
a)



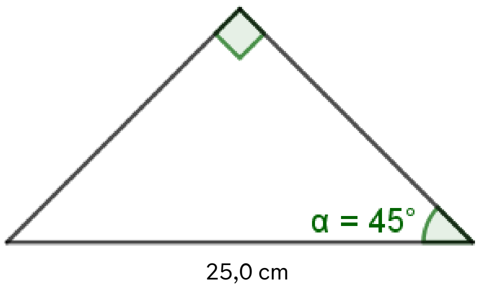
b)



c)



d)



En eksamensoppgave

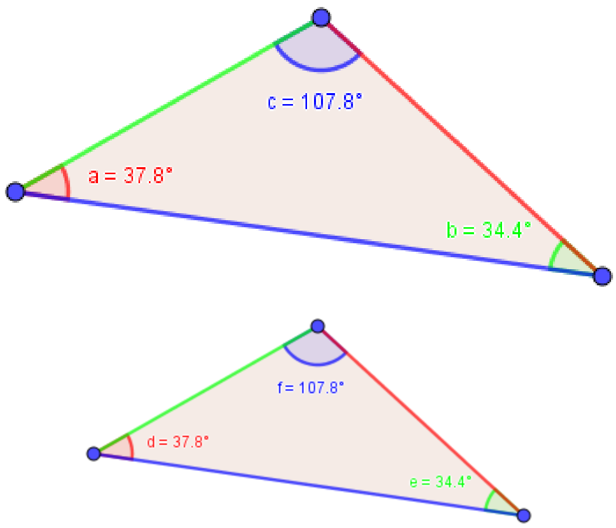
Cathrine skal fra A til B. Se kartet til venstre. Hun kan velge å gå fra A til B, eller hun kan sykle fra A til C og så videre fra C til B.
Avstanden fra A til C er 400 m, og avstanden fra C til B er 300 m.

a) Hvor langt er det fra A til B?
b) Hvor mange prosent lengre er sykkelturen sammenlignet med gåturen?

På kartet til Cathrine er Sjøsanden 4,0 cm lang. I virkeligheten er Sjøsanden 0,8 km lang.

c) Bestem målestokken til kartet.

Formlike trekanter



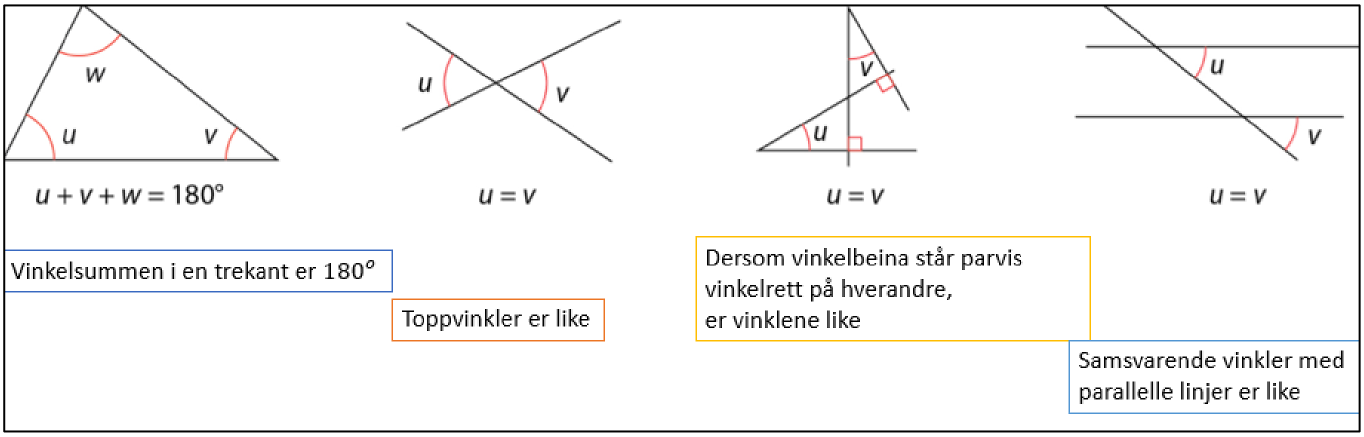
Dersom vinklene i to trekanter er identiske, er trekantene formlike. Vi sier at vinklene er parvis like store. Du kan tenke på det som om den ene trekanten er en mindre eller en større kopi av den andre.

De to trekantene til venstre er formlike hverandre. De like vinklene er markert med farger. De kalles samsvarende vinkler.

Sider som ligger på samme plass i de to trekantene kalles samsvarende sider. De samsvarende sidene er markert med farger.

Hvordan avgjøre om to trekanter er formlike hverandre?

I rammen nedenfor finner du fire matematiske sannheter du skal støtte deg på når du skal avgjøre om to trekanter er formlike hverandre. Alle begrunnelser tar utgangspunkt i at vinkelsummen i en trekant er 180°, og at dersom du vet størrelsen på to av vinklene kan du regne ut den siste.

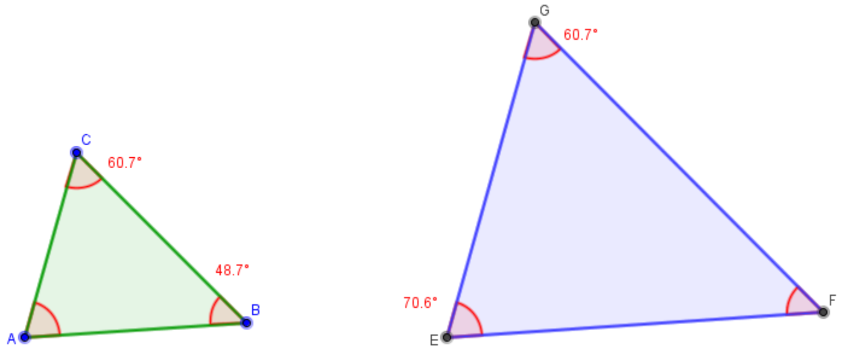


I oppgaver er ofte trekantene tegnet på en slik måte at det er lett å bli forvirret. De kan være tegnet speilvendt, rotert, liggende oppå hverandre eller på andre måter som skaper vansker.

Det er derfor helt nødvendig å tegne dem ved siden av hverandre med samsvarende vinkler og samsvarende sider på samme plass.

Eksempel:

Forklar at $\triangle ABC$ er formlik $\triangle EFG$



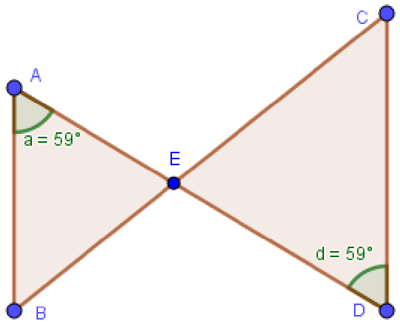
$\angle A = 180° - 48{,}7° - 60{,}7° = 70{,}6° = \angle E$

$\angle F = 180° - 70{,}6° - 60{,}7° = 48{,}7° = \angle B$

$\angle C = 60{,}7° = \angle G$

Har nå vist at trekantene har parvis like store vinkler. Derfor er $\triangle ABC$ formlik $\triangle EFG$.

Forklar at $\triangle ABE$ er formlik $\triangle CDE$



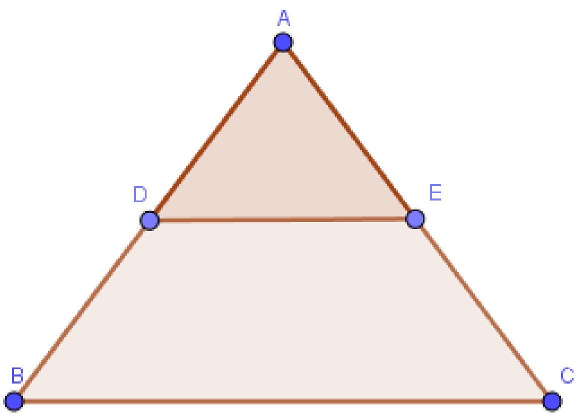
$\angle A = \angle D$

$\angle CED$ og $\angle AEB$ er toppvinkler, og dermed like

Da må $\angle B = \angle C$

Har nå vist at trekantene har parvis like store vinkler. Derfor er $\triangle ABE$ formlik $\triangle CDE$.

Linjestykkene BC og DE er parallelle. Forklar at $\triangle ABC$ er formlik $\triangle ADE$



$\angle A$ er lik i begge trekanter.

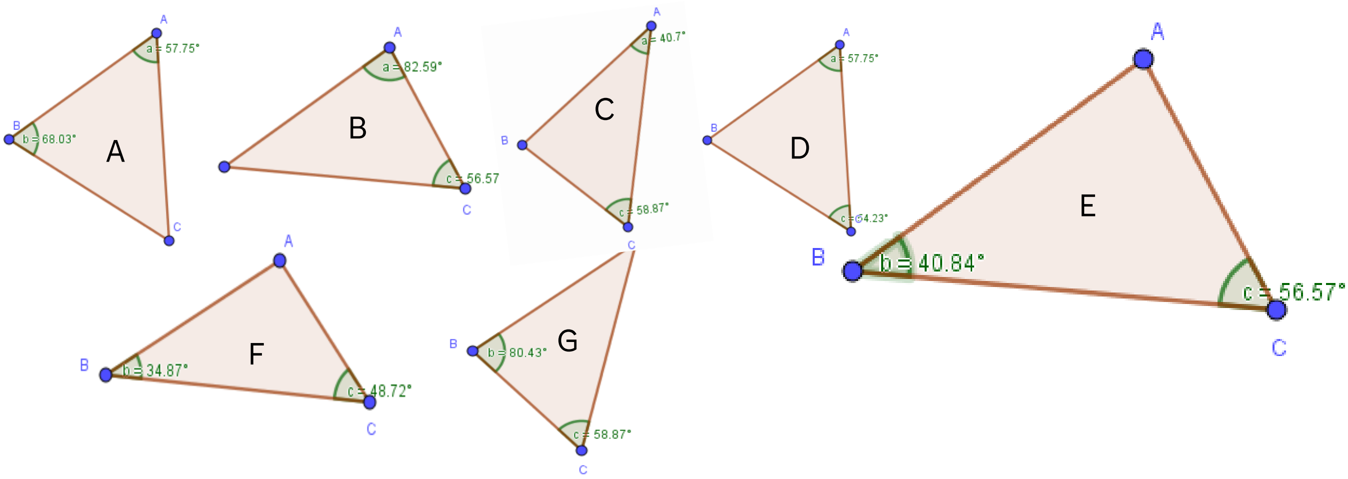
$\angle D$ og $\angle B$ samsvarende vinkler med parallelle linjer. De er derfor like store.

$\angle E$ og $\angle C$ samsvarende vinkler med parallelle linjer. De er derfor like store.

Har nå vist at trekantene har parvis like store vinkler. Derfor er $\triangle ABC$ formlik $\triangle ADE$.

Oppgave 10

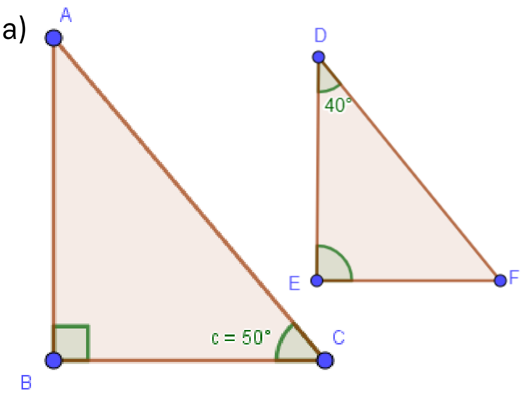
Nedenfor ser du trekantene A – G. Det er 3 par av formlike trekanter. Hvilke av trekantene er formlike? Tegn de formlike trekantene ved siden av hverandre, skriv på størrelsen på vinklene, og marker samsvarende sider.



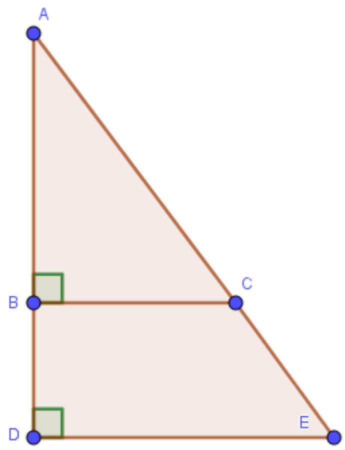
Oppgave 11

Forklar hvorfor trekantene er formlike.

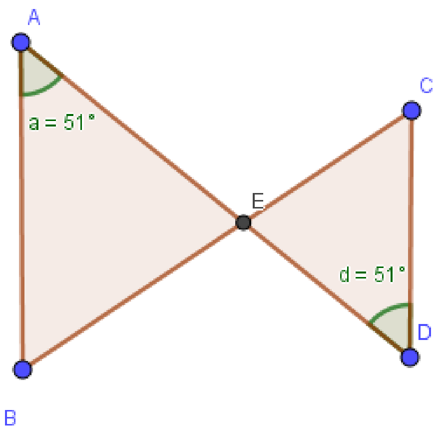
a)



b)



c)



Tegn trekantene ved siden av hverandre og marker samsvarende sider.

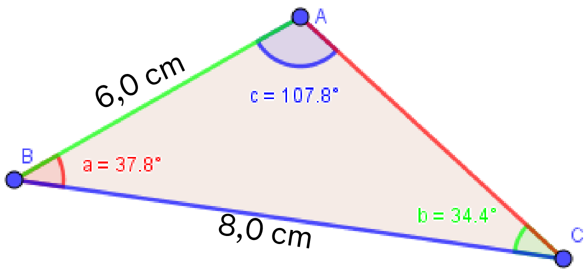
Hvordan bruke formlike trekanter til å finne ukjente lengder?

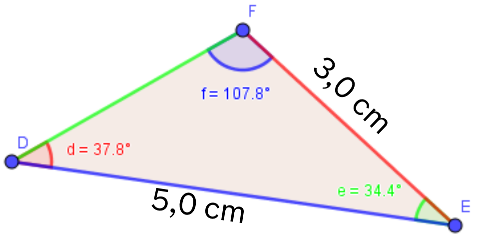
Dersom to trekanter er formlike vil forholdet mellom de samsvarende sidene være likt, og forholdet vil være proporsjonale størrelser.

Dersom vi vet forholdstallet mellom trekantene kan vi bruke forholdstallet til å regne ut de ukjente sidene, enten ved å multiplisere eller dividere med forholdstallet.

Vi kan også sette opp en forholdsligning, eller tegne en lineær graf.

Eks:





Finn lengden AC og lengden DF

<u>Ved bruk av forholdstall</u>

Vi finner først forholdstallet ved å dividere de kjente samsvarende sidene.

$$\frac{BC}{DE} = \frac{8\ cm}{5\ cm} = 1{,}6$$

Vi multipliserer med forholdstallet, dersom vi ønsker en lengre lengde:

$$AC = EF \cdot 1{,}6 = 3{,}0\ cm\ \cdot 1{,}6 = 4{,}8\ cm$$

Vi dividerer med forholdstallet, dersom vi ønsker en kortere lengde:

$$DF = \frac{AB}{1{,}6} = \frac{6{,}0\ cm}{1{,}6} = 3{,}8\ cm$$

Dette kan også føres i en tabell:

Eksempel	Samsvarende sider	Samsvarende sider	Samsvarende sider
ΔABC	BC = 8 cm	AC = 3,0 cm · 1,6 = 4,8 cm	AB = 6,0 cm
ΔDEF	DE = 5 cm	EF = 3,0 cm	DF = 6,0 cm : 1,6 = 3,8 cm
Forholdstall	$\frac{8}{5}$ = 1,6		

Ved bruk av forholdsligning

Vi sammenligner alltid med de kjente samsvarende sidene. De ukjente sidene løses som x.

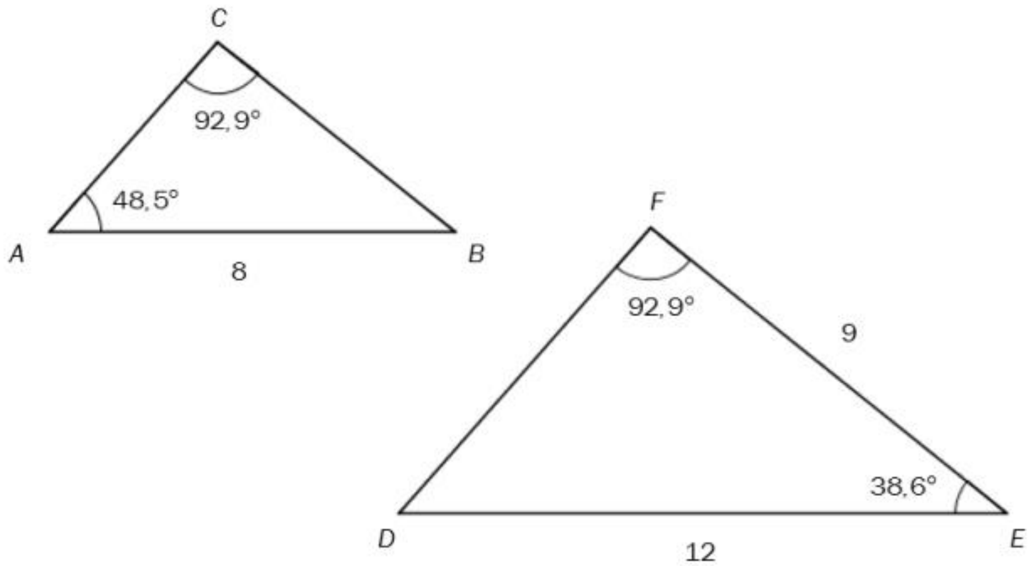
Eksempel	Samsvarende sider	Samsvarende sider	Samsvarende sider
ΔABC	BC = 8 cm	AC = x cm	AB = 6,0 cm
ΔDEF	DE = 5 cm	EF = 3,0 cm	DF = x cm

AC: $\frac{8}{5} = \frac{x}{3}$ → $\frac{x}{3} = \frac{8}{5}$ → $x = \frac{8 \cdot 3}{5}$ = 4,8 → AC = 4,8 cm

DF: $\frac{8}{5} = \frac{6}{x}$ → $\frac{x}{6} = \frac{5}{8}$ → $x = \frac{5 \cdot 6}{8}$ = 3,75 → DF = 3,8 cm

De påfølgende oppgaver er tidligere eksamensoppgaver. I slike oppgaver må du være forberedt på at du må bruke både formlikhet og Pytagoras' setning. Tegnene I og II angir om oppgaven ble gitt på del 1 (I) eller del 2 (II)

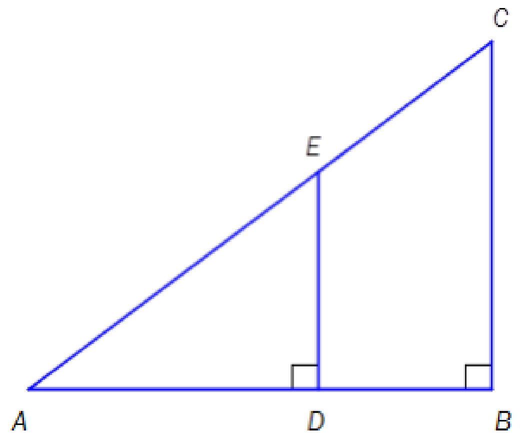
Oppgave 12 - I



a) Forklar at de to trekantene ovenfor er formlike.

b) Bestem lengden av siden BC ved regning.

Oppgave 13 - II



$\triangle ABC$ og $\triangle ADE$ er gitt som vist på skissen ovenfor. $AD = 5{,}0\,\text{m}$, $BD = 3{,}0\,\text{m}$ og $BC = 6{,}0\,\text{m}$.

a) Bestem lengden AC ved regning.

b) Forklar hvorfor $\triangle ABC$ og $\triangle ADE$ er formlike og bestem lengden DE ved regning.

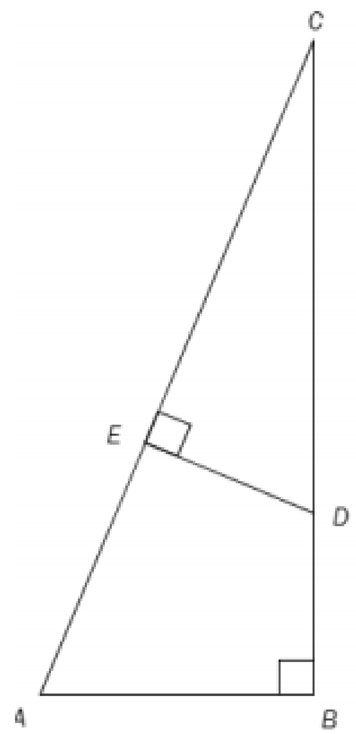
c) Bestem arealet av $\square DBCE$ ved regning.

Oppgave 14 – II

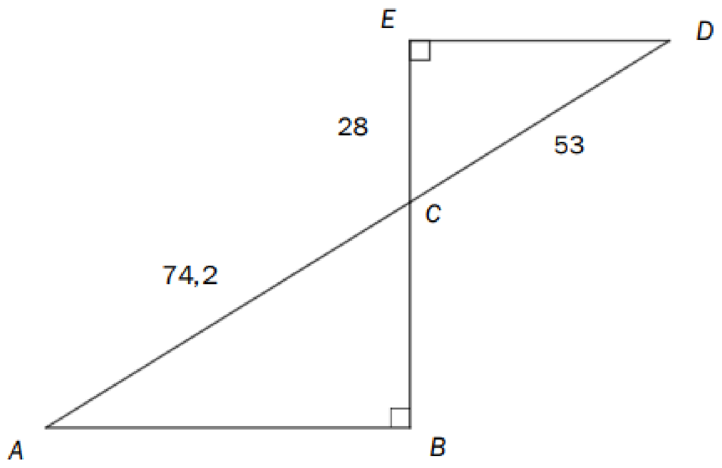
Gitt $\triangle ABC$ og $\triangle CED$. Se figuren til høyre.

$BC = 36$, $AC = 39$ og $CD = 26$.

a) Forklar hvorfor $\triangle ABC$ og $\triangle CED$ er formlike
b) Bestem lengden av CE
c) Vis at forholdet mellom arealet av $\triangle ABC$ og arealet av $\triangle CED$ er $\frac{9}{4}$



Oppgave 15 - II



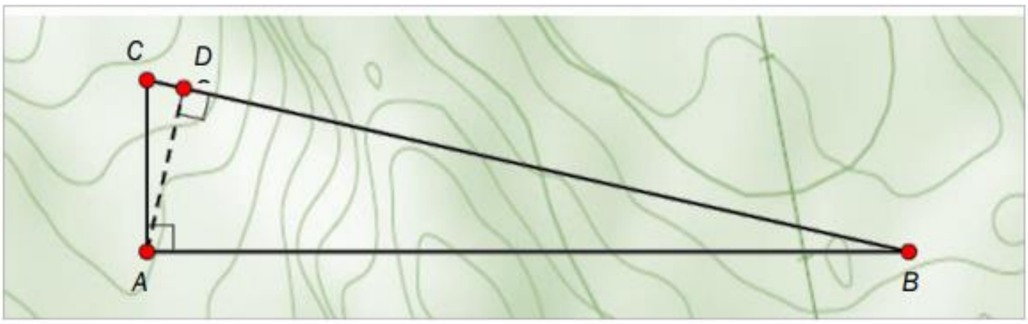
Gitt figuren ovenfor. C er skjæringspunktet mellom AD og BE.
$AC = 74{,}2$, $CD = 53$, $CE = 28$ og $\angle ABC = \angle DEC = 90°$

a) Forklar at ΔABC og ΔCDE er formlike.

b) Bestem lengden av BC og lengden av AB.

c) Bestem forholdet mellom arealet av ΔABC og arealet av ΔCDE.

Oppgave 16



Et område har form som vist på kartet ovenfor.

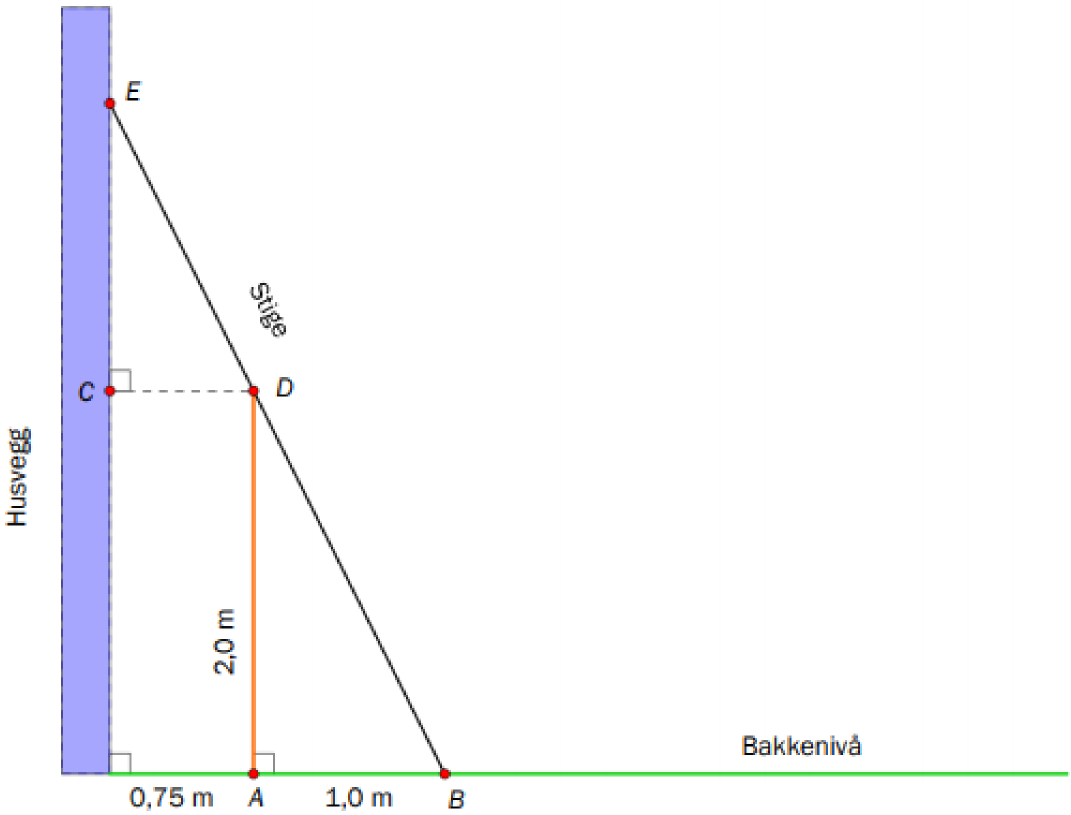
a) Forklar at ΔABC og ΔABD er formlike.

Avstanden fra A til D er 18,0 km. Avstanden fra B til D er 80,0 km.

b) Tegn en skisse av de to trekantene ΔABD og ΔABC ved siden av hverandre, og marker samsvarende sider.
Hvor langt er det fra A til C?

Oppgave 17 - II

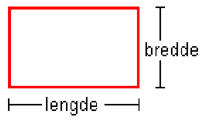
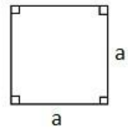
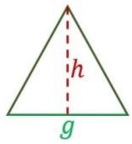
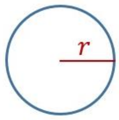
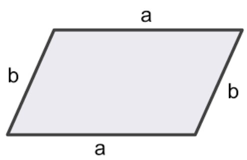
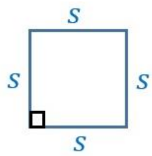
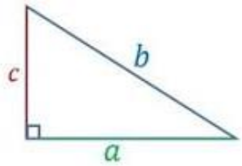
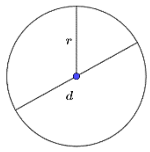
En stige står på skrå mot en husvegg. Stigen berører et gjerde. Gjerdet er 2,0 m høyt og står 0,75 m fra husveggen. Stigen er plassert 1,0 m fra gjerdet. Se figuren nedenfor



a) Forklar at $\triangle ABD$ og $\triangle CDE$ er formlike.

b) Hvor lang er stigen?

Løsningsforslag

Formel	Hva regnes ut	Skisse med mål
$lengde \cdot bredde$	Areal firkant	
$side^2$	Areal kvadrat	
$\frac{lengde \cdot bredde}{2}$	Areal trekant	
πr^2	Areal sirkel	
$side1 + side2 + side3 + side4$	Omkrets firkant	
$side \cdot 4$	Omkrets kvadrat	
$side1 + side2 + side3$	Omkrets trekant	
$2r\pi$	Omkrets sirkel	

Oppgave 2			Oppgave 4		Oppgave 5	
Figur nr.	Areal	Omkrets	Figur nr.	Areal	Figur nr.	Areal
1	$16\ cm^2$	$16\ cm$	1	$8\ cm^2$	1	$26\ cm^2$
2	$8\ cm^2$	$12\ cm$	2	$15\ cm^2$	2	$12\ cm^2$
3	$5\ cm^2$		3	$10\ cm^2$	3	$12{,}86\ cm^2$
4	$3{,}14\ cm^2$	$6{,}28\ cm$	4	$6\ cm^2$	4	$19{,}44\ cm^2$
5	$4\ cm^2$	$10\ cm$	5	$9\ cm^2$	5	$27{,}14\ cm^2$
6	$12{,}56\ cm^2$	$12{,}56\ cm$				
7	$8\ cm^2$					
8	$4\ cm^2$					
9	$1{,}5\ cm^2$					

Oppgave 3

Dette er også en firkant, slik at arealet regnes ved formelen $lengde\ \cdot bredde$. Bredden er avstanden mellom de parallelle linjene, altså 3 cm i denne figuren. Den øverste lengden er 6 cm, mens den nederste lengden er 10 cm.

Regnestykket $6\ cm \cdot 3\ cm$ gir et areal som er for lite, mens regnestykket $10\ cm\ \cdot 3\ cm$ gir et areal som er for høyt. Det riktige arealet finner vi ved å velge en lengde som er gjennomsnittet av de to målte lengdene, altså 8 cm i denne figuren. Formelen blir derfor:

$$\frac{lengde\ 1 + lengde2}{2} \cdot bredde = \frac{6\ cm + 10\ cm}{2} \cdot 3\ cm = 8\ cm\ \cdot 3\ cm = 24\ cm^2$$

Eksamensoppgave side 160

a)

Avstanden mellom D, B og C er alle en radius. Det samme med A, B og D. Årsaken til det er at punktene ligger enten på sikelpereferier (A og C) eller i sentrum og på sirkelfereferier (B og D). Begge sirkler har radus r, altså er avstanden mellom alle punktene r.

b)

Trekantene ABD og BCD er likesidede og vinklene er 60 grader. Vinkel A og vinkel C er da 60 grader, mens vinkel D og vinkel B er 120 grader.

c)

Hun har nok maling til å male $5m^2$. Arealet av figurene blir:

$$16A = 16 \cdot (\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{6})0,5^2 = 4,91$$

Ja, hun har nok maling, dersom hun ikke søler mye.

Eksamensoppgave side 161

Sider i trekanten: 6, 10 og 14.

$s = \frac{6+10+14}{2} = 15$

$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{15 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 1} = 25,98 \approx 26$

Eksamensoppgave side 161

Siden arealet av en sirkel er $A = \pi r^2 = 9\pi$, må radius i sirkelen være 3 og avstanden mellom de to paralelle linjene lik seks. Dette utgjør høyden i parallellogrammet og i trekanten.

Areal paralellogram: $A = g \cdot h = 8 \cdot 6 = 48$

Areal trekant: $A = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12$

Oppgave	Svar	Oppgave	Svar
6	a) 14,4 cm b) 9,7 cm c) 24,2 cm	9	a) $A = 95{,}3\ cm^2, O = 39{,}4\ cm$
7	c) 9 cm b) 11,6 cm c) 3,4 m		b) $A = 45\ cm^2, O = 27{,}2\ cm$
8	a) 9,9 cm b) 12,4 cm c) 5,7 m		c) $A = 121\ cm^2, O = 38\ cm$
			d) $A = 92\ cm^2, O = 60{,}4\ cm$

Eksamensoppgave side 165

a)

Bruker Pytagoras og finner at avstanden AB er : $AB = \sqrt{300^2 + 400^2} = 500$ meter.

b)

$\frac{700-500}{500} = \frac{2}{5} = 40\%$. Sykkelturen er 40% lengre.

c)

Målestokk:

$\frac{4,0cm}{0,8km} = \frac{4}{80000} = \frac{1}{20000}$

Målestokken er 1:20 000 som betyr at 1cm på kartet er 20 000 cm i virkeligheten, altså tilsvarer 1 cm på kartet 200 meter i virkeligheten.

Oppgave	Svar
10	$\Delta A \sim \Delta D \quad \Delta B \sim \Delta E \quad \Delta C \sim \Delta G$
11	a) $\angle A$ = 180° − 140° = 40° =$\angle D$ $\angle B = 90° = \angle E$ Trekantene har parvis like store vinkler, og er dermed formlike. b) $\angle A$ er felles i begge trekanter $\angle B = 90° = \angle E$ Trekantene har parvis like store vinkler, og er dermed formlike. c) $\angle A = \angle D$ $\angle A$ er toppvinkel, og dermed like stor i begge trekanter. Trekantene har parvis like store vinkler, og er dermed formlike.
12	a) $\angle C = \angle F$ $\angle B = 180° - 141{,}4° = 38{,}6° = \angle E$ Trekantene har parvis like store vinkler, og er dermed formlike. b)$BC = 6$
13	a) $AC = 10\ cm$ b) $\angle A$ er felles i begge trekanter $\angle B = 90° = \angle D$ Trekantene har parvis like store vinkler, og er dermed formlike. c) $A \approx 14{,}6\ cm^2$
14	a) $\angle C$ er felles i begge trekanter $\angle B = 90° = \angle E$ Trekantene har parvis like store vinkler, og er dermed formlike. b) $CE = 24$ c) Arealet til en trekant er $\frac{g \cdot h}{2}$. Siden forholdet mellom lengdene i trekantene er $\frac{3}{2}$ kan vi lage følgende formel: $Areal\ \triangle ABC = \frac{\left(DE \cdot \frac{3}{2}\right) \cdot \left(CE \cdot \frac{3}{2}\right)}{2} = \frac{DE \cdot CE \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}}{2} = \frac{DE \cdot CE \cdot \frac{9}{4}}{2} = \frac{DE \cdot CE}{2} \cdot \frac{9}{4} = Areal \triangle CED \cdot \frac{9}{4}$

15	a) $\angle B = 90° = \angle E$ $\angle C$ er toppvinkel, og dermed like stor i begge trekanter. Trekantene har parvis like store vinkler, og er dermed formlike. b) $BC = 39{,}2 \quad AB = 63$ c) Forholdet mellom lengdene er $\frac{7}{5}$. Forholdet mellom arealet blir dermed $\frac{7}{5} \cdot \frac{7}{5} = \frac{49}{25} = 1{,}96$
16	a) $\angle B$ er felles i begge trekanter $\angle A = 90° = \angle D$ Trekantene har parvis like store vinkler, og er dermed formlike. b) $AC = 18\ km$
17	a) $\angle ABD\ og\ \angle CDE$ er samsvarende vinkler med parallelle linjer. $\angle A = 90° = \angle C$ Trekantene har parvis like store vinkler, og er dermed formlike. b) Stigen er 3,9 m lang